V NUMERIČKE METODE REŠAVANJA SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

0. UVODNE NAPOMENE

Neka je dat sistem linearnih algebarskih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

gde su koeficijenti a_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, i slobodni članovi b_i, $i=\overline{1,n}$, ili tačni ili približni brojevi a x_i, $i=\overline{1,n}$, nepoznate veličine. Uvedimo sledeće oznake: matricu sistema (1) označimo sa A, kolonu slobodnih članova sa $\overline{b}$ i sa $\overline{x}$ kolonu nepoznatih, tj.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix}.
$$

Sistem (1) možemo zapisati u matričnom obliku

$$Ax = b, \tag{1'}$$

ili u vektorskom obliku

$$A\overline{x} = \overline{b}, \tag{1''}$$

gde kolonu slobodnih članova i kolonu nepoznatih treba shvatiti kao vektor–kolone.

Rešenje sistema od n jednačina (atribute „algebarske“ i „linearne“ najčešće ćemo izostavljati) sa n nepoznatih je uređena n–torka brojeva, ako takva postoji (odnosno, vektor) koja uvršćena umesto nepoznatih, redom prva komponenta umesto prve, druga umesto druge, ..., n–ta umesto n–te nepoznate, pretvara taj sistem u tačne numeričke jednakosti. Rešiti dati sistem jednačina znači naći sva njegova rešenja, ako sistem ima rešenja ili utvrditi da sistem jednačina nema rešenja ako ih, zaista, nema.

Ako je $\overline{b} = \overline{0}$, sistem (1) je homogen i ima netrivijalno rešenje tada i samo tada kada je det $A = 0$. Ako je bar jedna komponenta b_i različita od nule, tj. bar jedan slobodni član različit od nule, sistem je nehomogen i ima jedinstveno rešenje tada i samo tada kada je det $A \neq 0$. Mi ćemo posmatrati nehomogene sisteme kod kojih je ispunjen uslov det $A \neq 0$.

Rešenje sistema (1) može se dobiti primenom Kramerovog pravila

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = \overline{1, n},$$

gde je $D = \det A$ determinanta sistem a D_i, $i = \overline{1, n}$, su determinante nepoznatih x_i, $i = \overline{1, n}$. Nepraktičnost primene Kramerovog pravila dolazi do potpunog izražaja već kod sistema jednačina za relativno malo n. (Npr. za $n = 8$ broj množenja i deljenja je reda 10^5). Rešenje sistema (1) se može dobiti i u matričnom obliku

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b},$$

gde je nalaženje inverzne matrice A^{-1} matrice A povezano s dobro poznatim teškoćama – broj računskih operacija je takođe velik.

Numeričke metode rešavanja sistema (1) se dele u dve osnovne grupe: tačne i iterativne. Pod tačnom metodom podrazumeva se metoda koja daje rešenje pomoću konačnog broja elementarnih aritmetičkih operacija. Broj tih operacija zavisi samo od oblika sheme računanja i reda sistema. Iterativna metoda daje rešenje kao graničnu vrednost niza uzastopnih aproksimacija, izračunatih nekim jednakoobraznim procesom računanja. Kod primene iterativnih metoda suštinska je, ne samo konstrukcija iterativnog procesa i konvergencija, nego i brzina konvergencije.

Ako su svi koeficijenti a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, i slobodni članovi b_i, $i = \overline{1, n}$, tačni brojevi, rešenje sistema se može dobiti sa proizvoljnim, unapred zadatim brojem m tačnih decimala. Računanje treba izvesti s $m + 1$ (a za velik broj nepoznatih sa $m + 2$ ili $m + 3$) decimalom. Izračunate nepoznate veličine treba zaokrugliti na m decimala.

Ako su koeficijenti a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, ili slobodni članovi b_i, $i = \overline{1, n}$, približni brojevi s najmanje p tačnih decimala, treba postupiti kao u prethodnom slučaju, gde je $m = p$.

1. GAUSOVA METODA – SHEMA JEDINSTVENOG DELJENJA

Istorijski je prva metoda; vrlo je jednostavna i prirodna. Sastoji se u uzastopnom eliminisanju nepoznatih (i zato se zove metoda eliminacije), odnosno transformisanju datog sistema u njemu ekvivalentan sistem, koji ima trougaonu matricu sistema – što predstavlja *direktan* hod. *Obrnut* hod je izračunavanje samih vrednosti nepoznatih x_i, $i=\overline{1,n}$.

Računski proces je pregledniji ako se koristi tzv. shema jedinstvenog deljenja. Za kontrolu računanja koristi se tzv. kontrolna kolona (kolona Σa_{ij}): 1) zbir elemenata u svakoj vrsti (bez elemenata u kontrolnoj koloni) jednak je elementu u kontrolnoj koloni, koji se dobija primenom istih računskih operacija na element kontrolne kolone, 2) ako u datom sistemu izvršimo smenu $x_i' = x_i + 1$, onda za određivanje veličina x_i' dobijamo sistem s istim koeficijentima i slobodnim članovima, koji su jednaki elementima u kontrolnoj koloni.

Za direktan hod potreban broj množenja i deljenja (bez kontrolne kolone) je

$$n(n+1)+(n-1)n+\cdots+1\cdot 2=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{3}\cdot n(n+1)(n+2)$$

i isto toliko oduzimanja. Za obrnut hod potrebno je $\dfrac{n(n-1)}{2}$ množenja i deljenja i isto toliko oduzimanja. Ukupan broj aritmetičkih operacija je

$$N=\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(n+2)+n(n-1)\,,$$

dakle broj računskih operacija je reda n^3.

Ako je neki od vodećih elemenata $a_{ii}=0$, onda treba permutovati vrste ili kolone tako da element u gornjem levom uglu na toj etapi računanja bude različit od nule. Dakle, celishodno je ovu metodu modifikovati ne određujući *a priori* redosled eliminacije nepoznatih.

Ako je neki od vodećih elemenata a_{ii} blizak nuli, onda dolazi do velikog gubljenja tačnosti, pa je i u tom slučaju celishodno metodu modifikovati u ranije navedenom smislu.

