ЈМФ-задаци за вежбу

Свођење на канонски облик

1. Следеће једначине свести на канонски облик:

   а) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$
   б) $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0$
   в) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$
   г) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$
   д) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$
   ђ) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$
   е) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$
   ж) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$

2. Следеће једначине свести на канонски облик у свакој од области у којој је разматрана једначина одређеног типа:

   а) $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$
   б) $yu_{xx} + u_{yy} = 0$
   в) $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)u_{yy} + \cos x u_y = 0$

3. Следеће једначине са константним коефицијентима свести на канонски облик и потом их упростити:

   а) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$
   б) $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$

Опште решење

1. Наћи опште решење следећих једначина:

   а) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$
   б) $xu_{xx} - yu_{yy} + \dfrac{1}{2}(u_x - u_y) = 0,$ у I квадранту
   в) $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
   г) $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x$

Кошијеви проблеми

1. Решити следеће Кошијеве проблеме

   а) $4y^2u_{xx} - 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{2y}{1+y^2}(2u_x + u_y) = 0$
   $u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u_y|_{y=0} = \varphi_1(x)$

   б) $a^2u_{xx} - 2au_{xt} + u_{tt} = \dfrac{4a^2}{l}u, \quad a, l = const$
   $u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$

   в) $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0$
   $u(x, -\cos x) = 1 + 2\sin x, \quad u_y(x, -\cos x) = \sin x$

   г) $u_{xy} + u_x = 0$
   $u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1$

   д) $u_{xy} = 0$
   $u|_{y=x^2} = 0, \quad u_y|_{y=x^2} = \sqrt{|\,x\,|}, \quad |\,x\,| < 1$

   ђ) $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0$
   $u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u_x|_{x=0} = \psi(y)$

   е) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$
   $u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x$

   ж) $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$
   $u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x^2$

   з) $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$
   $u|_{xy=1} = x^3, \quad u_x|_{xy=1} = 2x^2$

Гранични проблеми за једначине хиперболичког типа

1. Наћи решења следећих једначина која задовољавају наведене граничне и почетне услове

   а) $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x, \quad 0 < x < \pi, t > 0$

   $$\begin{cases} u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(\pi,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

   б) $u_{tt} = u_{xx} + x(x-l)t^2, \quad 0 < x < l, t > 0$

   $$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u(l,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

   в) $u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1, t > 0$

   $$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u_x(1,t) &= 0 \\ u(x,0) &= x(x-1) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

г) $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < 2, t > 0$

$$\begin{cases} u(0,t) &= 2t \\ u(2,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

д) $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, t > 0$

$$\begin{cases} u_x(0,t) &= 3 \\ u_x\Big(\dfrac{\pi}{2}, t\Big) &= t(t+1) \\ u(x,0) &= 3 \\ u_t(x,0) &= x + \sin x \end{cases}$$

2. Одредити закон слободног осциловања хомогене жице која је учвршћена на крајевима $x = 0$ и $x = l$, има у почетном тренутку облик $u(x,0) = \dfrac{16}{5}h\Big[\Big(\dfrac{x}{l}\Big)^4 - 2\Big(\dfrac{x}{l}\Big)^3 + \dfrac{x}{l}\Big]$ за довољно мало $h > 0$ и осцилује без почетне брзине.

3. Хомогена жица је учвршћена на крајевима $x = 0$ и $x = l$ и у почетном тренутку има облик параболе која је симетрична у односу на праву $x = \dfrac{l}{2}$. Одредити положај тачака жице у односу на праволинијски положај равнотеже ако нема почетне брзине.

4. Наћи закон осциловања жице дужине $l = 1m$ која је учвршћена на крајевима ако се зна да је $a = 100m/s$. У почетном тренутку жица је затегнута на средини за $h = 0,01m$ па пуштена без почетне брзине. На жицу делује спољашња сила $f(x,t) = p\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t$, где је $\omega = const, p = 0,01m/s^2$.

Гранични проблеми за једначине параболичког типа

1. Наћи решења следећих једначина која задовољавају наведене граничне и почетни услов

а) $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, t > 0$

$$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u\Big(\dfrac{\pi}{2}, t\Big) &= 0 \\ u(x,0) &= 2\cos x \end{cases}$$

б) $u_t = 36u_{xx} + \dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2, t > 0$

$$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u_x(2,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$$

в) $u_t = a^2 u_{xx} + 2x, \quad 0 < x < l, t > 0$

$$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u_x(l,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin\dfrac{\pi x}{2l} \end{cases}$$

г) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, t > 0$

$$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u_x(l,t) &= q, \quad q = const \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{cases}$$

2. Дата је хомогена жица дужине l, чија је бочна површина топлотно изолована. Наћи закон простирања температуре $u(x,t)$ кроз жицу ако се на њеним крајевима одржава стална температура $u(0,t) = u(l,t) = u_1$, а почетна температура жице је $u(x,0) = u_0(x) = Ax(l-x)$, $A = const$. Наћи $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

3. Један крај хомогеног штапа $x = 0$ је топлотно изолован, а други крај $x = l$ се одржава на сталној температури $u(l,t) = 0$. У почетном тренутку у штапу је стална температура u_0. Наћи закон ширења температуре.

Гранични проблеми за бесконачне области

1. Користећи Даламберову формулу решити следеће граничне проблеме

   а) $u_{tt} = u_{xx} + 6, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $$\begin{cases} u(x,0) &= x^2 \\ u_t(x,0) &= 4x \end{cases}$$

   б) $u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $$\begin{cases} u(x,0) &= x^2 \\ u_t(x,0) &= x \end{cases}$$

   в) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $$\begin{cases} u(x,0) &= \sin x \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

2. Решити класичан Кошијев проблем за једначину провођења топлоте

   а) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $u(x,0) = 2$

   б) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $u(x,0) = \sin x$

   в) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$
   $u(x,0) = \cos x$