СРЂАН ВУКМИРОВИЋ

ЗОРАН СТАНИЋ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ПРОЈЕКТИВНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

са применама у рачунарској графици

Математички факултет, Београд, 2003

Аутори:
др Срђан Вукмировић,
Зоран Станић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ПРОЈЕКТИВНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Прво издање.

Издавач:
Математички факултет, Студентски трг 16, Београд

За издавача:
др Александар Липковски

Рецензенти:
др Предраг Јаничић, доцент Математичког факултета у Београду
мр Александар Самарџић, асистент Математичког факултета у Београду

Припрема за штампу, цртежи и корице:
др Срђан Вукмировић, Зоран Станић

Штампа:
VESTA Company, Љешка 33, Београд

Тираж: 400.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

514.14(075.8)(076)

ВУКМИРОВИЋ, Срђан
Збирка задатака из пројективне геометрије: са применама у рачунарској графици / Срђан Вукмировић, Зоран Станић. – 1. изд. – Београд : Математички факултет, 2003 (Београд : Vesta Company). – III, *– 100 стр. : граф. прикази ; 24* cm

Тираж 400. – Библиографија: стр. 99–100.
ИСБН 86-7589-034-6

1. Станић, Зоран
а) Пројективна геометрија – Задаци б) Афина геометрија – Задаци
COBISS.SR-ID 110243852

ИСБН 86-7589-034-6

Садржај

Увод

Ова збирка задатака настала је на основу дела вежби из курса *Нацртна геометрија* које су аутори држали на Математичком факултету у Београду од 1997/8. године. Збирка се ослања на теоријске основе које се могу наћи у скрипти [10] или уџбенику [15].

Желели смо да покријемо онај део наставног садржаја за који не постоји литература на нашем језику. Такође, свесни значаја који хомогене координате имају у рачунарској графици, одлучили смо да, остајући у оквирима геометрије, један део збирке посветимо и тој теми. Део задатака из ове збирке је оригиналан, а остатак је преузет из разне геометријске литературе.

Неколико речи о садржају збирке. Део који се ради на вежбама је садржан у прве три главе. На почетку, у Глави 1, наводимо теоријске основе како бисмо обезбедили релативну затвореност садржаја збирке и увели ознаке. У Глави 2 обрађујемо реалну пројективну праву. Посебна пажња је посвећена разумевању хомогених координата и вези између афине и пројективне геометрије. Пројективна раван је обрађена у Глави 3. Као важна, истакнута је дуалност пројективних простора тачака и правих која се најбоље разумева проучавањем корелација. Мишљења смо, да читалац који има одређену геометријску интуицију и познаје линеарну алгебру може након разумевања прве две главе без већих проблема рачунати у пројективном простору било које димензије. Зато је у Глави 4 немного обрађен и пројективни простор.

Остатак збирке, мада чисто геометријски, је намењен евентуалним применама у рачунарској графици. Афине и изометријске трансформације дискутоване су у Глави 5, а пројекције у Глави 6. Глава 7 је комплетан увод у кватернионе и њихову везу са геометријом. Рецимо, ротације око праве у тродимензионом простору, објашњене су на два начина: матрично у Поглављу 5.3 и помоћу кватерниона у Поглављу 7.2.

Заслуга је проф. др. Неде Бокан у препознавању значаја хомогених координата у информатици и њиховом увођењу у садржај курса *Нацртна геометрија*. Њој се захваљујемо и на подршци и помоћи у писању ове збирке.

Др Предраг Јаничић и мр Александар Самарџић, као рецензенти, су низом сугестија и идеја утицали на садржај збирке, те се и њима захваљујемо.

Београд, октобар 2003.

Аутори

Глава 1

Основне дефиниције и теореме

Дефиниција 1.1 **Реални** n**–димензиони пројективни простор** $\mathbb{R}P^n$ је скуп класа еквиваленције релације $\sim$ простора $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\mathbf{0}\}$ дефинисане са

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \sim \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Класа еквиваленције X је **тачка** пројективног простора $\mathbb{R}P^n$, $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ су њене **хомогене (пројективне) координате**, док је $\mathbf{X}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ њен **вектор представник**.[1]

Пример пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ је афини простор $\mathbb{R}^n$ допуњен **бесконачно далеким** тачкама. Наиме, коначним тачкама $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ простора $\mathbb{R}^n$ одговарају тачке $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 1)$ простора $\mathbb{R}P^n$. Тачке облика $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 0)$ зовемо бесконачно далеким тачкама. Тада важи

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}P^n &= \{(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})\} = \\
&= \{(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}) \,|\, x_{n+1} \neq 0\} \cup \{(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 0)\} = \\
&= \Big\{\Big(\frac{x_1}{x_{n+1}} : \frac{x_2}{x_{n+1}} : \ldots : 1\Big)\Big\} \cup \{x_{n+1} = 0\} = \\
&= \mathbb{R}^n \cup \text{тачке бесконачно далеке хиперравни.}
\end{aligned}$$

[1] Теореме и нотација су углавном преузети из скрипте [10] где се могу пронаћи и докази теорема.

