VI NUMERIČKE METODE REŠAVANJA NELINEARNIH JEDNAČINA

0. UVODNE NAPOMENE

Mnogobrojni su zadaci matematike i njenih primena koji se svode na rešavanje jednačina ili sistema jednačina. Svaka jednačina s jednom nepoznatom može se predstaviti u obliku

(1) $$f(x) = 0$$

gde je $f(x)$ funkcija, definisana u nekom konačnom ili beskonačnom intervalu $X = \{x;\ a < x < b\}$. Skup X ćemo zvati *oblašću dopustivih vrednosti* posmatrane jednačine.

Rešenje ili *koren* jednačine (1) je ona vrednost $x^* \in X$ za koju je $f(x^*) \equiv 0$ (naravno, ako takva vrednost postoji). *Rešiti* jednačinu znači naći *sva* njena rešenja ili utvrditi da jednačina *nema* rešenja, ako ih, zaista, nema. Skup svih rešenja označićemo s X_r; dakle, $X_r = \{x^*;\ x^* \in X;\ f(x^*) \equiv 0\}$. Očigledno je $X_r \subseteq X$.

U zavisnosti od toga kakve funkcije učestvuju u (1) jednačine se dele na dve osnovne klase jednačina: *algebarske* i *transcendentne* jednačine.

1. LOKALIZACIJA REŠENJA

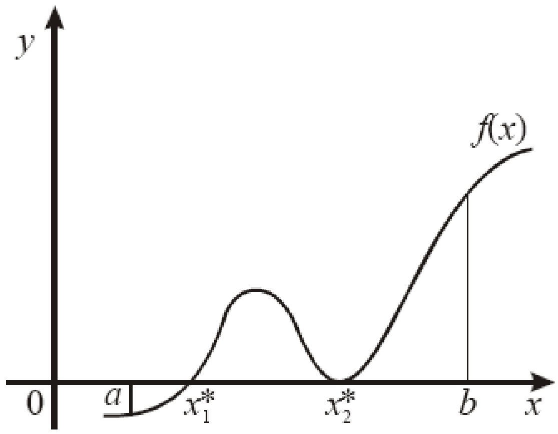
Lokalizacija ili razdvajanje rešenja jednačine (1) sastoji se u određivanju odsečaka $[a,\ b]$ u oblasti dopustivih vrednosti koji sadrže jedno i samo jedno rešenje te jednačine. (Imaćemo u vidu, ako drugačije ne naglasimo, samo realna rešenja.) Ako $[a,\ b]$ sadrži jedno i samo jedno rešenje, onda ćemo reći da je to rešenje *izolovano*.

Za dalje izlaganje biće nam potrebne sledeće, opšte poznate, teoreme.

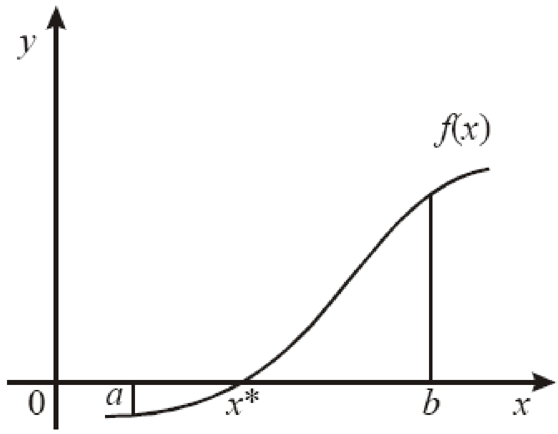
Teorema 1. Ako je $f(x) \in C[a,b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda jednačina

$$f(x) = 0$$

ima bar jedno rešenje $x^* \in (a,b)$ (sl. 1).



Sl. 1



Sl. 2

Teorema 2. Ako je $f(x) \in C[a,b]$ i monotona na $[a,\ b]$ i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda jednačina $f(x) = 0$ ima jedno i samo jedno rešenje $x^* \in (a,b)$ (sl. 2).

Teorema 2'. Ako je $f(x) \in C[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i ako postoji $f'(x),\ x \in (a,b)$ i konstantnog je znaka, onda jednačina $f(x) = 0$ ima jedno i samo jedno rešenje $x^* \in (a,b)$.

Dokazi ovih teorema mogu se naći u svakom kompletnijem udžbeniku matematičke analize.

Proces lokalizacije rešenja jednačine $f(x) = 0$ počinjemo određivanjem znakova funkcije $f(x)$ na krajevima oblasti dopustivih vrednosti posmatrane jednačine. Zatim, određujemo znakove funkcije $f(x)$ u nizu tačaka $x = a_1, a_2, \ldots \in X$. Ove tačke se biraju u zavisnosti od osobina funkcije $f(x)$ (monotonost, konkavnost, ...). Ako se pokaže da je $f(a_k) \cdot f(a_{k+1}) < 0$, onda se na osnovu Teoreme 1. zaključuje da u intervalu (a_k, a_{k+1}) jednačina $f(x) = 0$

ima bar jedno rešenje. Da li je to rešenje izolovano ispituje se primenom Teoreme 2. ili Teoreme 2'. ili na neki drugi način. Često je praktično sužavanje intervala (a_k, a_{k+1}) deleći ga na dva, četiri, ... jednakih delova (do nekog koraka) i utvrđivanjem znaka funkcije $f(x)$ u tačkama podele.

Primer 1. Lokalizovati rešenja jednačine

$$f(x) \equiv 8x^3 - 12x^2 - 26x + 15 = 0 .$$

Rešenje. Sastavimo sledeću tabelu

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
znak $f(x)$	–	–	+	+	–	–	+	+

Zaključujemo da jednačina ima tri realna rešenja; ta rešenja su u intervalima (–2, –1), (0, 1) i (2, 3). Koristeći poznatu činjenicu da algebarska, polinomijalna jednačina s realnim koeficijentima n–tog stepena ima n rešenja (računajući i njihovu višestrukost) zaključujemo da su intervali (–2, 1), (0, 1) i (2, 3) u isto vreme i intervali izolacije rešenja posmatrane jednačine. ▲

2. METODA POLOVLJENJA ODSEČKA

Ideja ove metode sastoji se u sužavanju odsečka $[a, b]$ koji sadrži izolovano rešenje x^*.