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum_j a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum_j a_{2j}$
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum_j a_{3j}$
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum_j a_{4j}$
1	1	$b_{12.0}$	$b_{13.0}$	$b_{14.0}$	$b_{15.0}$	$\sum_j b_{1j.0}$
2		$a_{22.1}$	$a_{23.1}$	$a_{24.1}$	$a_{25.1}$	$\sum_j a_{2j.1}$
3		$a_{32.1}$	$a_{33.1}$	$a_{34.1}$	$a_{35.1}$	$\sum_j a_{3j.1}$
4		$a_{42.1}$	$a_{43.1}$	$a_{44.1}$	$a_{45.1}$	$\sum_j a_{4j.1}$
2		1	$b_{23.1}$	$b_{24.1}$	$b_{25.1}$	$\sum_j b_{2j.1}$
3			$a_{33.2}$	$a_{34.2}$	$a_{35.2}$	$\sum_j a_{3j.2}$
4			$a_{43.2}$	$a_{44.2}$	$a_{45.2}$	$\sum_j a_{4j.2}$
3			1	$b_{34.2}$	$b_{35.2}$	$\sum_j b_{3j.2}$
4				$a_{44.3}$	$a_{45.3}$	$\sum_j a_{4j.3}$
4				1	$b_{45.3}$	$\sum_j b_{4j.3}$
4				1	x_4	x'_4
3			1		x_3	x'_3
2		1			x_2	x'_2
1	1				x_1	x'_1

Primer 1. Gausovom metodom, koristeći shemu jedinstvenog deljenja, rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina

$$3.67x_1 + 0.78x_2 + 0.89x_3 + 0.90x_4 = 2.90,$$
$$0.78x_1 + 3.56x_2 + 0.67x_3 + 0.78x_4 = 3.82,$$
$$0.89x_1 + 0.67x_2 + 3.45x_3 + 0.56x_4 = 2.24,$$
$$0.90x_1 + 0.78x_2 + 0.56x_3 + 3.34x_4 = 3.96.$$

Rešenje. Rešenje je dato sledećom tabelom

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	Σa_{ij}
1	3.67	0.78	0.89	0.90	2.90	9.14000
2	0.78	3.56	0.67	0.78	3.82	9.61000
3	0.89	0.67	3.45	0.56	2.24	7.81000
4	0.90	0.78	0.56	3.34	3.96	9.54000
1	1	0.21253	0.24251	0.24523	0.79019	2.49046
2		3.39423	0.48084	0.58872	3.20365	7.66744
3		0.48085	3.23417	0.34175	1.53673	5.59350 (49)
4		0.58872	0.34174	3.11929	3.24883	7.29858 (9)
2		1	0.14166	0.17345	0.94385	2.25896
3			3.16605	0.25835	1.08288	4.50728
4			0.25834	3.01718	2.69317	5.96869
3			1	0.081600	0.34203	1.42363
4				2.99610	2.60481	5.60091
4				1	0.86940	1.86940
4				1	0.86940	1.86940
3			1		0.27109	1.27109
2		1			0.75465	1.75465
1	1				0.35086	1.35086

Rešenje sistema je $\overline{x} = (0.3509, 0.7546, 0.2711, 0.8694)$. ▲

2. GAUSOVA METODA – SHEMA S IZBOROM GLAVNOG ELEMENTA

Izaberimo najveći po modulu element, kojeg ćemo zvati glavni element, matrice A sistema jednačina $A\overline{x} = \overline{b}$. Neka je to element a_{pq}. p–tu vrstu, vrstu koja sadrži glavni element a_{pq}, nazovimo glavnom vrstom, a q–tu kolonu glavnom kolonom. Izračunajmo množitelje

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}, \ i \neq p .$$

Izvedimo sada sledeće operacije s elementima proširene matrice sistema: svakoj vrsti, koja nije glavna, dodajmo glavnu vrstu pomnoženu odgovarajućim množiteljem m_i za tu vrstu. U rezultatu dobićemo novu matricu kod koje su u q–toj koloni nule iznad i ispod glavnog elementa. Odbacivši tu kolonu i glavnu vrstu dobićemo matricu $A^{(1)}$ koja ima jednu vrstu manje i jednu kolonu manje. Ponovimo li ovaj postupak ukupno $n-1$ put, dobićemo niz matrica

$$A, A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n-1)},$$

od kojih je poslednja dvočlana matrica–vrsta, koju uzimamo za glavnu.

Glavne vrste, posle izvršene prenumeracije, predstavljaju sistem jednačina s trougaonom matricom ekvivalentan polaznom sistemu. Obrnut hod je potpuno sličan obrnutom hodu kod sheme jedinstvenog deljenja.

Broj množenja i deljenja kod ove metode je takođe reda n^3.

Primer 1. Gausovom metodom, koristeći shemu s izborom glavnog elementa, rešiti sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}
0.36x_1 - 2.17x_2 + 1.32x_3 + 0.92x_4 &= 2.93, \\
0.45x_1 + 0.29x_2 + 1.43x_3 + 0.24x_4 &= 1.35, \\
1.41x_1 + 0.77x_2 + 0.49x_3 + 0.37x_4 &= 0.76, \\
0.92x_1 + 0.54x_2 + 2.23x_3 + 0.97x_4 &= 1.64.
\end{aligned}$$

Rešenje. Rešenje je dato sledećom tabelom

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	–0.59193	0.36	–2.17	1.32	0.92	2.93	3.36000
2	–0.64126	0.45	0.29	1.43	0.24	1.35	3.76000
3	–0.21973	1.41	0.77	0.49	0.37	0.76	3.80000
4		0.92	0.54	2.23	0.97	1.64	6.30000
1		–0.18458	–2.48964		0.34583	1.95923	–0.36916
2	–0.02261	–0.13996	–0.05628		–0.38202	0.29833	–0.27993 (4)
3	0.26162	1.20785	0.65135		0.15686	0.39964	2.41570
2	0.11710	–0.13579			–0.38984	0.25403	–0.27160 (58)
3		1.15956			0.24734	0.91221	2.31911 (2)
2					–0.36088	0.36085	–0.00003
2					1	–0.99992	0.00008
3		1				0.99997	1.99997
1			1			–0.99999	0.00000
4				1		0.99998	1.99998

Rešenje sistema je $\overline{x} = (1.0000, -1.0000, 1.0000, -0.9999)$. ▲

3. ŽORDANOVA SHEMA

Za razliku od Gausove metode – sheme s izborom glavnog elementa, gde smo u svakoj sledećoj etapi računanja imali jednu jednačinu manje, ovde ćemo zadržati uvek isti broj jednačina, ali kod izbora glavnog elementa neće učestvovati one vrste koje su već bile glavne.