Напомена 1.1 Једнодимензиони пројективни простор $\mathbb{R}P^1$ зовемо **пројективна права**. Приметимо да на њој постоји једна бесконачно далека тачка са координатама $(1:0)$. Дводимензиони пројективни простор $\mathbb{R}P^2$ зовемо **пројективна раван** и на њој су све тачке облика $(x_1 : x_2 : 0)$, $x_1^2 + x_2^2 > 0$, бесконачно далеке и све оне чине **бесконачно далеку праву**. Уколико кажемо **пројективни простор**, не наводећи његову димензију, подразумеваћемо да је у питању простор $\mathbb{R}P^3$. У њему **бесконачно далека раван** садржи све бесконачно далеке тачке.

Други пример простора $\mathbb{R}P^n$ је потпростор хиперравни у $(n+1)$–димензионом векторском простору $\mathbb{R}^{n+1}$. **Хомогене координате хиперравни** $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ означавамо са $[a_1 : a_2 : \ldots : a_{n+1}]$.

Дефиниција 1.2 Нека су $X(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ координате произвољне тачке простора $\mathbb{R}P^n$ у једном (старом) координатном систему, а $X'(x_1' : x_2' : \ldots : x_{n+1}')$ координате исте тачке у другом (новом) пројективном координатном систему, тада је **промена координата** дата следећим формулама

$$\begin{array}{rcrcrcccr}
\lambda x_1 & = & t_{11}x_1' & + & t_{12}x_2' & + & \ldots & + & t_{1,n+1}x_{n+1}', \\
\lambda x_2 & = & t_{21}x_1' & + & t_{22}x_2' & + & \ldots & + & t_{2,n+1}x_{n+1}', \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\lambda x_{n+1} & = & t_{n+1,1}x_1' & + & t_{n+1,2}x_2' & + & \ldots & + & t_{n+1,n+1}x_{n+1}',
\end{array}$$

$\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, што краће записујемо

$$\lambda\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}',$$

где су $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ вектори представници редом тачака X и X', а $\mathbf{T} = (t_{ij})$ регуларна матрица формата $(n+1)\times(n+1)$ коју још зовемо и **матрица промене координата (матрица преласка)**.

Сваких $(k+1)$ тачака простора $\mathbb{R}P^n$ $(k < n)$ чији су вектори представници линеарно независни одређују јединствену **k-димензиону пројективну раван** простора $\mathbb{R}P^n$. Та раван је сама за себе пројективни простор димензије k. Она је задата са $n-k$ независних хомогених линеарних једначина по променљивима $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Тачке које припадају једнодименизоној пројективној равни (пројективној правој) зовемо **колинеарним**.

Дефиниција 1.3 За $(n+2)$ тачке пројективног простора кажемо да се налазе у **оптштем положају** ако су вектори представници сваких $(n+1)$ од њих линеарно независни.

Теорема 1.1 (**Основна теорема пројективне геометрије**) Постоји јединствен хомогени координатни систем простора $\mathbb{R}P^n$ у којем дате $(n+2)$ тачке у општем положају имају координате

$$\begin{array}{ll} A_1 & (1:0:0:\ldots:0), \\ A_2 & (0:1:0:\ldots:0), \\ \vdots & \\ A_{n+1} & (0:0:\ldots:0:1), \\ B & (1:1:\ldots:1:1). \end{array}$$

Напомена 1.2 Тачке A_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, из претходне теореме зовемо **базне тачке**, док је B **тачка јединице**.

Дефиниција 1.4 Ако су A, B, C и D различите колинеарне тачке $n-$димензионог пројективног простора, такве да за неке вредности $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ и векторе представнике тих тачака важи

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \;\; \mathbf{D} = \gamma\mathbf{A} + \delta\mathbf{B},$$

тада **дворазмеру** $(A, B; C, D)$ **тачака** A, B, C и D дефинишемо на следећи начин

$$(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}.$$

Уколико важи $(A, B; C, D) = -1$, кажемо да су тачке A, B, C и D **хармонијски конјуговане (спрегнуте)** и то означавамо са $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Напомена 1.3 Уколико су за тачке простора $\mathbb{R}P^n$ узете хиперравни, претходна дефиниција се једнако примењује. Из чињенице да се вектори $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ могу изразити преко вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ следи да су одговарајуће тачке колинеарне, а у случају хиперравни, да се одговарајуће хиперравни секу по равни димензије $(n-2)$. Приметимо и да дворазмера различитих тачака не може бити једнака нули, нити јединици.

Теорема 1.2 (**Особине дворазмере**) Дворазмера колинеарних тачака A, B, C и D простора $\mathbb{R}P^n$ не зависи од избора њихових вектора представника и важе једнакости *а*) $(A,B;C,D) = (C,D;A,B)$;

б) $(A,B;C,D) = (B,A;C,D)^{-1}$.