Neka je data algebarska ili transcendentna jednačina

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

gde je $f(x) \in C[a_0, b_0]$ i $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Neka je $x^* \in [a_0, b_0]$ izolovano rešenje jednačine (1). Podelimo odsečak $[a_0, b_0]$ na dva jednaka dela $\left[a_0, \frac{1}{2}(a_0 + b_0)\right]$ i $\left[\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0\right]$. Ako je $f\left(\frac{1}{2}(a_0 + b_0)\right) = 0$, onda je $\frac{1}{2}(a_0 + b_0) = x^*$ traženo rešenje jednačine (1). (U opštem slučaju to se vrlo retko može dogoditi.) Ako je $f\left(\frac{1}{2}(a_0 + b_0)\right) \neq 0$, onda biramo onaj od odsečaka $\left[a_0, \frac{1}{2}(a_0 + b_0)\right]$ i $\left[\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0\right]$ na čijim krajevima $f(x)$ ima različite znakove, tj. biramo onaj od odsečaka koji sadrži x^*. Označimo taj odsečak sa $[a_1, b_1]$. Podelimo odsečak $[a_1, b_1]$ na dva jednaka dela $\left[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)\right]$ i $\left[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1\right]$. Ako je $f\left(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)\right) = 0$, onda je $\frac{1}{2}(a_0 + b_0) = x^*$ traženo rešenje jednačine (1). (U opštem slučaju to se vrlo retko može dogoditi.) Ako je $f\left(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)\right) \neq 0$, onda biramo onaj od odsečaka $\left[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)\right]$ i $\left[\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0\right]$ na čijim krajevima $f(x)$ ima različite znakove, tj. biramo onaj odsečak koji sadrži x^*. Označimo taj odsečak sa $[a_2, b_2]$. Postupak deljenja se nastavlja na isti način. Tako dobijamo beskonačan niz umetnutih (iščezavajućih) odsečaka

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$$

takvih da je

$$f(a_k) \cdot f(b_k) < 0, \quad x^* \in [a_k, b_k], \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Levi krajevi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ obrazuju monotono neopdajući i ograničeni niz, dakle,

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots < b_0,$$

a desni nerastući i ograničeni niz, dakle,

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_k \geq \ldots > a_0.$$

Iz monotonosti i ograničenosti ovih nizova sledi

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \alpha \text{ i } \lim_{k \to \infty} b_k = \beta$$

i uz to je $a_k \le \alpha \le \beta \le b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Budući da je

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) = 0\text{, tj } \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0,$$

imamo da je $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$, tj. $\alpha = \beta = x^*$ je jedinstvena tačka koja pripada umetnutim odsečcima $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Kako je $f(x)$ neprekidna funkcija, to prelaskom na limes u nejednakosti (2) dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)\cdot f(b_k) = f(\lim_{k\to\infty} a_k)\cdot f(\lim_{k\to\infty} b_k) = f(x^*)\cdot f(x^*) = f(x^*)^2 \le 0,$$

odnosno $f(x^*) = 0$, što znači da je x^* rešenje jednačine (1).

Za približno rešenje možemo uzeti $\overline{x} = a_k$ ili $\overline{x} = b_k$; pri tome važi ocena greške

$$0 \le x^* - a_k \le \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \quad\text{i}\quad 0 \le b_k - x^* \le \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0).$$

Međutim, bolje je uzeti

(3) $$\overline{x} = \overline{x}_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k);$$

tada je

(4) $$|x^* - \overline{x}| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0).$$

Ako x^* nije izolovano (dakle, jedino u početnom odsečku) rešenje jednačine (1), onda primenom ove metode možemo odrediti jedno od tih rešenja jednačine (1).

Metoda je veoma jednostavna, ali s povećanjem tačnosti povećava se znatno obim računanja. Zbog toga, ova metoda se primenjuje, po pravilu, kada se ne zahteva velika tačnost. Približna vrednost rešenja dobijena ovom metodom često se uzima za početnu aproksimaciju tačnog rešenja kod primene nekih drugih metoda. Nedostatak metode je, svakako, što je njeno uopštavanje na višedimenzione slučajeve (dakle, na sisteme jednačina) praktično nemoguće.

Primer 1. Metodom polovljenja odsečka rešiti jednačinu

$$x^2 \log_{0.5}(x+1) = 1 .$$

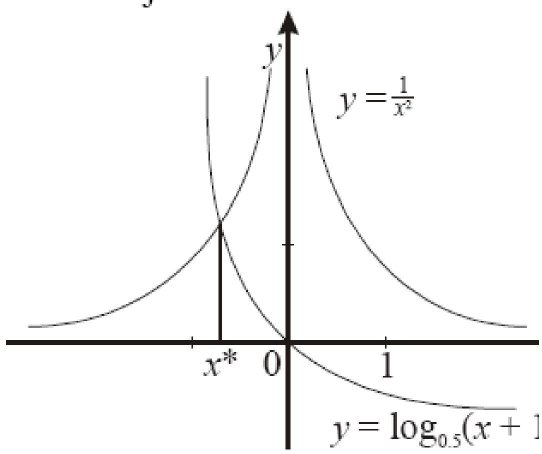
Tačnost $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Rešenje. Očigledno, $x = 0$ nije rešenje jednačine. Za $x \neq 0$ napišimo jednačinu u obliku

$$\log_{0.5}(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

i konstruišimo grafike funkcija (sl. 4)

$$y = \log_{0.5}(x+1) \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{x^2} .$$



Sl. 4

Jednačina ima jedno rešenje. Približna vrednost rešenja je –0.7. Iz sledeće tabe

x	–0.8	–0.6
znak $f(x)$	+	–

sledi $x^* \in [-0.8, -0.6]$. Broj k određujemo iz sledeće nejednakosti

$$\frac{1}{2^{k+1}}[-0.6-(-0.8)] \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} ;$$

odavde dobijamo $k \geq 5$. Radi preglednosti računanje je dato u sledećoj tabeli.

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$	znak $f(x)$
0	–0.800	–0.600	–0.700	–
1	–0.800	–0.700	–0.750	+
2	–0.750	–0.700	–0.725	–
3	–0.750	–0.725	–0.738	+
4	–0.738	–0.725	–0.731	+
5	–0.731	–0.725	–0.728	–
6	–0.731	–0.728	–0.730	

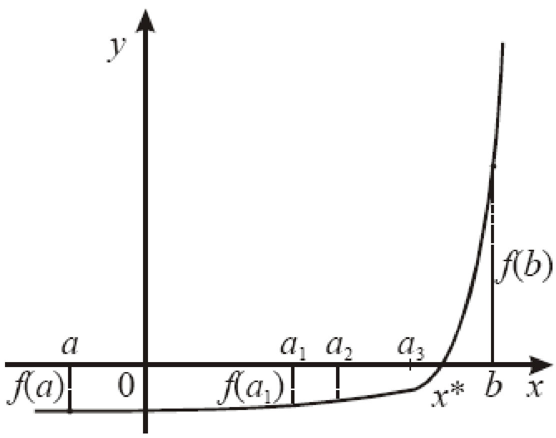
Traženo približno rešenje je $\overline{x} = -0.73$. ▲

3. METODA SEČICE

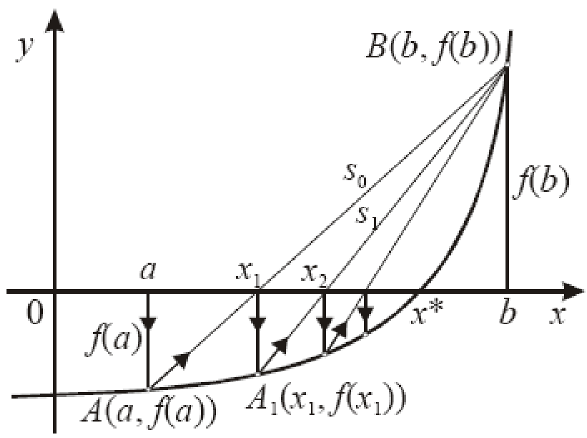
Neka algebarska ili transcendentna jednačina

(1) $$f(x) = 0,$$

ima na odsečku $[a, b]$ lokalizovano i izolovano rešenje (koren) x^*; dakle, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i $f(x^*) = 0$. Jedan od nedostataka, inače vrlo jednostavne metode polovljenja odsečka za rešavanje jednačine (1), je što se može desiti da je rešenje x^* vrlo blisko jednom od krajeva početnog odsečka $[a, b]$. U tom slučaju umetnuti odsečci u početku imaju jedan kraj fiksiran (sl. 5): $[a, b] \supset [a_1, b] \supset [a_2, b] \supset \ldots$, pa je konvergencija u početku nešto sporija. Bilo bi prirodnije početni odsečak (takođe, i sledeće umetnute odsečke) deliti u razmeri različitoj od 1:1, na primer u razmeri $f(a) : f(b)$.