Broj množenja i deljenja kod ove metode je isto reda n^3.

Primer 1. Koristeći Žordanovu shemu rešiti sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}1.48x_1 + 1.23x_2 + 1.34x_3 + 1.45x_4 &= 2.67\\ 1.04x_1 + 1.52x_2 + 1.16x_3 + 1.28x_4 &= 2.44\\ 1.13x_1 + 1.25x_2 + 1.58x_3 + 1.32x_4 &= 2.61\\ 1.26x_1 + 1.08x_2 + 1.14x_3 + 1.36x_4 &= 2.37\end{aligned}$$

Rešenje. Rešenje je dato sledećom tabelom

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	–0.84810	1.48	1.23	1.34	1.45	2.67	8.17000
2	–0.73418	1.04	1.52	1.16	1.28	2.44	7.44000
3		1.13	1.25	1.58	1.32	2.61	7.89000
4	–0.72152	1.26	1.08	1.14	1.36	2.37	7.21000
1	–0.28206	0.52165	0.16988		0.33051	0.45646	1.47850 (49)
2		0.21038	0.60228		0.31088	0.52379	1.64733 (2)
3	–2.07545	1.13000	1.25000	1.58000	1.32000	2.61000	7.89000
4	–0.29571	0.44468	0.17810		0.40759	0.48683	1.51720 (1)
1		0.46231			0.24282	0.30872	1.01385
2	–0.45506	0.21038	0.60228		0.31088	0.52379	1.64733
3	–1.49979	0.69337		1.58000	0.67478	1.52290	4.47105
4	–0.82730	0.38247			0.31566	0.33194	1.03007
1	–2.11553	0.46231			0.24282	0.30872	1.01385
2	–1.74577		0.60228		0.20038	0.38330	1.18596 (7)
3	–2.70605			1.58000	0.31060	1.05988	2.95048 (9)
4					0.11478	0.076536	0.19132 (1)
1		0.46231				0.14681	0.60912 (1)
2			0.60228			0.24969	0.85197 (6)
3				1.58000		0.85277	2.43277 (6)
4					0.11478	0.076536	0.19132
1		1				0.31756	1.31756
2			1			0.41457	1.41457
3				1		0.53973	1.53973
4					1	0.66681	1.66681 (4)

Rešenje sistema je $\overline{x} = (0.3176, 0.4146, 0.5397, 0.6668)$. ▲

4. GAUSOVA METODA – KOMPAKTNA SHEMA

Ova metoda se zasniva na činjenici da je matricu A sistema jednačina $A\overline{x} = \overline{b}$ moguće predstaviti u obliku proizvoda dveju trougaonih matrica B i C istih dimenzija koje ima matrica A, tj.

$$A = B \cdot C,$$

pri čemu jedna od njih, npr. matrica C, ima na glavnoj dijagonali fiksirane elemente, na primer jedinice (tada je to razlaganje jedinstveno). Formule za izračunavanje elemenata matrica B i C su

$$b_{ij}^{(2j-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}^{(2k-1)} c_{kj}^{(2k)}, \quad i \geq j,$$

$$c_{jm}^{(2j)} = \frac{a_{jm}^{(0)} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{jk}^{(2k-1)} c_{km}^{(2k)}}{b_{jj}^{(2j-1)}}, \quad m > j;$$

ove formule se primenjuju i za izračunavanje slobodnih članova i kontrolnih zbirova.

Shema za računanje ima sledeći oblik, npr. u slučaju sistema od četiri jednačine s četiri nepoznate.

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum$
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	Σa_{1j}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	Σa_{2j}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	Σa_{3j}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	Σa_{4j}
1	$b_{11}^{(1)}$ 1	$c_{12}^{(2)}$	$c_{13}^{(2)}$	$c_{14}^{(2)}$	$c_{15}^{(2)}$	$\Sigma c_{1j}^{(2)}$
2	$b_{21}^{(1)}$	$b_{22}^{(3)}$ 1	$c_{23}^{(4)}$	$c_{24}^{(4)}$	$c_{25}^{(4)}$	$\Sigma c_{2j}^{(4)}$
3	$b_{31}^{(1)}$	$b_{32}^{(3)}$	$b_{33}^{(5)}$ 1	$c_{34}^{(6)}$	$c_{35}^{(6)}$	$\Sigma c_{3j}^{(6)}$
4	$b_{41}^{(1)}$	$b_{42}^{(3)}$	$b_{43}^{(5)}$	$b_{44}^{(7)}$ 1	$c_{45}^{(8)}$	$\Sigma c_{4j}^{(8)}$
4				1	x_4	x_4'
3			1		x_3	x_3'
2		1			x_2	x_2'
1	1				x_1	x_1'

Formule za izračunavanje elemenata matrica B i C primenjuju se naizmenično; redosled primene je naznačen gornjim indeksom, pri čemu je 0–ti indeks u shemi ispušten.

Nepoznate veličine se dobijaju iz sistema jednačina

$$\boxed{x_i + \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}^{(2i)} x_k = c_{i,n+1}^{(2i)}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1.}$$

Primer 1. Gausovom metodom, koristeći kompaktnu shemu, rešiti sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}
3.00x_1 + 0.19x_2 + 0.78x_3 + 0.89x_4 &= 1.77,\\
0.27x_1 + 3.28x_2 + 0.42x_3 + 0.49x_4 &= 1.65,\\
0.75x_1 + 0.76x_2 + 3.36x_3 + 0.74x_4 &= 2.39,\\
0.12x_1 + 0.34x_2 + 0.45x_3 + 3.44x_4 &= 3.40.
\end{aligned}$$

Rešenje. Rešenje je dato sledećom tabelom

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	3.00	0.19	0.78	0.89	1.77	6.63000
2	0.27	3.28	0.42	0.49	1.65	6.11000
3	0.75	0.76	3.36	0.74	2.39	8.00000
3	0.12	0.34	0.45	3.44	3.40	7.75000
1	3.00000 1	0.063333	0.26000	0.29667	0.59000	2.21000
2	0.27000	3.26290 1	0.10721	0.12562	0.45686	1.68969
3	0.75000	0.71250	3.08861 1	0.13857	0.52515	1.66372
4	0.12000	0.33240	0.38316	3.30955 1	0.89925	1.89925
4				1	0.89925	1.89925
3			1		0.40054	1.40054
2		1			0.30095	1.30095
1	1				0.20002	1.20002