Дефиниција 1.5 За различите колинеарне тачке n–димензионог пројективног простора A, B, C и D кажемо да **пар тачака** A, B **раздваја пар тачака** C, D (што означавамо са $A, B \div C, D$), ако важи $(A,B;C,D) < 0$. Слично, **пар тачака** A, B **не раздваја пар тачака** C, D (што означавамо са $A, B \dotdiv C, D$), уколико је испуњено $(A,B;C,D) > 0$.

Напомена 1.4 Приметимо да ако за неке четири тачке важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, онда важи $A, B \div C, D$. Том приликом кажемо да тачке A и B **хармонијски раздвајају** тачке C и D.

Дефиниција 1.6 Пројективно пресликавање n–димензионог пројективног простора дато је формулама

$$\begin{array}{lclclclcl}
\lambda x'_1 & = & p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2 & + & \dots & + & p_{1,n+1}x_{n+1}, \\
\lambda x'_2 & = & p_{21}x_1 & + & p_{22}x_2 & + & \dots & + & p_{2,n+1}x_{n+1}, \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\lambda x'_{n+1} & = & p_{n+1,1}x_1 & + & p_{n+1,2}x_2 & + & \dots & + & p_{n+1,n+1}x_{n+1},
\end{array}$$

$\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, што матрично записујемо

$$\lambda \mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X},$$

где је $\mathbf{P} = (p_{ij})$ **матрица пресликавања**. Уколико важи $\det(\mathbf{P}) \neq 0$, тада горње формуле називамо **пројективном трансформацијом**. Пресликавања чија је матрица сингуларна називамо **дегенеративним**.[2]

Напомена 1.5 Домен и кодомен пројективног пресликавања не морају бити пројективни простори истог типа. Тако се, на пример, у Поглављу 3.2.2 бавимо пресликавањима скупа тачака пројективне равни на скуп правих и обратно.

Теорема 1.3 (**Особине пројективне трансформације**) Трансформација пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ је једнозначно одређена са $(n+2)$ тачке у општем положају и има следеће особине

а) бијекција је;

[2] Овом врстом пресликавања ћемо се посебно бавити у Глави 6.

б) чува двоpазмеру, па тиме и релацију раздвојености парова тачака;

в) k–димензионе равни простора $\mathbb{R}P^n$ пресликава у k–димензионе равни.

Теорема 1.4 Пројективни простори парне димензије нису оријентабилни, а простори непарне димензије јесу и у њима је оријентација дефинисана задавањем хомогених координата.

Дефиниција 1.7 Кажемо да трансформација $\lambda\mathbf{X}' = \mathbf{PX}$ пројективног простора непарне димензије **чува оријентацију**, уколико важи $\det(\mathbf{P}) > 0$. У супротном, кажемо да трансформација **не чува оријентацију** пројективног простора.

Дефиниција 1.8 Хиперповрш другог реда простора $\mathbb{R}P^n$ је скуп решења квадратне једначине

$$\mathbf{X}^T\mathbf{GX} = 0,$$

где је $\mathbf{G} = (g_{ij})$ симетрична **матрица хиперповрши**, формата $(n+1) \times (n+1)$. Уколико важи $\det(\mathbf{G}) = 0$, кажемо да је хиперповрш **дегенерисана**.

Теорема 1.5 За сваку хиперповрш другог реда постоји координатни систем такав да у њему она има свој **канонски облик**, то јест, да је матрица хиперповрши облика $\mathbf{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots 0)$.

Глава 2

Пројективна права

2.1 Хомогене координате и дворазмера

Задатак 2.1 Тачке $A_1(2:1)$, $A_2(3:1)$ и $B(4:1)$ дате координатама $(x_1 : x_2)$ одабране су, редом, за базне тачке $(1:0)$, $(0:1)$ и тачку јединице $(1:1)$ новог система хомогених координата $(x_1' : x_2')$. Одредити везу између старог и новог система хомогених координата.

Решење: Нека су $X(x_1 : x_2)$ и $X'(x_1' : x_2')$ координате произвољне тачке у старом, односно, новом координатном систему. Тада, на основу Дефиниције 1.2, за $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ важи једнакост

$$\lambda \mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}',$$

где су $\mathbf{X}(x_1, x_2)$ и $\mathbf{X}'(x_1', x_2')$ вектори представници тачака X и X', а $\mathbf{T} = (t_{ij})$ матрица промене координата. У развијеној форми, та једнакост је

$$\begin{array}{rclcl} \lambda x_1 & = & t_{11}x_1' & + & t_{12}x_2', \\ \lambda x_2 & = & t_{21}x_1' & + & t_{22}x_2'. \end{array}$$

Ово даје систем од шест једначина са седам непознатих:

$$\lambda_1 2 = t_{11}1 + t_{12}0, \quad \lambda_2 3 = t_{11}0 + t_{12}1, \quad \lambda_3 4 = t_{11}1 + t_{12}1,$$

$$\lambda_1 1 = t_{21}1 + t_{22}0, \quad \lambda_2 1 = t_{21}0 + t_{22}1, \quad \lambda_3 1 = t_{21}1 + t_{22}1.$$