Sl. 5



Sl. 6

Neka, dakle, jednačina (1) ima izolovano rešenje $x^* \in [a, b]$ i neka je, određenosti radi, $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pretpostavimo da je $f(x) \in C^2[a, b]$. Ideja metode sečice (u literaturi se sreće i pod nazivima: metoda proporcionalnih delova, metoda linearne interpolacije i metoda pogrešnog pravila („regula falsi")) sastoji se u tome da na odsečku $[a, b]$ luk krive $y = f(x)$ aproksimiramo odgovarajućim odsečkom sečice s_0 koja je određena tačkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ (sl. 6). Za približnu vrednost rešenja x^* uzimamo apscisu tačke u kojoj sečica s_0 seče osu Ox. Neka je $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ za $x \in [a, b]$. Jednačina sečice s_0, tj. sečice s_{AB} je

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Stavimo li $y = 0$ i $x = x_1$, dobićemo

$$x_1 = a - \frac{f(x)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

ili za $x_0 = a$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0)\,.$$

Tačka x_1 deli odsečak $[a, b]$ u razmeri $f(a) : f(b)$. Rešenje $x^* \in [x_1, b]$. Konstruišimo sečicu s_1 koja je određena tačkama $A_1(x_1, f(x_1))$ i $B(b, f(b))$. Jednačina sečice s_1, tj. s_{A_1B} je

$$\frac{y - f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{b - x_1}\,.$$

Stavimo li $y = 0$ i $x = x_2$, dobićemo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1)\,.$$

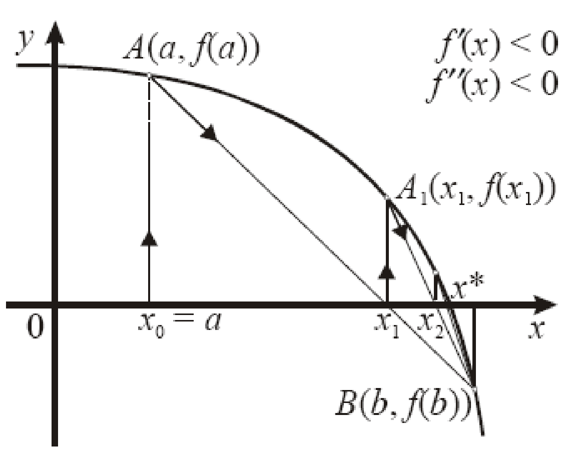
Tačka x_2 deli odsečak $[x_1, b]$ u razmeri $f(x_1) : f(b)$. Traženo rešenje $x^* \in [x_2, b]$. Produžimo li ovaj proces na isti način, dobićemo

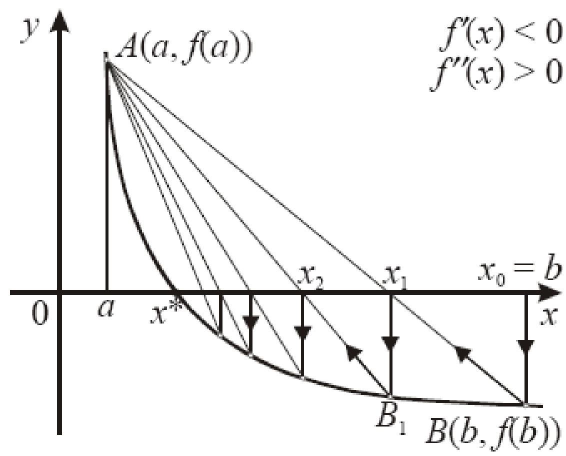
(2) $$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)\,, \quad x_0 = a\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Koristeći rekurentnu formulu (2) polazeći od $x_0 = a$ dobija se niz približnih rešenja (približavanja, aproksimacija, iteracija)

(3) $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x^* < b\,.$$

Niz (3) je monotono rastući i ograničen; tačka b je nepokretni kraj.
Do istog rezultata se dolazi ako je $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) < 0$ za $x \in [a, b]$; za to je dovoljno posmatrati ekvivalentnu jednačinu $-f(x) = 0$ (sl. 7).





Neka je sada $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$ i $f''(x)>0$ za $x\in[a,b]$ (sl. 8). Na potpuno isti način dobija se sledeća rekurentna formula

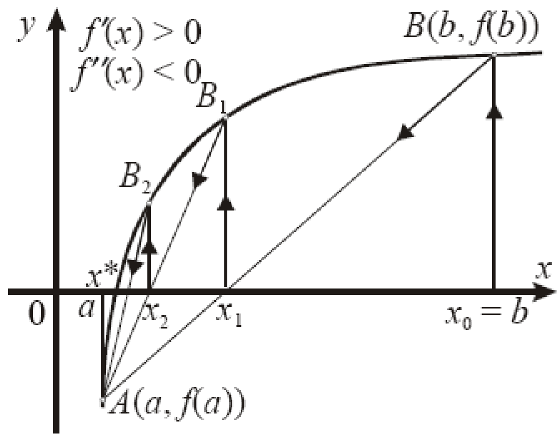
(4) $$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a)\,,\quad x_0=b\,,\quad n=0,1,2,\ldots}$$

i niz približnih rešenja (približavanja, aproksimacija, iteracija)

(5) $$a<x^*<\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots<x_2<x_1<x_0=b\,.$$

Niz (5) je monotono opadajući i ograničen; tačka a je nepokretni kraj.

Do istog rezultata se dolazi ako je $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0$ i $f''(x)<0$ za $x\in[a,b]$; za to je dovoljno posmatrati ekvivalentnu jednačinu $-f(x)=0$ (sl. 9).



Sl. 9

Rekurentna formula se bira koristeći sledeće pravilo:

1) nepokretan je onaj kraj odsečka $[a,b]$ za koji $f(x)$ i $f''(x)$ imaju isti znak;

2) niz približnih vrednosti x_n, $n=0,1,2,\ldots$ je s one strane tačnog rešenja x^* s koje $f(x)$ ima suprotan znak znaku $f''(x)$.

Kako je niz približnih vrednosti $x_n, n=0,1,2,\ldots$ (bilo da je određen relacijom (2) ili (4)) monoton i ograničen, to postoji

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{x}^*\,,\quad a<\overline{x}^*<b\,.$$

Ako pređemo na limese, na primer, u relaciji (2), dobićemo

$$\overline{x}^*=\overline{x}^*-\frac{f(\overline{x}^*)}{f(b)-f(\overline{x}^*)}(b-\overline{x}^*)\,,$$

odnosno $f(\overline{x}^*)=0$. Kako jednačina $f(x)=0$ ima na $[a,b]$ izolovano rešenje, to je $\overline{x}^*=x^*$.