Rešenje sistema je $\overline{x} = (0.2000, 0.3010, 0.4005, 0.8993)$. ▲

5. IZRAČUNAVANJE DETERMINANATA

Gausova metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina može biti primenjena za izračunavanje determinanata. Ovde ćemo opisati računsku shemu zasnovanu na shemi jedinstvenog deljenja. Neka treba izračunati determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i neka je $a_{11} \neq 0$. Izvučemo li element a_{11} iz prve vrste, dobićemo

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gde je

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \; j \geq 2.$$

Ako sada oduzmemo od druge, treće, ..., n–te vrste prvu vrstu pomnoženu redom elementima a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}, dobićemo

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & \cdots & a_{2n.1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2.1} & \cdots & a_{nn.1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22.1} & \cdots & a_{2n.1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2.1} & \cdots & a_{nn.1} \end{vmatrix}$$

Dakle, dobili smo determinantu (n – 1)–vog reda. Ako postupak produžimo, dobićemo da je

$$D = a_{11} \cdot a_{22.1} \cdots a_{nn.n-1},$$

tj. vrednost determinante je jednaka proizvodu vodećih elemenata, gde je bitna pretpostavka da su svi vodeći elementi različiti od nule. Ako je na bilo kojem koraku vodeći element bio jednak nuli, onda treba permutovati vrste i kolone tako da bi element u gornjem levom uglu bio različit od nule. Permutovanje treba izvršiti i kad je vodeći element blizak nuli radi čuvanja tačnosti računanja.

Primer 1. Izračunati vrednost determinante

$$D=\begin{vmatrix} 1.46 & 1.41 & 1.29 & 1.43 \\ 1.21 & 2.40 & 2.18 & 2.48 \\ 0.29 & 1.19 & 2.14 & 2.33 \\ 1.19 & 1.61 & 1.70 & 5.46 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Rešenje je dato sledećom tabelom; korišćena je shema jedinstvenog deljenja.

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$\sum\limits_j a_{ij}$
1	1.46	1.41	1.29	1.43	5.59000
2	1.21	2.40	2.18	2.48	8.27000
3	0.29	1.19	2.14	2.33	5.95000
4	1.19	1.61	2.70	5.46	10.96000
1	1	0.96575	0.88356	0.97945	3.82876 (7)
2		1.23144	1.11089	1.29487	3.63720
3		0.90993	1.88377	2.04596	4.83966
4		0.46076	1.64856	4.29445	6.40377 (8)
2		1	0.90211	1.05151	2.95362
3			1.06291	1.08916	2.15207
4			1.23290	3.80996	5.04286
3			1	1.02470	2.02470
4				2.54661	2.54661
$D = 1.46 \cdot 1.23144 \cdot 1.06291 \cdot 2.54661 = 4.86659.$					

Dakle, vrednost determinante je 4.8666. ▲

Umesto eliminacije po vrstama moguća je eliminacija po kolonama.

Broj množenja i deljenja je $\dfrac{n-1}{3}(n^2+n+3)$.

6. ISTOVREMENO REŠAVANJE VIŠE SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA. IZRAČUNAVANJE INVERZNIH MATRICA

Direktne metode za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina mogu se primeniti za istovremeno rešavanje više sistema linearnih algebarskih jednačina koji imaju istu matricu sistema. Dakle, neka treba rešiti sledeće sisteme linearnih algebarskih jednačina.

$$A\overline{x}^{(1)} = \overline{b}^{(1)},\ A\overline{x}^{(2)} = \overline{b}^{(2)}, \ldots, A\overline{x}^{(k)} = \overline{b}^{(k)},\ \ k > 1, \tag{1}$$

gde je matrica ovih sistema jednačina

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

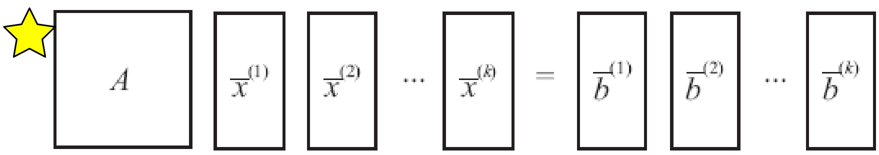
i pri tome je $\det A \neq 0$, desne strane su vektori

$$\overline{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix},\quad \overline{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad \overline{b}^{(k)} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

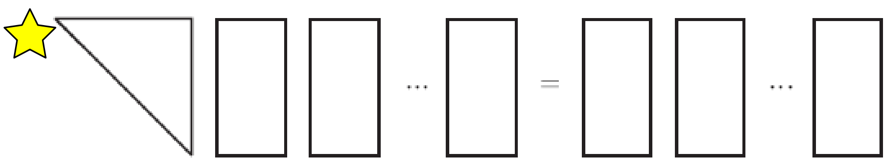
a nepoznati vektori su

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix},\quad \overline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad \overline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Sisteme jednačina (1) s kvadratnom matricom sistema A



treba transformisati u ekvivalentne sisteme jednačina s trougaonom matricom



što predstavlja direktan hod ili korak. Obrnutim hodom (korakom) nalazimo rešenja sistema jednačina.

Ilustrujmo postupak sledećim primerom.

Primer 1. Rešiti siteme linearnih algebarskih jednačina

$$1.48x_1 + 3.24x_2 + 1.27x_3 = 1.51, \qquad 1.48x_1 + 3.24x_2 + 1.27x_3 = 4.74,$$
$$3.45x_1 + 1.25x_2 + 1.38x_3 = 1.47, \qquad 3.45x_1 + 1.25x_2 + 1.38x_3 = 4.81,$$
$$1.34x_1 + 1.42x_2 + 3.20x_3 = 1.41, \qquad 1.34x_1 + 1.42x_2 + 3.20x_3 = 5.03.$$

Primeniti Gausovu metodu eliminacije, shemu s izborom glavnog elementa. Računati sa četiri decimale.

Rešenje. Preglednosti radi računanje je dato u sledećoj tabeli.