Одатле је $t_{11} = 2\lambda_1$, $t_{12} = -6\lambda_1$, $t_{21} = \lambda_1$ и $t_{22} = -2\lambda_1$. Можемо узети, на пример, да је $\lambda_1 = 1$, па је тражена матрица промене координата

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 2.2 Ако су координате базних тачака и тачке јединице новог координатног система $(x_1' : x_2')$ у старом систему $(x_1 : x_2)$ редом $A_1'(a_{11} : a_{21})$, $A_2'(a_{12} : a_{22})$ и $B'(b_1 : b_2)$, одредити:

а) координате $(x_1' : x_2')$ у функцији од координата $(x_1 : x_2)$;

б) координате $(x_1 : x_2)$ у функцији од координата $(x_1' : x_2')$.

Задатак 2.3 Одредити афине координате базних тачака и тачке јединице пројективног система координата пројективне праве.

Задатак 2.4 На пројективној правој су дате тачке $A(0 : 1)$, $B(1 : 0)$, $C(1 : 1)$ и $D(3 : 2)$. Користећи Дефиницију 1.4, одредити дворазмеру $(A, B; C, D)$.

Задатак 2.5 На пројективној правој дате су различите тачке A, B и C. Доказати да, за произвољну вредност $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, постоји јединствена тачка D, таква да важи $(A, B; C, D) = \alpha$. Специјално, доказати да постоји јединствена тачка D, таква да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Задатак 2.6 На пројективној правој дате су тачке $A(1 : 0)$, $B(2 : 1)$ и $C(4 : 1)$. Одредити координате тачке X за коју важи $\mathcal{H}(A, X; B, C)$.

Решење: Важи (види Теорему 1.2)

$$\mathcal{H}(A, X; B, C) \Leftrightarrow (A, X; B, C) = -1 \Leftrightarrow (B, C; A, X) = -1.$$

Нека је

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{C}, \quad \mathbf{X} = \gamma\mathbf{B} + \delta\mathbf{C}.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} 1 &= 2\alpha + 4\beta, \\ 0 &= \alpha + \beta, \end{aligned}$$

одакле добијамо $\alpha = -\beta$, то јест, $\dfrac{\beta}{\alpha} = -1$. Даље је

$$-1 = (B, C; A, X) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = -1 : \frac{\delta}{\gamma},$$

одакле следи $\delta = \gamma$, што значи да је

$$\mathbf{X} = \gamma\mathbf{B} + \gamma\mathbf{C} = (6\gamma, 2\gamma).$$

Изаберемо ли, рецимо, $\gamma = \dfrac{1}{2}$, добијамо $X(3:1)$. □

Напомена 2.1 Уочимо да су афине координате тачака из претходног задатка $A(\infty)$[1], $B(2)$ и $C(4)$, па је у афином смислу, тачка $X(3)$ средиште дужи BC. Ово важи у општем случају, о чему говори Задатак 2.7. Да је дворазмера однос две афине размере (отуда и назив) објашњено је у Задатку 2.8.

Задатак 2.7 На допуњеној афиној правој дате су тачке $A(\infty) = (1:0)$, $B(b) = (b:1)$ и $C(c) = (c:1)$. Доказати да је тачка X, за коју важи $\mathcal{H}(A, X; B, C)$, средиште дужи BC.

Задатак 2.8 На афиној правој уведене су пројективне координате. Одредити афини смисао дворазмере $(A, B; C, D)$ тачака $A(x_1) = A(x_1 : 1)$, $B(x_2) = B(x_2 : 1)$, $C(x_3) = C(x_3 : 1)$ и $D(x_4) = D(x_4 : 1)$.

Решење: Треба, дакле, векторе који одговарају тачкама C и D изразити у зависности од вектора представника тачака A и B:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B},$$

односно

$$(x_3, 1) = \alpha(x_1, 1) + \beta(x_2, 1),$$

што даје

$$\begin{array}{lcccc} x_3 & = & \alpha x_1 & + & \beta x_2, \\ 1 & = & \alpha & + & \beta, \end{array}$$

[1] Тачком (∞) је афина права допуњена до пројективне праве, то јест, $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{(\infty)\}$

одакле добијамо

$$\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \beta = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Слично је

$$\mathbf{D} = \gamma \mathbf{A} + \delta \mathbf{B},$$

одакле добијамо

$$\gamma = \frac{x_4 - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \delta = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1},$$

па за дворазмеру важи:

$$(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4},$$

што значи да је у афином смислу дворазмера однос $\dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CB}} : \dfrac{\mathbf{AD}}{\mathbf{DB}}$. □

Задатак 2.9 Доказати да за различите тачке A, B, C, D и E пројективне праве важи

$$(A, B; C, D)(A, B; D, E)(A, B; E, C) = 1.$$

Задатак 2.10 На пројективној правој дате су различите тачке A, B, C и D. Доказати да на њој постоје тачке P и Q које хармонијски раздвајају и пар A, B и пар C, D ако и само ако пар C, D не раздваја пар A, B.