Ako za približno rešenje uzmemo $\overline{x}=x_n$, onda tačnost možemo oceniti na sledeći način

$$\boxed{|x^*-x_n|\le\frac{|f(x_n)|}{m_1}\,,}$$

gde je $0<m_1\le|f'(x)|$ za $x\in[a,b]$. Najčešće se uzima da je $m_1=\min|f'(x)|$, $x\in[a,b]$.

Izvedimo još jednu ocenu tačnosti približnog rešenja x_n. Pretpostavimo da: 1) $f(x) \in C^1[a,b]$; 2) $f'(x)$ ne menja znak; 3) $[a,b]$ sadrži sve aproksimacije x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 4) važi nejednakost

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty .$$

Pođemo li od rekurentne formule

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot (b - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

imaćemo

$$-f(x_{n-1}) = \frac{f(b) - f(x_{n-1})}{b - x_{n-1}} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

i, budući da je $f(x^*) = 0$,

(6) $$f(x^*) - f(x_{n-1}) = \frac{f(b) - f(x_{n-1})}{b - x_{n-1}} \cdot (x_n - x_{n-1}) .$$

Primenom Lagranževe teoreme na funkciju $f(x)$ na odgovarajućim odsečcima dobijamo

$$(x^* - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) = \frac{(b - x_{n-1}) \cdot f'(\overline{x}_{n-1})}{b - x_{n-1}} \cdot (x_n - x_{n-1}),$$

$\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x^*)$ i $\overline{x}_{n-1} \in (x_{n-1}, b)$, odnosno

$$(x^* - x_{n-1}) \cdot f'(\xi_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) \cdot f'(\overline{x}_{n-1}) .$$

Sada nalazimo

$$x^* = x_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) \cdot \frac{f'(\overline{x}_{n-1})}{f'(\xi_{n-1})}$$

i

$$|x^* - x_n| = \frac{|f'(\overline{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|} \cdot |x_n - x_{n-1}| .$$

Kako je $0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < \infty$ za $x \in [a,b]$, to je

$$|f'(\overline{x}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})| \leq M_1 - m_1$$

i tražena ocena je

(7) $$\boxed{|x^* - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}| .}$$

Ako je $M_1 \leq 2m_1$ za $x \in [a, b]$, onda iz dobijene ocene (3) dobijamo

$$|x^* - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

odnosno, tačna je implikacija

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow |x^* - x_n| < \varepsilon,$$

gde je $\varepsilon, \varepsilon > 0$, zadata tačnost. Kaže se da „važi kriterijum poklapanja dveju uzastopnih aproksimacija".

Napomenimo da se na dovoljno malom odsečku $[a, b]$ uvek može postići da bude ispunjen uslov $M_1 \leq 2m_1$.

Inače, u opštem slučaju važi

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow |x^* - x_n| < \varepsilon.$$

4. NJUTNOVA METODA

Neka je data algebarska ili transcendentna jednačina

(1) $$f(x) = 0.$$

Pretpostavimo da jednačina (1) ima izolovano tačno rešenje x^*, $x^* \in [a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i da je $f(x) \in C^2[a, b]$. Neka su $f'(x)$ i $f''(x)$ za $x \in [a, b]$ konstantnog znaka. Ako je na neki način izračunata n–ta aproksimacija $x_n \in [a, b]$, $n \geq 0$, tačnog rešenja x^*, onda se naredna aproksimacija nalazi na sledeći način. Stavimo

(2) $$x^* = x_n + h_n,$$

gde je popravka h_n mala (jer je x_n blisko tačnom rešenju x). Primenom Tejlorove (Brook Taylor, 1685–1731) formule dobijamo

$$0 = f(x^*) = f(x_n + h_n) = f(x_n) + \frac{h_n}{1!} f'(x_n) + \frac{h_n^2}{2!} f''(x_n) + \ldots$$

ili, budući da je h_n malo, uzimajući samo prva dva člana

$$0 = f(x^*) = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + \frac{h_n}{1!} f'(x_n).$$

Pretpostavimo da je $f'(x_n) \neq 0$. Na taj način dobijamo popravku

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Sada je sledeća, $(n+1)$–va aproksimacija tačnog rešenja x^* jednaka $x_{n+1} = x_n + h_n$, tj.

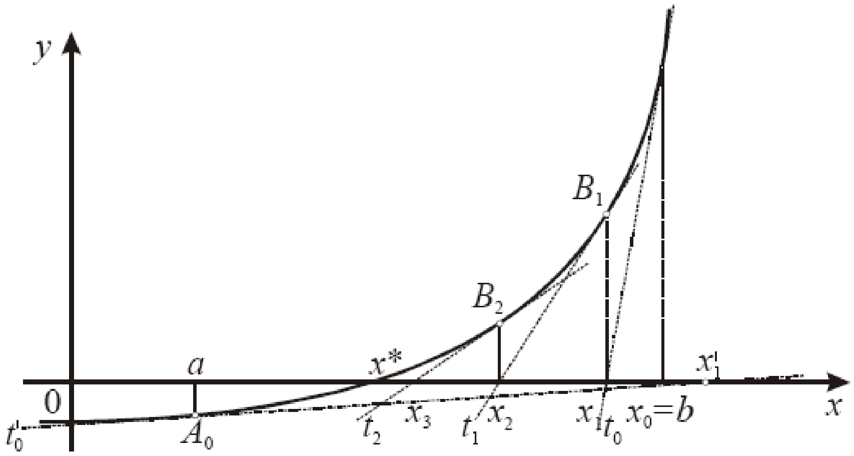
(3) $$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Primenom iterativne metode (3) dobija se niz približnih rešenja (aproksimacija, približavanja, iteracija) x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ... koji pod određenim uslovima konvergira ka tačnom rešenju x^*. (Metodu u ovom obliku je dao 1690. godine Rafson (Raphson), ali je Njutn (Isaac Newton, 1643–1727) nešto ranije predložio sličan postupak. U literaturi se sreće i pod nazivom Njutn–Rafsonova metoda. Inače, sličnim postupkom je Heron izračunao $\sqrt{a}$, $a > 0$.)

Geometrijska interpretacija Njutnove metode je sledeća: u okolini tačke $(x_n, f(x_n))$ luk krive $y = f(x)$ zamenjujemo odsečkom tangente t_n u toj tački (sl. 11). Za narednu aproksimaciju x_{n+1} rešenja x^* jednačine (1) uzima se apscisa presečne tačke tangente t_n i ose Ox (otuda i naziv metoda *tangente*). Određenosti radi pretpostavimo da je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ i $f''(x) > 0$ za $x \in [a, b]$. Izaberimo početnu aproksimaciju $x_0 = b$. Primetimo da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Konstruišimo tangentu t_0 na grafik krive $y = f(x)$ u tački $B_0(x_0, f(x_0))$. Jednačina tangente t_0 je jednaka

$$t_0: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Sl. 11

Stavimo li $y = 0$ i $x = x_1$ dobićemo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Konstruišimo tangentu t_1 na grafik krive $y = f(x)$ u tački $B_1(x_1, f(x_1))$. Jednačina tangente t_1 je jednaka

$$t_1: \; y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Stavimo li $y = 0$ i $x = x_2$ dobićemo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad f'(x_1) \neq 0.$$

Produžimo li ovaj proces na isti način dobićemo formulu (3).

Ako bismo za početnu aproksimaciju izabrali $x_0 = a$, onda bismo imali $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$ i tačka $x_1' \notin [a, b]$, tj. $x_0 = a$ ne bi bila „dobra" početna aproksimacija (v. sl. 11).