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	–0.4290	1.48	3.24	1.27	1.51	4.74	12.2400
$\boxed{2}$		$\boxed{3.45}$	1.25	1.38	1.47	4.81	12.3600
3	–0.3884	1.34	1.42	3.20	1.41	5.03	12.4000
$\boxed{1}$			$\boxed{2.7038}$	0.6780	0.8794	2.6765	6.9377 (6)
3	–0.3456		0.9345	2.6640	0.8391	3.1618	7.5994
$\boxed{3}$				$\boxed{2.4297}$	0.5352	2.2368	5.2017
3				1	0.2203	0.9206	2.1409
1			1		0.2699	07591	2.0290 (1)
2		1			0.2402	0.7509	1.9911

Rešenje prvog sistema je $(0.240, 0.270, 0.220)^T$, a drugog $(0.751, 0.759, 0{,}921)^T$. ▲

Ovaj postupak se može primeniti za nalaženje inverznih matrica. Zaista, polazeći od jednakosti $A \cdot A^{-1} = E$, gde je E jedinična matrica, imaćemo n sistema jednačina i n^2 nepoznatih b_{ij}, tj.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}, \; i, j = \overline{1, n},$$

gde je δ_{ij} Kronekerov simbol, tj:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}.$$

Primer 2. Izračunati inverznu matricu A^{-1} matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.46 & 0.64 \\ 0.44 & 1.66 & 0.58 \\ 0.82 & 0.42 & 1.82 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Koristićemo Gausovu metodu eliminacije, shemu jedinstvenog deljenja. Računaćemo sa četiri decimale. Računanje je dato u sledećoj tabeli.

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	δ_{i1}	δ_{i2}	δ_{i3}	Σ
1	1.58	0.46	0.64	1	0	0	3.6800
2	0.44	1.66	0.58	0	1	0	3.6800
3	0.82	0.42	1.82	0	0	1	4.0600
1	1	0.2911	0.4051	0.6329	0	0	2.3291
2		1.5319	0.4018	–0.2785	1	0	2.6552
3		0.1813	1.4878	–0.5190	0	1	2.1501
2		1	0.2623	–0.1818	0.6528	0	1.7333
3			1.4402	–0.4860	–0.1184	1	1.8358 (9)
3			1	–0.3375	–0.08221	0.6943	1.2746 (7)
3			1	–0.3375	–0.08221	0.6943	1.2746
2		1		–0.09327	0.6744	–0.1821	1.3990
1	1			0.7968	–0.1630	–0.2283	1.4055

Tražena inverzna matrica je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7968 & -0.1630 & -0.2283 \\ -0.09327 & 0.6744 & -0.1821 \\ -0.3375 & -0.08221 & 0.6943 \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo li matricu A i A^{-1}, dobićemo

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0001 & -0.0001 \\ 0.0000 & 1.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9999 \end{bmatrix} = E. \ \blacktriangle$$

7. METODA KVADRATNIH KORENA

Ova metoda se koristi za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa simetričnom matricom sistema. Simetrična matrica A može biti predstavljena u obliku proizvoda dveju među sobom transponovanih matrica, tj.

$$A = T' \cdot T,$$

gde je

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \text{ i } T' = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & tn2 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo li matrice T' i T i izjednačimo li elemente matrice $T' \cdot T$ sa odgovarajućim elementima matrice A, dobićemo sistem jednačina za određivanje elemenata t_{ij} u zavisnosti od elemenata a_{ij}. Rešavanjem tog sistema dobijamo sledeće formule za izračunavanje elemenata t_{ij}:

$$\boxed{\begin{aligned} &t_{11} = \sqrt{a_{11}}\,, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}\,, \quad j > 1\,; \quad t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}\,, \quad 1 < i \le n\,, \\ &t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}\,, \quad i < j\,; \quad t_{ij} = 0\,, \quad i > j\,. \end{aligned}}$$

Polazni sistem jednačina ima jedinstveno rešenje, ako je $t_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, jer je tada

$$\det A = \det T' \cdot \det T = (\det T)^2 = (t_{11} \cdot t_{22} \cdot \dots \cdot t_{nn})^2 \neq 0\,.$$

Posle određivanja elemenata matrice T rešavamo sledeći sistem

$$T' \,\overline{y} = \overline{b}\,;$$

rešenje ovog sistema je

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}\,,$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}\,, \quad i > 1\,.$$

Zatim rešavamo sistem

$$T\,\overline{x} = \overline{y}\,;$$

rešenje ovog sistema je

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{t_{nn}}, \\ x_i &= \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ki} x_k}{t_{ii}}, \quad i < n. \end{aligned}}$$

Broj množenja i deljenja kod ove metode je $\frac{n}{6}(n^2 + 9n + 2)$, a broj korenovanja je n. Za kontrolu računskog procesa koristi se na uobičajen način kontrolna kolona, a čitav proces je pregledniji ako se koristi odgovarajuća shema računanja.

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\sum_j a_{ij}$
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum_j a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum_j a_{2j}$
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum_j a_{3j}$
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum_j a_{4j}$
i	t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	t_{i5}	$\sum_j t_{ij}$
1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	$\sum_j t_{1j}$
2		t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	$\sum_j t_{2j}$
3			t_{33}	t_{34}	t_{35}	$\sum_j t_{3j}$
4				t_{44}	t_{45}	$\sum_j t_{4j}$
x_j	x_1	x_2	x_3	x_4		
x'_j	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		

8. METODA ITERACIJE

Kod iterativnih metoda rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina

(1) $$A\bar{x} = \bar{b}$$

uopšte uzevši, polazi se od proizvoljnog, početnog vektora $\bar{x}^{(0)}$ – približnog rešenja ili aproksimacije sistema jednačina (1) i nalaze se vektori $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \ldots$ – sledeća približna rešenja ili aproksimacije koristeći rekurentnu formulu

(2) $$\boxed{\bar{x}^{(k+1)} = F_k(\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,}$$

gde je F_k funkcija koja, uopšte govoreći, zavisi od matrice A i vektora $\bar{b}$ sistema (1), rednog broja aproksimacije k i prethodnih aproksimacija $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}$. Metoda je prvog reda ako je

$$\boxed{\bar{x}^{(k+1)} = F_k(\alpha_k), \quad k = 0, 1, \ldots,}$$

dakle, ako F_k zavisi samo od $\bar{x}^{(k)}$; ako ne zavisi od k, onda je metoda stacionarna. Ako funkcija F zavisi linearno od svojih argumenata, metoda je linearna.