Упутство: Нека је $(x_1 : x_2)$ пројективни координатни систем, такав да у њему дате тачке имају координате $A(1:0), B(0:1), C(1:1), D(d:1), P(p:1), Q(q:1)$, где су d, p и q различити од нуле и међусобно различити бројеви. Тада је:

$$C, D \mathbin{\ddot{-}} A, B \Leftrightarrow (A, B; C, D) > 0 \Leftrightarrow d > 0.$$

Са друге стране, добијамо

$$(A, B; P, Q) = (C, D; P, Q) = -1 \Leftrightarrow -q = p = \sqrt{d}.$$

Ово значи да је услов постојања тачака P и Q које хармонијски раздвајају дате парове тачака еквивалентан услову $d > 0$, одакле следи тврђење. □

2.2 Трансформације пројективне праве

Задатак 2.11 Одредити формуле пројективне трансформације која тачке $A(0:1)$, $B(1:0)$ и $C(1:1)$ преводи редом у тачке $A'(1:-1)$, $B'(1:1)$ и $C'(1:3)$.

Упутство: У складу са Дефиницијом 1.6, закључујемо да је трансформација облика

$$\lambda \mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X},$$

где је $\mathbf{P} = (p_{ij})$ недегенерисана матрица, а $\lambda \neq 0$. Слично као у Задатку 2.1, долазимо до система од 6 једначина са 7 непознатих, чијим решавањем добијамо матрицу тражене трансформације:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Други начин за решавање овог задатка је дат у Задатку 2.16. □

Задатак 2.12 На пројективној правој дате су тачке $A(1:0), B(1:1)$ и $C(0:1)$. Одредити координате тачке D, такве да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, а затим одредити формуле трансформације која тачке A, B и C преводи редом у тачке A, B и D.

Задатак 2.13 Одредити формуле инверзне трансформације, трансформације

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & 3x_1 & + & 4x_2, \\ \lambda x_2' & = & 2x_1 & + & 3x_2. \end{array}$$

Задатак 2.14 Одредити инваријантне тачке трансформације

а) $$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & 2x_1 & - & x_2, \\ \lambda x_2' & = & x_1 & + & 4x_2; \end{array}$$

б) $$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & 2x_1 & + & 3x_2, \\ \lambda x_2' & = & 3x_1 & + & 2x_2; \end{array}$$

в) $$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & 2x_1 & - & x_2, \\ \lambda x_2' & = & 2x_1 & + & x_2. \end{array}$$

Решење: *а*) Тражимо тачке за чије координате важи $X = (x_1 : x_2) = (x_1' : x_2')$, то јест, решавамо систем

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1 & = & 2x_1 & - & x_2, \\ \lambda x_2 & = & x_1 & + & 4x_2. \end{array}$$

Он се краће записује са

$$\lambda \mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X},$$

одакле је

$$(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = 0.$$

Тривијално решење $(0 : 0)$ није тачка пројективне праве! Инваријантна тачка је представљена сопственим векторима матрице $\mathbf{P}$. Карактеристични полином $\chi_{\mathbf{P}}(\lambda)$, матрице $\mathbf{P}$ је

$$\chi_{\mathbf{P}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2.$$

Дакле, двострука сопствена вредност је $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Њој одговара сопствени вектор $(1, -1)$, а њему једина инваријантна тачка $A(1 : -1)$.

б) Слично као у претходном случају, добијају се инваријантне тачке $A_1(1 : 1)$ и $A_2(1 : -1)$.

в) У овом случају нема инваријантних тачака. □

Задатак 2.15 Записати трансформацију

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & 2x_1 & - & x_2, \\ \lambda x_2' & = & x_1 & + & 4x_2. \end{array}$$

у афиним координатама.

Решење: Дата трансформација у афиним координатама има облик

$$x' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 4x_2} = \frac{\dfrac{2x_1}{x_2} - \dfrac{x_2}{x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{4x_2}{x_2}} = \frac{2x - 1}{x + 4}.$$

□

Напомена 2.2 Свака пројективна трансформација у афиним координатама има облик
$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \;\; ad - bc \neq 0.$$

Задатак 2.16 Одредити формуле трансформације пројективне праве која тачке $A(1:-1), B(1:0)$ и $C(2:1)$ преводи редом у тачке $A'(0:1), B'(1:1)$ и $C'(1:-2)$.

Решење: Афине координате које одговарају датим хомогеним координатама су $A(-1), C(2)$, $A'(0), B'(1), C'(-\frac{1}{2}), B(\infty)$. Сада, трансформацију потражимо у облику

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}\,.$$

Из датих услова добијамо:

$$\begin{array}{lrcl} A \mapsto A': & 0 & = & \dfrac{-a+b}{-c+d}\,, \\ B \mapsto B': & 1 & = & \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d}\,, \\ C \mapsto C': & -\dfrac{1}{2} & = & \dfrac{2a+b}{2c+d}\,. \end{array}$$

Одавде је $b = c = a$ и $d = -8a$, то јест, за $a = 1$

$$x' = \frac{x+1}{x-8}\,.$$

Ово је тражена трансформација, али у афиним координатама. Повратком на пројективне, добијамо

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & x_1 & + & x_2, \\ \lambda x_2' & = & x_1 & - & 8x_2. \end{array}$$

□

Задатак 2.17 Записати трансформацију из Задатка 2.15 у новим хомогеним координатама $(a_1 : a_2)$ у којима инваријантна тачка $A(-1:1)$ има координате $(1:0)$ и у њима одговарајућим афиним координатама.