Pitanja izbora početne aproksimacije i konvergencije metode rešava sledeća teorema.

Teorema 1. Ako su ispunjeni sledeći uslovi: 1) funkcija $f(x)$ je definisana i neprekidna za svako $x \in [a, b]$, 2) $f(a) \cdot f(b) < 0$, 3) postoje izvodi $f'(x)$ i $f''(x)$ za svako $x \in [a, b]$ pri čemu je $f'(x) \neq 0$, $f'(x)$ i $f''(x)$ ne menjaju znak, 4) $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ za $x_0 \in [a, b]$, onda Njutnov iterativni proces definisan formulom (3) konvergira ka tačnom rešenju $x^* \in [a, b]$ jednačine (1).

Dokaz. Neka je, određenosti radi $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, a izvodi $f'(x)$ i $f''(x)$ su pozitivni za svako $x \in [a, b]$. (Ostali slučajevi se razmatraju na potpuno isti način.) Izaberimo početnu aproksimaciju $x_0 = b$. Očigledno je tada $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Metodom matematičke indukcije dokažimo da je $x_n > x^*$, dakle, $f(x_n) > 0$ za $n = 0, 1, \ldots$

Za $n = 0$ imamo $x_0 = b > x^*$, jer je $a < x^* < b$. Pretpostavimo da je za $n = k, k \geq 0, x_k > x^*$, i dokažimo da je $x_{k+1} > x^*$. Stavimo $x^* = x_k + (x^* - x_k)$ i primenimo Tejlorovu formulu na funkciju $f(x)$. Na taj način dobijamo

$$0 = f(x^*) = f(x_k + (x^* - x_k)) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2,$$

gde je $\xi \in [x^*, x_1]$. Budući da je $f''(x) > 0$, to je

$$f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) < 0,$$

odnosno

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} > x^*.$$

Kako je nejednakost $x_n > x^*$ tačna za $n = 0$ i iz pretpostavke da je tačna za $n = k, k \geq 0$, sledi da je tačna za $n = k + 1$, to je na osnovu principa matematičke indukcije nejednakost tačna za $n = 0, 1, \ldots$ Drugim rečima, niz $x_0 = b$, x_1, x_2, ..., x_n, ... je ograničen.

Monotonost niza sledi iz činjenice da je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

jer je $f(x_n) > 0$ i $f'(x_n) > 0$.

Iz ograničenosti i monotonosti niza sledi da postoji

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \tilde{x}.$$

Prelazeći na limes u iterativnoj formuli (3) dobijamo

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} x_n - \frac{f(\lim_{n \to \infty} x_n)}{f'(\lim_{n \to \infty} x_n)} \quad \text{ili} \quad \tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})},$$

Dakle, $f(\tilde{x}) = 0$, što znači da je $\tilde{x}$ rešenje jednačine (1). Kako po pretpostavci jednačina (1) ima jedinstveno rešenje na odsečku $[a, b]$, to je $\tilde{x} = x^*$, dakle

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*.$$

Za izbor početne aproksimacije x_0 rešenja x^* važi pravilo: za početnu aproksimaciju bira se onaj kraj odsečka $[a, b]$ u kojem je $\operatorname{sgn} f(x_0) = \operatorname{sgn} f''(x_0)$, dakle, $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Ako je funkcija $f(x)$ definisana i neprekidna za $x \in (-\infty, \infty)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ za $x \in [a, b]$, $f''(x)$ postoji svuda i konstantnog je znaka, onda je za početnu aproksimaciju moguće uzeti bilo koje $x_0 \in [a, b]$. Specijalno, uzima se $x_0 = a$ ili $x_0 = b$.

Ako je u okolini rešenja x^* $f'(x)$ veliko, onda je popravka $h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$ mala. Ako je $f'(x)$ malo, onda je popravka h_n velika i može doći do gubljenja tačnosti zbog deljenja brojem koji je blizak nuli. Ako je $f'(x)$ praktično jednako nuli (jednako nuli u granicama u kojim se računa ili stvarno jednako nuli), onda je izračunavanje nemoguće.

Za ocenu tačnosti približnog rešenja $\overline{x} = x_n$ može se koristiti opšta formula

$$\boxed{|x^* - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.} \tag{4}$$

Izvedimo formulu za ocenu greške približnog rešenja $\overline{x} = x_n$ u zavisnosti od dveju uzastopnih aproksimacija x_{n-1} i x_n. Stavimo $x_n = x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})$ i primenimo Tejlorovu formulu na funkciju $f(x)$. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned} \tag{5}$$

gde $\xi \in (x_{n-1}, x_n)$. Budući da je iz

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

to je

$$|f(x_n)| = \left| \frac{1}{2} f''(\xi)(x_n - x_{n-1})^2 \right| \le \frac{1}{2} M_2 (x_n - x_{n-1})^2,$$

gde je $M_2 = \max |f''(x)|$ za $x \in [a,b]$. Sada prema (4) dobijamo

$$\boxed{|x^* - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.} \tag{6}$$

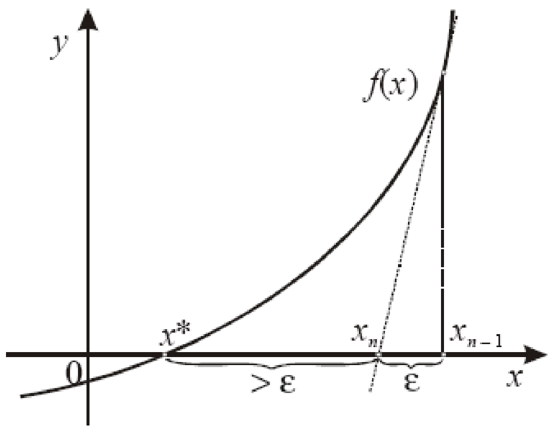
Ako Njutnov iterativni proces konvergira, onda $x_n - x_{n-1} \to 0$ kada $n \to \infty$, pa za $n \ge N$, N dovoljno veliko, imamo nejednakost

$$|x^* - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|,$$

dakle, ako je $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ i unapred zadata greška, onda je $|x^* - x_n| < \varepsilon$, tj. važi „kriterijum poklapanja dveju uzastopnih aproksimacija”. Naglasimo da u opštem slučaju ovaj kriterijum ne važi, tj. u opštem slučaju nije tačna implikacija

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \Rightarrow |x^* - x_n| < \varepsilon,$$

što je ilustrovano na sl. 12.



Sl. 12

Izvedimo formulu koja povezuje apsolutnu grešku dveju uzastopnih aproksimacija x_n i x_{n+1}. Iskoristićemo, opet, Tejlorovu formulu za funkciju $f(x)$. Na taj način iz jednakosti

$$0 = f(x^*) = f(x_n + (x^* - x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_n)^2,$$

$\xi \in (x^*, x_n)$, dobijamo

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

ili

$$x^* = x_{n+1} - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

pa je tražena formula

$$\boxed{|x^* - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1}(x^* - x_n)^2.} \tag{7}$$

Analizirajući formulu (7) zaključujemo da Njutnov iterativni proces brzo konvergira, ako je početna aproksimacija x_0 izabrana tako da bude ispunjen uslov

$$\frac{M_2}{2m_1}|x^* - x_0| \le q < 1,$$

dakle, ako je početna aproksimacija x_0 izabrana dovoljno blizo tačnom rešenju x^*. (Naravno, teško je reći šta znači – dovoljno blizo.) Specijalno, ako je $M_2 / 2m_1 < 1$ i $|x^* - x_n| \le 10^{-m}$, onda je $|x^* - x_{n+1}| \le 10^{-2m}$, tj. broj sigurnih cifara se udvostručuje na svakom koraku. Dakle, ako je $|x^* - x_n| < \varepsilon$, onda je $|x^* - x_{n+1}| < \varepsilon^2$.