Najjednostavniji oblik je *metoda proste iteracije,* kratko, *metoda iteracije*. Metoda se sastoji u sledećem. Sistem jednačina (1) ćemo zapisati u sledećem, ekvivalentnom obliku

(3) $$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c},$$

gde je

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Neka je na neki način određeno početno približno rešenje, početna iteracija $\bar{x}^{(0)} = (\bar{x}_1^{(0)}, \bar{x}_2^{(0)}, \ldots, \bar{x}_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$. Sledeća približna rešenja, sledeće iteracije nalazimo koristeći rekurentnu formulu

(4) $$\boxed{\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Na taj način je dobijen niz približnih vednosti: $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(k+1)}, \ldots$ tačnog rešenja $\bar{x}$ sistema jednačina (3), odnosno (1). Ovaj niz pod određenim uslovima konvergira ka rešenju $\bar{x}^*$.

Potreban i dovoljan uslov konvergencije iterativnog procesa (4) za proizvoljno $\bar{x}^{(0)}$ daje sledeća teorema.

Teorema 1. Da bi iterativni proces (4) za rešavanje sistema jednačina (3) konvergirao potrebno je i dovoljno da su sve sopstvene vrednosti matrice B po apsolutnoj vrednosti manje od jedinice.

Dokaz videti, na primer, u knjizi: *Фаддеев, Фаддеева* – Вычислительные методы линейной алгебры, Moskva, 1960. □

Ako niz iteracija $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(k)}, \ldots$ ima graničnu vrednost

$$\bar{\xi} = \lim_{k\to\infty} \bar{x}^{(k)},$$

tada je ta granična vrednost rešenje sistema jednačina (3), odnosno (1), tj. $\bar{\xi} = \bar{x}^*$. Zaista, prelaskom na limes u jednakosti (4) dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}^{(k+1)} = B \cdot \lim_{k\to\infty} \bar{x} + \bar{c}\,, \quad \bar{\xi} = B\bar{\xi} + c\,, \quad \text{tj.} \quad \bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}\,.$$

Ovaj uslov konvergencije ima veliku teorijsku ali malu praktičnu vrednost. Naime, vrlo je teško proveriti da li je uslov ispunjen. Zbog toga ćemo navesti neke dovoljne uslove konvergencije. Ti uslovi će biti iskazani u odnosu na normu iterirajuće matrice *B*.

Najčešće se koriste sledeće norme:

1) $\| \bar{x} \|_{\mathrm{I}} = \| \bar{x} \|_m = \max_i | x_i |$, m – norma vektora,

$\| A \|_{\mathrm{I}} = \| A \|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, m – norma matrice;

2) $\| \bar{x} \|_{\mathrm{II}} = \| \bar{x} \|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, l – norma vektora,

$\| A \|_{\mathrm{II}} = \| A \|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, l – norma matrice;

3) $\| \bar{x} \|_{\mathrm{III}} = \| \bar{x} \|_k = |\bar{x}| = [(\bar{x}, \bar{x})]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, k – norma vektora,

$\| A \|_{\mathrm{III}} = \left[\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, k – norma matrice.

Koriste se i nazivi, redom: kubna, oktaedarska i sferna ili euklidska norma.

Teorema 2. Iterativni proces (4) za rešavanje sistema jednačina (3) za proizvoljno početno rešenje $\bar{x}^{(0)}$ konvergira ako je bilo koja kanonska norma matrice *B* manja od jedinice, tj. $\| B \| < 1$ je dovoljan uslov konvergencije.

Dovoljni uslovi konvergencije su:

$$\boxed{(\mathrm{I}) \quad \| B \|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | \le q_1 < 1\,,}$$

$$\text{(II)} \quad \| B \|_l = \max_j \sum_{i=1}^{n} | b_{ij} | \le q_2 < 1 ,$$

$$\text{(III)} \quad \| B \|_k = \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} | b_{ij} |^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le q_3 < 1 .$$

Greška se može oceniti na sledeći način:

$$\| \overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)} \| \le \frac{1 - \| B \|}{\| B \|} \cdot \varepsilon \Rightarrow \| \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} \| \le \varepsilon ,$$

naravno, $\| B \| < 1$.

Na potpuno isti način se dobija sledeća ocena greške

$$\| \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} \| \le \frac{\| B \|^k}{1 - \| B \|} \cdot \| \overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)} \| .$$

Ako se uzme da je $\overline{x}^{(0)} = \overline{c}$, što se najčešće radi, onda imamo

$$\| \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} \| \le \frac{\| B \|^{k+1}}{1 - \| B \|} \cdot \| \overline{c} \| .$$

Za primenu metode iteracije značajno je sistem jednačina (1) zapisati u ekvivalentnom obliku (3) tako da bude ispunjen neki od dovoljnih uslova konvergencije. To je uvek moguće uraditi. Posebno je pogodan slučaj kada su dijagonalni elementi matrice A dominantni po apsolutnoj vrednosti.

9. ZAJDELOVA METODA

Jedna od modifikacija metode proste iteracije je Zajdelova metoda. Osnovnu ideju je razradio Gaus 1843., a Zajdel je 1874. predložio metodu, pa se, ponekad, i naziva Gaus–Zajdelova metoda. Metoda se sastoji u sledećem: za izračunavanje $(k+1)$–ve aproksimacije komponente x_i vektora $\overline{x}^{(k+1)}$ koriste se već izračunate komponente $\overline{x}_1^{(k+1)}, \overline{x}_2^{(k+1)}, \ldots, \overline{x}_{i-1}^{(k+1)}$. Naime, iterativni proces za sistem jednačina

$$\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}$$

je definisan na sledeći način:

(1) $$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + c_i \,,$$

$i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ $\overline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ – proizvoljna, početna iteracija.

Sistem jednačina (1) možemo predstaviti u sledećem obliku

(2) $$\overline{x}^{(k+1)} = M\overline{x}^{(k+1)} + N\overline{x}^{(k)} + \overline{c} \,,$$

gde je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Iz (2) se dobija

(3) $$\boxed{\overline{x}^{(k+1)} = (E - M)^{-1} N \overline{x}^{(k)} + (E - M)^{-1} \overline{c} \,,}$$

što znači da je Zajdelova metoda ekvivalentna metodi proste iteracije s matricom $B = (E - M)^{-1} N$ i slobodnim članom $(E - M)^{-1}\overline{c}$.