Решење: Означимо са

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицу трансформације у координатном систему $(x_1 : x_2)$. Њена једина инваријантна тачка је $A(1 : -1)$. Координатних система $(a_1 : a_2)$ у којима тачка $A(1 : -1)$ има координате $(1 : 0)$ има бесконачно много. Одредимо матрицу преласка $\mathbf{T}$ између старих координата $(x_1 : x_2)$ и неких нових координата $(a_1 : a_2)$. Тачка A одговара првом новом базном вектору (јер су јој нове координате $(1 : 0)$), па зато њене старе координате чине прву колону матрице $\mathbf{T}$. Друга колона матрице $\mathbf{T}$ је произвољна до на услов $\det(\mathbf{T}) \neq 0$ (у томе се и огледа произвољност система $(a_1 : a_2)$). Рецимо,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{P}_a$ трансформације у координатама $(a_1 : a_2)$ је

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}_x\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Дакле, иста трансформација пројективне праве у новим координатама је дата са

$$\begin{aligned} \lambda a_1' &= 3a_1 - a_2, \\ \lambda a_2' &= 3a_2. \end{aligned}$$

Преласком на одговарајуће афине координате добијамо

$$a' = \frac{a_1'}{a_2'} = \frac{3a_1 - a_2}{3a_2} = \frac{\dfrac{3a_1}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_2}}{\dfrac{3a_2}{a_2}} = a - \frac{1}{3}.$$

$\square$

Напомена 2.3 Трансформација у координатама $(a_1 : a_2)$ је афина јер су те координате изабране тако да је у њима инваријантна тачка A бесконачно далека. Тачније, трансформација је у тим координатама транслација која помера све (коначне) тачке тако да (и одатле) закључујемо да је A једина инваријантна тачка. Приметимо да у пројективној геометрији појам коначности, као и појам афиности неке трансформације, зависи од избора координата, то јест, не постоји.

Дефиниција 2.1 Трансформацију пројективне праве која има нула, једну, односно две инваријантне тачке називамо редом **елиптичка**, **параболичка**, односно **хиперболичка**.

Задатак 2.18 Који су неопходни и довољни услови да трансформација пројективне праве буде елиптичка, параболичка, односно хиперболичка?

Задатак 2.19 Доказати да скуп $\mathcal{A}_M$, трансформација пројективне праве са једном заједничком инваријантном тачком M, чини подгрупу групе пројективних трансформација изоморфну групи афиних трансформација.

Упутство: Изабрати координатни систем $(x_1 : x_2)$ у коме тачка M има координате $M(1:0)$. Лако се проверава да су матрице транформација при којима је тачка $M(1:0)$ инваријантна облика

$$f_{av} : \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0. \tag{2.1}$$

Није тешко проверити да такве трансформације чине подгрупу групе пројективних трансформација. Означимо са (a, v) афину трансформацију $x \mapsto ax + v, a \neq 0$. Директно се проверава да је трансформација

$$(a, v) \mapsto \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

изоморфизам афине групе и подгрупе $\mathcal{A}_M$ у односу на композицију трансформација (односно множење матрица). □

Задатак 2.20 Доказати да скуп $\mathcal{H}_{MN}$, трансформација пројективне праве са двема заједничким инваријантним тачкама M и N, чини комутативну подгрупу групе пројективних трансформација.

Решење: Све аксиоме Абелове групе (изузев комутативности) се тривијално проверавају (приметимо да важи $Id \in \mathcal{H}_{MN}$). Нека је $(x_1 : x_2)$ пројективни координатни систем такав да у њему инваријантне тачке имају координате $M(1:0)$ и $N(0:1)$. Одредимо општи облик трансформације која припада $\mathcal{H}_{MN}$:

$$M \mapsto M : \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & p_{11}, \\ 0 & = & p_{21}, \end{array}$$

$$N \mapsto N : \begin{array}{rcl} 0 & = & p_{12}, \\ \lambda_2 & = & p_{22}. \end{array}$$

Одавде добијамо општи облик матрице трансформације:

$$h_a : \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{p_{11}}{p_{22}} \neq 0.$$

За $h_a, h_b \in \mathcal{H}_{MN}$, важи

$$h_a \circ h_b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h_b \circ h_a,$$

одакле следи комутативност. □

Задатак 2.21 Доказати да је скуп $\mathcal{P}_M$, који се састоји од свих параболичких трансформација са заједничком инаваријантном тачком M и идентичког пресликавања, Абелова подгрупа групе пројективних трансформација праве.