Primer 1. Njutnovom metodom s tačnošću $\varepsilon = 0.00005$ rešiti jednačinu

$$f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Rešenje. Napišimo jednačinu u obliku

$$x^3 = 2x + 5$$

i grafički predstavimo funkcije $y = x^3$ i $y = 2x + 5$ (sl. 13). Jednačina ima jedno realno rešenje $x^* \in [1.9, 2.1]$; $f(1.9) = -1.941 < 0$ i $f(2.1) = 0.061 > 0$. Budući da je $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f''(2.1) = 12.6$ i $f(2.1) \cdot f''(2.1) > 0$, uzećemo za početnu aproksimaciju $x_0 = 2.1$. Uzastopne aproksimacije računamo koristeći sledeću formulu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Rezultati računanja dati su u sledećoj tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2.10000	0.06100	11.23000	–0.00543
1	2.09457	0.00021	11.16167	–0.00002
2	2.09455	–0.00002	11.16142	0.00000
3	2.09455			

Traženo približno rešenje je $\overline{x} = x_3 = 2.0946$. ▲

5. MODIFIKACIJE NJUTNOVE METODE

Jedan nedostatak Njutnove metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

je što se može desiti da je $f'(x_n)$ vrlo malo, pa tada zbog deljenja malim brojevima dolazi do gubljenja tačnosti. Taj nedostatak se može otkloniti sledećom modifikacijom Njutnove metode.

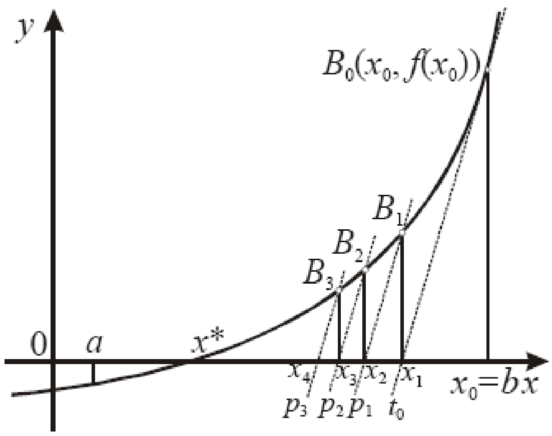
Neka jednačina

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

ima izolovano rešenje $x^* \in [a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, i neka je funkcija $f(x) \in C^2[a, b]$. Ako se izvod $f'(x)$ malo menja na odsečku $[a, b]$, tada se modifikacija sastoji u primeni iterativne formule

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \ldots} \tag{2}$$

Geometrijska interpretacija ovako modifikovane Njutnove metode data je na sl. 15. Tangente t_n u tačkama $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 1, 2, \ldots$ zamenjuju se pravima p_n, $n = 1, 2, \ldots$, koje su paralelne tangenti t_0 u tački $B_0(x_0, f(x_0))$. Niz $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ konstruisan na ovaj način konvergira ka tačnom rešenju x^* pod pretpostavkom da $f'(x)$ i $f''(x)$ ne menjaju znak na odsečku $[a, b]$ i da je početna aproksimacija izabrana tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Ova modifikacija se koristi i kada je izračunavanje $f'(x)$ složenije.



Sl. 15

Primer 1. Modifikovanom Njutnovom metodom izračunati približno rešenje jednačine

$$f(x) \equiv x^2 - 1 - e^x = 0 .$$

Tačnost $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rešenje. Budući da je $f(-2)=2.865>0$ i $f(-1)=-0.368<0$, zaključujemo da odsečak [–2, –1] sadrži bar jedno rešenje jednačine. Budući da je $f'(x)$ konstantnog znaka na odsečku [–2, –1], to odsečak [–2, –1] sadrži samo jedno rešenje jednačine. Metodom polovljenja odsečka nalazimo da $x^* \in$ $\in (-1.125, -1.25)$. Kako je za $x=-1.25$ $f \cdot f''>0$, uzećemo za početnu aproksimaciju $x_0=-1.25$. Redom računamo:

$$x_1=-1.25-\frac{f(-1.25)}{f'(-1.25)}=-1.25-\frac{0.275995}{-2.78650}=-1.25+0.09905=-1.15095,$$

$$x_2=-1.15095-\frac{f(-1.15095)}{-2.78650}=-1.15095+\frac{0.0083498}{2.78650}$$
$$=-1.15095+0.00300=-1.14795.$$

Radi bolje preglednosti rezultate računanja zapisujemo u obliku sledeće tabele.

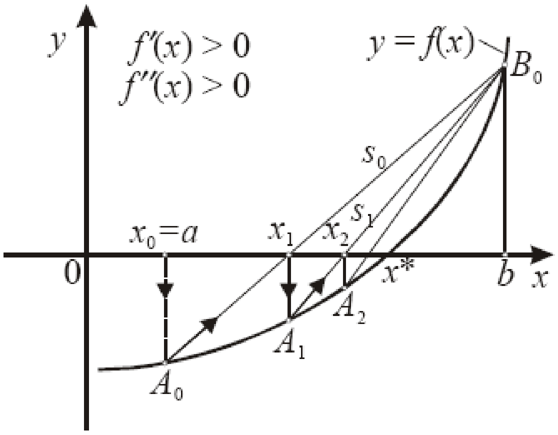
n	x_n	$f(x_n)$	$h_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
0	–1.25000	0.2759950	0.09905
1	–1.15095	0.0083498	0.00300
2	–1.14795	0.0005026	0.00018
3	–1.14777	0.0000322	0.00001
4	–1.14776	0.0000061	0.00000
5	–1.14776		

Traženo približno rešenje je $\overline{x}=-1.14776$. ▲

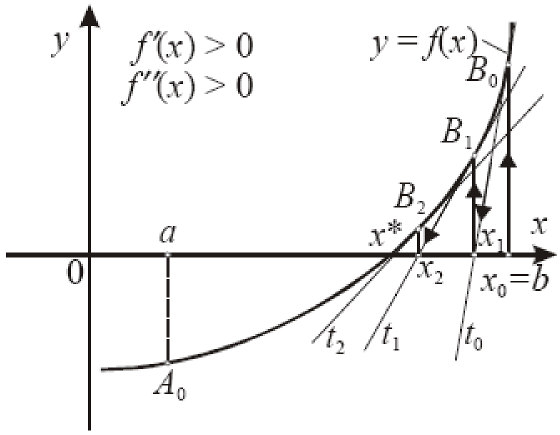
6. KOMBINOVANA METODA SEČICE I TANGENTE

Metodom sečice i metodom tangente dobijaju se približna rešenja jednačine $f(x)=0$ koja su s različitih strana tačnog rešenja. Zbog toga se ove dve metode mogu primeniti kombinovano i na taj način imamo novu metodu, *kombinovanu metodu*. Proces približavanja tačnom rešenju je brži, a ocena greške je znatno jednostavnija i pouzdana.