Na taj način imamo: potreban i dovoljan uslov konvergencije je da su sve sopstvene vrednosti matrice

(4) $$\boxed{S = (E - M)^{-1} N}$$

po modulu manje od jedinice, tj. da su rešenja jednačine

(5) $$\det(S - \lambda E) = 0$$

manja od jedinice. Rešenja jednačine (5) se poklapaju s rešenjima jednačine

(6) $$\det\,(N - (E - M)\lambda) = 0 \,.$$

Dovoljni uslovi konvergencije Zajdelove metode i metode proste iteracije su isti.

Teorema. Ako matrica B sistema linearnih algebarskih jednačina

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c} \tag{7}$$

ispunjava uslov

$$\|B\|_m < 1, \quad \|B\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \tag{8}$$

tj. ako je m–norma manja od jedinice, onda Zajdelov iterativni proces konvergira ka jedinstvenom rešenju sistema (7) nezavisno od izbora početnog vektora $\bar{x}^{(0)}$.

a odavde se dobija i ocena

$$\boxed{\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\|_m \le \frac{\mu^k}{1-\mu} \cdot \|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\|_m,} \tag{21}$$

gde je

$$\boxed{\mu = \max_i \frac{\sum\limits_{j=i}^{n} |b_{ij}|}{1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|} \le \|B\|_m .}$$

Primer 1. Zajdelovom metodom rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}
4.00\,x_1 + 0.16\,x_2 + 0.32\,x_3 &= 1.06,\\
0.15\,x_1 + 5.00\,x_2 + 0.20\,x_3 &= 2.15,\\
0.18\,x_1 + 0.24\,x_2 + 6.00\,x_3 &= 3.72.
\end{aligned}$$

Rešenje. Napišimo sistem u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
x_1 &= - 0.04000x_2 - 0.08000x_3 + 0.26500,\\
x_2 &= - 0.03000x_1 - 0.08000x_3 + 0.43000,\\
x_3 &= - 0.03000x_1 - 0.04000x_2 + 0.62000.
\end{aligned}$$

Lako se proverava da će proces iteracije konvergirati. Rezultati računanja su dati u sledećoj tabeli.

	x_1	x_2	x_3	$\bar{b}$
A	4.00 0.15 0.18	0.16 5.00 0.24	0.32 0.20 6.00	1.06 2.15 3.72
B	0 –0.0300 –0.0300	–0.0400 0 –0.0400	–0.0800 –0.0400 0	0.2650 0.4300 0.6200
$\bar{x}^{(0)}$	0.2650	0.4300	0.6200	
$\bar{x}^{(1)}$	0.1982	0.3993	0.5981	
$\bar{x}^{(2)}$	0.2012	0.4000	0.5980	
$\bar{x}^{(3)}$	0.2012	0.4000	0.5980	

▲

15. MERA USLOVLJENOSTI MATRICA I SISTEMA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Posmatrajmo sistem linearnih algebarskih jednačina

(1) $$A\overline{x} = \overline{b}$$

gde je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrica sistema, $\overline{b} = [b_i]_{n\times 1}$ jednokolona matrica ili vektor slobodnih članova i $\overline{x} = [x_i]_{n\times 1}$ jednokolona matrica ili vektor nepoznatih.

Pretpostavimo da je sistem jednačina (1) nehomogen, tj. $\overline{b} \neq \overline{0}$. Kao što je poznato sistem jednačina (1) ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je $\det A \neq 0$ Ako je $\det A = 0$, tj. ako je matrica A sistema jednačina (1) *singularna*, onda za neke vektore $\overline{b}$ sistem jednačina (1) nema rešenje a za neke vektore $\overline{b}$ sistem jednačina (1) ima beskonačno mnogo rešenja.

Kao što smo videli tačno rešenje $\overline{x}^*$ sistema jednačina (1) nije moguće izračunati zbog približnosti koeficijenta a_{ij} matrice A ili slobodnih članova b_i $(i, j = \overline{1, n})$ i zbog uticaja grešaka zaokrugljivanja. Dobijeno približno rešenje $\overline{x}'$ sistema jednačina (1) možemo posmatrati kao tačno rešenje nekog drugog sistema jednačina

(2) $$A'\overline{x}' = \overline{b}',$$

gde je

(3) $$A = A' + \delta,\ \ \overline{b} = \overline{b}' + \overline{\eta},\ \ \overline{x}^* = \overline{x}' + \overline{\varepsilon}.$$

Međutim, prirodno se postavlja sledeće pitanje: Ako sistem jednačina (1) ima jedinstveno rešenje, da li sistem jednačina (2) ima jedinstveno rešenje? I obrnuto, ako sistem jednačina (2) ima jedinstveno rešenje, da li sistem jednačina (1) ima jedinstveno rešenje? Jasno je da iz činjenice da je $\det A \neq 0$ ne mora slediti da je $\det A' \neq 0$. Naravno, iz činjenice da je $\det A = 0$ ne mora slediti da je $\det A' = 0$. Dakle, možemo zaključiti da je rešenje $\overline{x}^*$ sistema jednačina (1) „osetljivo" na promene koeficijenata a_{ij} i slobodnih članova b_i sistema. Na neki način se nameće zaključak da je ta „osetljivost" veća ako je matrica A sistema jednačina (1) „bliža" singularnoj matrici i da bi det A mogla predstavljati neku meru regularnosti matrice A. Na žalost, odstupanje $\det A$ od nule ne može se uzeti za meru regularnosti matrice A. Naime, ako svaku jednačinu sistema pomnožimo konstantom $C \neq 0$, karakteristike sistema se neće bitnije promeniti ali će determinanta biti veća C^n puta.

Pouzdanu meru regularnosti daje tzv. *uslovljenost matrice.*

Prvo ćemo razmatrati sledeći primer.

Primer 1. Posmatrajmo sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & = & 37, \\ 7x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 51, \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 49. \end{array}$$

Ispitati uticaj malih promena elemenata matrice sistema ili slobodnih članova na postojanje rešenja sistema jednačina.