Упутство: Избором координатног система у ком инваријантна тачка M има координате $(1:0)$, добијају се трансформације чија је матрица облика (2.1). Услов параболичности (то јест, да је M једина инваријантна тачка) даје матрице које репрезентују трансформације скупа $\mathcal{P}_M$ у облику

$$\tau_v : \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Да је подгрупа комутативна, проверава се директно, то јест, као у Задатку 2.20. □

Напомена 2.4 Јасно је да су групе $\mathcal{P}_M$ и $\mathcal{H}_{MN}$ подгрупе групе $\mathcal{A}_M$ (види Задатке 2.19, 2.20 и 2.21). Прецизније, оне редом представљају подгрупу транслација и подгрупу хомотетија афине групе.

Задатак 2.22 Одредити афини запис трансформација f_{av}, h_a, τ_v из Задатака 2.19, 2.20 и 2.21.

Задатак 2.23 Дате су тачке M, A и A' пројективне праве. Доказати да постоји јединствена параболичка трансформација f при којој је тачка M инваријантна и која тачку A преводи у A'. Нека је $A'' = f(A')$. Доказати да важи $\mathcal{H}(A'', A; A', M)$.

Упутство: Одабрати пројективни координатни систем у коме дате тачке имају координате $M(1:0), A(0:1)$ и $A'(1:1)$. Пошто је тачка $M(1:0)$ инваријантна, закључујемо да параболичка трансформација има облик (2.2). □

Напомена 2.5 На основу претходног задатка, свака параболичка трансформација је једнозначно одређена ако је задата њена инваријантна тачка M и један пар тачака A и $A' = f(A)$.

Задатак 2.24 Одредити формуле параболичке трансформације f допуњене афине праве која оставља тачку $M(-2)$ инваријантном, а тачку $A(-5)$ преводи у тачку $A'(5)$. Одредити слику бесконачно далеке тачке $X(\infty)$. Одредити тачку B, такву да важи $(A, A'; B, X) = -2$.

Решење: Пројективне координате које одговарају датим афиним су: $M(-2:1), A(-5:1), A'(5:1)$ и $X(1:0)$. Најпре одредимо тачку A'', такву да важи $\mathcal{H}(M, A'; A, A'')$. Добијамо $A''(-5:13)$. На основу Примедбе 2.5, трансформација f је одређена са: $f : M, A, A' \barwedge M, A', A''$. После решавања система добијамо њену матрицу

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -40 \\ 10 & 41 \end{pmatrix}.$$

Даље, једноставно добијамо слику $X'(1:10)$ тачке X, као и да тачка B има координате $(-5:3)$. □

Задатак 2.25 Доказати да је трансформација пројективне праве која различите тачке A, B и C преводи редом у тачке B, C и A елиптичка.

Решење: Претпоставимо да дата трансформација има инваријантну тачку M. Она је тада различита од тачака A, B и C, па важи неки распоред, рецимо, $M, A \div B, C$. Како пројективна трансформација чува раздвојеност парова тачака (види Теорему 1.3), када је применимо важиће $M, B \div C, A$. Контрадикција! Аналогно се разматрају и други могући распореди. □

Напомена 2.6 О раздвојености парова тачака на пројективној правој можемо размишљати као о раздвојености парова тачака на кругу. Разлог је чињеница да су пројективна права и круг тополошки еквивалентни.

Задатак 2.26 Одредити неопходан и довољан услов да трансформација пројективне праве које тачке $\mathrm{A}_1(1:0), A_2(0:1)$ и $B(1:1)$ преводи редом у тачке $A_1'(a_{11}':a_{12}'), A_2'(a_{21}':a_{22}')$ и $B'(b_1':b_2')$ чува оријентацију?

Упутство: Најпре одредити матрицу $\mathbf{P}$ дате трансформације, а затим показати да је услов $\det(\mathbf{P}) > 0$ (види Дефиницију 1.7) еквивалентан услову

$$\begin{vmatrix} a_{21}' & b_1' \\ a_{22}' & b_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1' & a_{11}' \\ b_2' & a_{12}' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{21}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix} > 0.$$

□

Задатак 2.27 Доказати да елиптичка и параболичка трансформација не мењају оријентацију.

Решење: Нека је трансформација дата са $\lambda \mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X}$. Карактеристични полином матрице $\mathbf{P}$ је

$$\chi_{\mathbf{P}}(\lambda) = \lambda^2 - (p_{11} + p_{22})\lambda + p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21},$$

то јест,

$$\chi_{\mathbf{P}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{P})\lambda + \det(\mathbf{P}).$$

Из услова елиптичности или параболичности трансформације следи да дискриминанта горње квадратне једначине није позитивна. Одатле је

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{P})^2 - 4\det(\mathbf{P}) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\det(\mathbf{P}) \geq \mathrm{Tr}(\mathbf{P})^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{P}) \geq 0.$$

Како је детерминанта матрице произвољне пројективне трансформације различита од нуле, овим је тврђење доказано. □

Дефиниција 2.2 Трансформацију f, простора $\mathbb{R}P^n$, називамо **цикличком**, уколико за неко $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ важи $f^n = Id$. У том случају, најмање n за које је испуњена дата једнакост зовемо **циклусом** те трансформације. Специјално, трансформацију f за коју важи $f^2 = Id$, $f \neq Id$ називамо **инволуција**.