Neka jednačina $f(x)=0$ ima izolovano rešenje $x^*\in[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<$ <0. Pretpostavimo da postoje izvodi $f'(x)$ i $f''(x)$ i neka su konstantnog znaka na segmentu $[a,b]$. Moguća su sledeća četiri slučaja: 1) $f'(x)>0$, $f''(x)>0$; 2) $f'(x)<0$, $f''(x)<0$; 3) $f'(x)>0$, $f''(x)<0$; 4) $f'(x)<0$, $f''(x)>0$. Razmotrimo detaljnije prvi slučaj: $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. Pretpostavimo da je $f(a)<0$ i $f(b)>0$. Ako bismo primenili metodu sečice, imali bismo slučaj prikazan na sl. 17, a ako bismo primenili metod tangente (Njutnovu metodu), imali bismo slučaj prikazan na sl. 18.



Sl. 17

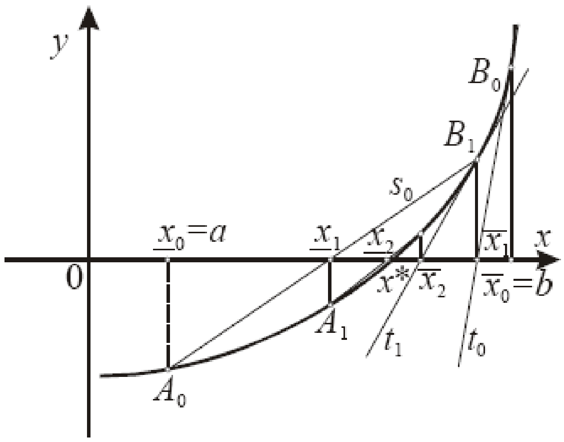


Sl. 18

Naizmeničnom primenom metode tangente i metode sečice, dakle, primenom iterativnih formula

$$(1)\qquad \boxed{\overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)},\quad \overline{x}_0=b,\quad n=0,1,2,\ldots}$$

$$(2)\qquad \boxed{\underline{x}_{n+1}=\underline{x}_n-\frac{f(\underline{x}_n)}{f(\overline{x}_{n+1})-f(\underline{x}_n)}(\overline{x}_{n+1}-\underline{x}_n),}$$



Sl. 19

dobijamo „gornji” niz približnih vrednosti $\{\overline{x}_n\}$ i „donji” niz približnih vrednosti $\{\underline{x}_n\}$. Očigledno, prvo se primenjuje metoda tangente (1), nezavisno od metode sečice. Zatim se primenjuje metoda sečice (2) na odsečku $[\underline{x}_n, \overline{x}_{n+1}]$. Proces približavanja tačnom rešenju x^* je prikazan na sl. 19. Tačno rešenje

$$x^* \in \ldots \subset [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \supset \ldots \supset [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \supset [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$$

i pri tome je $f(\underline{x}_n) \cdot f(\overline{x}_n) < 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dakle, imamo

(3) $$0 < x^* - \underline{x}_n < \overline{x}_n - \underline{x}_n \quad \text{i} \quad 0 < \overline{x}_n - x^* < \overline{x}_n - \underline{x}_n .$$

Kombinovana metoda je vrlo pogodna za primenu zbog jednostavne ocene greške. Proces računanja se prekida kada se postigne da je

$$\boxed{|\overline{x}_n - \underline{x}_n| < \varepsilon,}$$

gde je $\varepsilon > 0$ unapred zadata greška i tada se uzima da je

$$\boxed{x^* \approx x_n = \frac{1}{2}(\overline{x}_n + \underline{x}_n).}$$

7. METODA ITERACIJE

Može se primetiti da su prethodno razmatrane metode: metoda sečice, Njutnova metoda ili metoda tangente, modifikacije Njutnove metode sledećeg oblika

$$x_{n+1} = F(x_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gde je x_0 početna približna vrednost, početna aproksimacija tačnog rešenja x^* jednačine

$$f(x) = 0\,,$$

a funkcija $F(x)$ u svakom od ovih slučajeva ima određeni oblik. Tako je:

kod metode sečice

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f(b) - f(x)}(b - x) \quad \text{ili} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(a)}(x - a)\,;$$

kod Njutnove metode

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,;$$

kod modifikacija Njutnove metode

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \quad \text{ili} \quad F(x) = x - \frac{f(x) \cdot f'(x)}{1 + [f'(x)]^2}\,.$$

Očigledno, funkcija $F(x)$ je određena pomoću funkcije $f(x)$ ili pomoću funkcije $f(x)$ i njenog izvoda $f'(x)$. Jednačine

$$f(x) = 0 \quad \text{i} \quad F(x) = x$$

su ekvivalentne jednačine. Zbog toga možemo postaviti sledeće, potpuno prirodno pitanje konstrukcije opšte metode ovakvog oblika, dakle, metode čiji bi prethodne metode bile njeni posebni, specijalni slučajevi. Takva metoda je *metoda iteracije* ili *metoda uzastopnih, sukcesivnih aproksimacija*. Suština metode se sastoji u sledećem.

Neka je zadata jednačina

(1) $$f(x) = 0\,,$$

gde je $f(x) \in C[a, b]$ i neka odsečak $[a, b]$ sadrži tačno jedno rešenje x^* jednačine (1). Zapišimo jednačinu (1) u ekvivalentnom obliku

(2) $$\boxed{x = F(x)\,.}$$

Konstruišimo niz iteracija, niz približnih vrednosti $\{x_n\}$ rešenja x^* koristeći rekurentnu relaciju

$$\boxed{x_{n+1} = F(x_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots} \tag{3}$$

polazeći od početne iteracije, početne približne vrednosti $x_0 \in [a, b]$. Očigledno, da bismo izračunali član x_k niza $\{x_n\}$ dovoljno je poznavati samo jedan, njemu prethodni član – kaže se da imamo iterativni proces dužine jedan i metodu zovemo *metoda proste iteracije*, kraće, *metoda iteracije*. Nije teško definisati složenije metode iteracije, metode dužine dva, tri, ... Mi ćemo se baviti samo metodom iteracije dužine jedan, tj. metodom proste iteracije.