Rešenje. Determinanta sistema je

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

pa sistem jednačina ima jedinstveno rešenje. Inverzna matrica je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 26 & -15 & -4 \\ -15 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje sistema je

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -15 & -4 \\ -15 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 37 \\ 51 \\ 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Na taj način, ako su koeficijenti matrice A tačni brojevi, onda svaki nehomogeni sistem jednačina $A\overline{x} = \overline{b}$ ima jedinstveno rešenje i to rešenje se jednostavno nalazi. Međutim, ako se samo element $a_{11} = 5$ matrice A promeni za ε, onda ćemo imati

$$\det A(\varepsilon) = \begin{vmatrix} 5+\varepsilon & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 + 26\varepsilon,$$

i za $\varepsilon = -\dfrac{1}{26} = -0.03846... \approx -0.0385$ možemo smatrati da je matrica $A(\varepsilon)$ singularna i ne postoji $A^{-1}(\varepsilon)$. Dakle, ako su elementi a_{ij} matrice A zadati s tačnošću $0.03846... \approx 0.0385$, onda sistem jednačina $A\overline{x} = \overline{b}$ nema rešenje. Drugim rečima, mala izmena koeficijenata sistema dovodi do velike izmene rešenja sistema jednačina. Tako, na primer, determinanta sistema jednačina

$$\begin{aligned} 4.9615x_1 &+ 7x_2 &+ 6x_3 &= 37, \\ 7x_1 &+ 10x_2 &+ 8x_3 &= 51, \\ 6x_1 &+ 8x_2 &+ 9x_3 &= 49, \end{aligned}$$

je $D = -0.001$, tj. praktično jednaka nuli i sistem jednačina nema rešenja.

Rešenje sistema jednačina je „osetljivo" i na male promene slobodnih članova. Na primer, rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} 5x_1 &+ 7x_2 &+ 6x_3 &= 37.1, \\ 7x_1 &+ 10x_2 &+ 8x_3 &= 51, \\ 6x_1 &+ 8x_2 &+ 9x_3 &= 49. \end{aligned}$$

je $\overline{x} = (3.6, 0.5, 2.6)^{\mathrm{T}}$. ▲

Za kvantitativno karakterisanje zavisnosti greške $\overline{\varepsilon} = \overline{x}^* - \overline{x}'$ rešenja sistema jednačina od greške $\overline{\eta} = \overline{b} - \overline{b}'$ vektora slobodnih članova uvodi se pojam *uslovljenosti sistema* i *uslovljenosti matrice sistema*.

Neka je $\|\overline{x}\|$ norma vektora $\overline{x}$ i $\|A\|$ njom indukovana norma matrice A. Posmatrajmo količnike

$$\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|} = \frac{\|\overline{x}^* - \overline{x}'\|}{\|\overline{x}^*\|} \quad \text{i} \quad \frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|} = \frac{\|\overline{b} - \overline{b}'\|}{\|\overline{b}\|}. \tag{4}$$

Količnici (4) su, očigledno, analogoni relativnim greškama. Meru *uslovljenosti sistema* jednačina definisaćemo jednakošću

$$\mu = \sup_{\overline{\eta}} \left[\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|} : \frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|} \right] = \frac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{x}^*\|} \sup_{\overline{\eta}} \frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{\eta}\|}, \quad \|\overline{\eta}\| \le 1. \tag{5}$$

Budući da je

$$\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|} \le \frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|} \cdot \frac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{\eta}\|} \cdot \frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|} \le \mu \cdot \frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|},$$

to je

$$\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|} \le \mu \cdot \frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|} \quad \text{ili} \quad \frac{\|\overline{x}^* - \overline{x}'\|}{\|\overline{x}^*\|} \le \mu \cdot \frac{\|\overline{b} - \overline{b}'\|}{\|\overline{b}\|}. \tag{6}$$

Dakle, granica relativne greške približnog rešenja $\overline{x}'$ sistema jednačina $A\overline{x}=\overline{b}$ je proporcionalna relativnoj grešci desne strane, a koeficijent proporcionalnosti je uslovljenost sistema μ.

Kako izračunati uslovljenost sistema μ? Kako je $\overline{\varepsilon}=A^{-1}\cdot\overline{\eta}$, to je

$$\|\overline{\varepsilon}\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|\overline{\eta}\| \quad \text{i} \quad \frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{\eta}\|}\leq\|A^{-1}\|,$$

pa možemo uzeti da je

$$\sup_{\overline{\eta}}\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{\eta}\|}\leq\|A^{-1}\|$$

i zbog toga je

$$\mu=\frac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{x}^*\|}\cdot\|A^{-1}\|. \tag{7}$$

U nekim slučajevima pogodno je okarakterisati uočena svojstva sistema samo pomoću svojstava matrice sistema. Radi toga uvodimo meru *uslovljenosti matrice A*

$$\operatorname{cond}(A)=\sup_{\overline{b}}\mu .$$

Tada iz nejednakosti

$$\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|}\leq\mu\cdot\frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|}$$

dobijamo

$$\frac{\|\overline{\varepsilon}\|}{\|\overline{x}^*\|}\leq\operatorname{cond}(A)\cdot\frac{\|\overline{\eta}\|}{\|\overline{b}\|}. \tag{8}$$

Kako je

$$\sup_{\overline{b}}\frac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{x}^*\|}=\sup_{\overline{x}}\frac{\|A\overline{x}^*\|}{\|\overline{x}^*\|}\leq\|A\|,$$

to je

$$\operatorname{cond}(A)=\sup_{\overline{b}}\mu=\sup_{\overline{b}}\frac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{x}^*\|}\cdot\|A^{-1}\|\leq\|A\|\cdot\|A^{-1}\|.$$

Dakle, uslovljenost matrice A je broj

$$\boxed{\operatorname{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|.} \tag{9}$$

Za jediničnu matricu I je

$$\operatorname{cond}(I)=1,$$

a za singularnu matricu uzimamo da je

$$\operatorname{cond}(A)=\infty .$$

Iz

$$1 = \| I \| = \| A \cdot A^{-1} \| \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| = \operatorname{cond}(A)$$

očigledno je

$$\operatorname{cond}(A) \geq 1 .$$

Ako je $\operatorname{cond}(A)$ bliska jedinici, kaže se da je matrica *dobro uslovljena*. Ako je $\operatorname{cond}(A) \gg 1$, kaže se da je matrica *slabo uslovljena*, tj. bliska je singularnoj matrici.