Ako niz iteracija konvergira, tj. ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

onda prelaskom na *limes* u relaciji (3) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n)\,,$$

odnosno

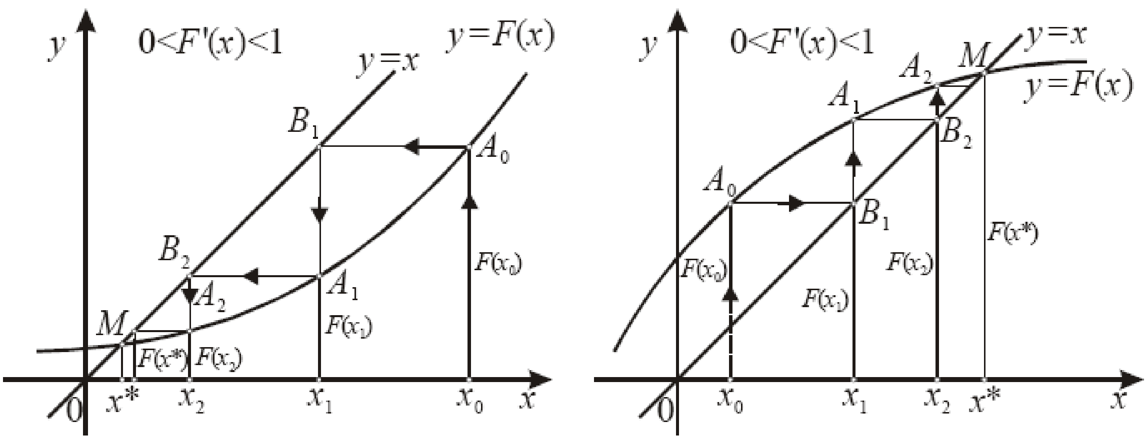
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = F(\lim_{n\to\infty} x_n)\,,$$

tj.

$$x^* = F(x^*)\,,$$

što znači da je x^* rešenje jednačine (2), odnosno (1) i može biti izračunato s proizvoljnom, unapred zadatom tačnošću pomoću rekurentne formule (3).

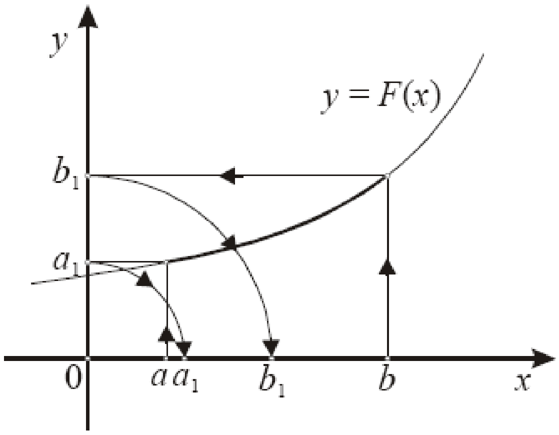
Metoda iteracije ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Konstruišimo u istom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy grafike funkcija $y = x$ i $y = F(x)$ (sl. 20). Tačno rešenje x^* je apscisa presečne tačke tih grafika.



Da bismo utvrdili kada iterativni proces konvergira, uvešćemo pojam sažimajućeg preslikavanja, sažimajuće funkcije ili kontrakcije. Dakle, neka je funkcija

$$y = F(x)$$

definisana na odsečku $[a, b]$. Svakoj tački $x \in [a, b]$ odgovara tačka y na ordinatnoj osi Oy – slika tačke x. Ako je $F(x)$ neprekidna funkcija na odsečku $[a, b]$, onda se na taj način dobija odsečak $[a_1, b_1]$ na ordinatnoj osi Oy – slika odsečka $[a, b]$ i pri tome je a_1 najmanja a b_1 najveća vrednost funkcije $F(x)$ (sl. 23)



Sl. 23

Ako ordinatnu osu Oy rotiramo za 90° u smeru kazaljke na satu tako da se ona poklopi s apscisnom osom Ox, odsečak $[a_1, b_1]$ će se preslikati takođe na istu, apscisnu osu. Ako je $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, onda kažemo da funkcija ili preslikavanje $F(x)$ preslikava odsečak $[a, b]$ u samog sebe. Tako, na primer, funkcija $y = \sqrt{x}$ preslikava odsečak $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$ u njegov deo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Definicija. Funkcija (preslikavanje) $y = F(x)$, koja odsečak $[a, b]$ preslikava u samog sebe, je *sažimajuća funkcija* ili *kontrakcija* ako postoji broj q, $0 \le q < 1$, takav da je za bilo koje dve tačke x' i x'' odsečka $[a, b]$ tačna nejednakost

(4) $$|F(x') - F(x'')| \le q\,|x' - x''|.$$

Primer 1. Funkcija $y = \sqrt{x}$, $x \ge 0$ je sažimajuća funkcija ili kontrakcija odsečka [1, 4]. Dokazati.

Rešenje. Za proizvoljne vrednosti x' i x'' odsečka [1, 4] je $\sqrt{x'} \ge 1$ i $\sqrt{x''} \ge 1$ i zbog toga je

$$|F(x') - F(x'')| = |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \le \frac{|x' - x''|}{1+1} = \frac{1}{2}|x' - x''|,$$

što znači da je funkcija $y = \sqrt{x}$ kontrakcija odsečka [1, 4] i pri tome je $q = \frac{1}{2}$. Odsečak [1, 4] se preslikava u njegov deo [1, 2]. ▲

Teorema 1. Neka je funkcija (2) sažimajuća ili kontrakcija odsečka $[a, b]$, tj. neka je ispunjen uslov (4). Tada, ako za iterativni proces (3) sve iteracije $x_n \in [a, b]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onda:

1) nezavisno od izbora početne iteracije $x_0 \in [a, b]$ iterativni proces (3) konvergira, tj. postoji

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n ;$$

2) granična vrednosti x^* je jedinstveno rešenje jednačine (2), odnosno (1) na odsečku $[a, b]$;

3) važi ocena greške

$$\boxed{|x^* - x_n| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.}$$

Koristi se i sledeća ocena:

$$\boxed{|x^* - x_n| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}|.}$$

Primer 3. Metodom iteracije s tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ izračunati približno rešenje jednačine

$$f(x) \equiv 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

koje pripada odsečku [0, 1].

Rešenje. Jednačinu $f(x) = 0$ treba zapisati u ekvivalentnom obliku $x = F(x)$. To je moguće učiniti na bezbroj načina, na primer:

1) $x = x + (5x^3 - 20 + 3)$, 2) $x = 5x^3 - 19x + 3$,

3) $x = \dfrac{1}{20}(5x^3 + 3)$, 4) $x = \sqrt[3]{\dfrac{20x-3}{5}}$, ...

Koju funkciju $F(x)$ treba koristiti za izračunavanje niza iteracija koji konvergira ka tačnom rešenju x^*? $F(x)$ treba izabrati tako da na odsečku $[a, b]$ bude ispunjen uslov $|F'(x)| = q < 1$; tada će iterativni proces konvergirati. U ovom slučaju uzećemo

$$F(x) = \frac{1}{20}(5x^3 + 3),$$

jer je

$$\max_{x\in[a,b]} |F'(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{3}{4}x^2\right| = \frac{3}{4} < 1.$$

Na taj način imamo sledeći iterativni proces

$$x_{n+1} = \frac{1}{20}(5x_n^3 + 3), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a za početnu iteraciju moćemo uzeti bilo koju vrednost iz segmenta [0, 1], na primer $x_0 = 0.5$. Kako je $q = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, ne važi „kriterijum poklapanja dveju uzastopnih iteracija".

Iz uslova

$$|x^* - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

imamo

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon,$$

odnosno

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-0.75}{0.75} \cdot 0.0001 = 0.000033\ldots,$$

pa proces iteracije treba prekinuti kada se postigne da je razlika dveju uzastopnih iteracija $|x_n - x_{n-1}| \le 0.00003$; tada će biti postignuta zadata tačnost. Računanje je dato u sledećoj tabeli

n	x_n	$x_{n+1} = F(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.50000	0.18125	0.31875
1	0.18125	0.15149	0.02976
2	0.15149	0.15087	0.00062
3	0.15087	0.15086	0.00001
4	0.15086		

Tražemo rešenje je $x^* \approx x_4 = 0.1509$. ▲