Задатак 2.28 Доказати да трансформација пројективне праве

$$\begin{array}{rcccc} \lambda x_1' & = & x_1 & + & x_2, \\ \lambda x_2' & = & & + & x_2, \end{array}$$

није циклична.

Решење: Ако би дата трансформација била циклична онда би, на основу Дефиниције 2.2, постојао природан број $n \neq 1$, такав да важи: $\mathbf{P}^n = \lambda\mathbf{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, где је

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

њена матрица. Међутим, како је

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

важи $\mathbf{P}^n \neq \lambda\mathbf{E}$, $n \in \mathbb{N}$. □

Задатак 2.29 Доказати да је трансформација циклуса 3 елиптичка и одредити бар једну такву трансформацију.

Решење: Да је трансформација циклуса 3 елиптичка доказује се као у Задатку 2.25. Пример такве трансформације је трансформација из тог истог задатка. Ако одаберемо пројективни координатни систем такав да у њему важи $A(1:0), B(0:1)$ и $C(1:1)$, добијамо њене формуле

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda x_1' & = & & & x_2, \\ \lambda x_2' & = & -x_1 & + & x_2. \end{array}$$

□

Задатак 2.30 Доказати да ако за трансформацију f пројективне праве постоји пар тачака A и A' такав да важи $A' = f(A)$ и $A = f(A')$, тада је f инволуција.

Упутство: Одабрати $A(1:0)$ и $A'(0:1)$, затим одредити општи облик матрице $\mathbf{P}$ трансформације f и, напослетку, показати да важи $\mathbf{P}^2 = \lambda\mathbf{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. □

Задатак 2.31 Инволуција пројективне праве задата је паровима одговарајућих тачака $A(1:2)$ и $A'(1:0)$, односно $B(2:3)$ и $B'(8:1)$. Одредити ту инволуцију, њене инваријантне тачке и испитати чува ли оријентацију.

Задатак 2.32 Доказати да је пројективна трансформација праве која тачке A, B и C преводи редом у тачке A', B' и C', инволуција ако и само ако важи $(A, B; C, C') = (B', A'; C, C')$.

Решење: Нека је f инволуција. Пошто f чува дворазмеру, на основу Теореме 1.2 важи:

$$(A, B; C, C') = (f(A), f(B); f(C), f(C')) = (A', B'; C', C) = (B', A'; C, C').$$

Обратно, нека важи $(A, B; C, C') = (B', A'; C, C')$. Слично претходном:

$$\begin{aligned}(B', A'; C, C') &= (A, B; C, C') = (f(A), f(B); f(C), f(C')) = \\ &= (A', B'; C', C'') = (B', A'; C'', C').\end{aligned}$$

Због јединствености четврте хармонијски конјуговане тачке, следи $C = C''$, то јест, $f(C') = C$. Одатле и на основу Задатка 2.30, закључујемо да је трансформација f инволуција. □

Задатак 2.33 Ако су A, A' и B, B' два пара одговарајућих тачака хиперболичке (елиптичке) инволуције, доказати да важи $A, A' \mathbin{\ddot{-}} B, B'$ $(A, A' \div B, B')$.

Решење: Нека је $(x_1 : x_2)$ пројективни координатни систем, такав да у њему дате тачке имају следеће координате: $A(1:0), A'(0:1), B(1:1)$ и $B'(b:1)$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Из датих услова добијамо матрицу трансформације

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Њен карактеристични полином, $\chi_{\mathbf{P}}(\lambda) = \lambda^2 - b$, има две различите реалне нуле за $b > 0$ (и у том случају је трансформација хиперболичка), односно нема реалних нула за $b < 0$ (када је трансформација елиптичка).

На основу Дефиниције 1.5, пар тачака A и A' раздваја пар тачака B и B', ако важи $(A, A'; B, B') < 0$. У овом случају је:

$$\left.\begin{array}{rcr} \mathbf{B} & = & \mathbf{A} + \mathbf{A}' \\ \mathbf{B}' & = & b\mathbf{A} + \mathbf{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow (A, A'; B, B') = \frac{1}{1} : \frac{1}{b} = b,$$

одакле следи тврђење. □

Напомена 2.7 Приметимо да карактеристични полином из претходног задатка не може имати једну (двоструку) реалну нулу због услова $b \neq 0$, што значи да на пројективној правој не постоје параболичке инволуције.

Задатак 2.34 Одредити општи облик инволуције пројективне праве. Одредити неопходан и довољан услов при ком је та инволуција хиперболичка, односно елиптичка?

Решење: Размотримо пројективна трансформацију:

$$\begin{array}{rcrcr} \lambda x_1' & = & p_{11}x_1 & + & p_{12}x_2, \\ \lambda x_2' & = & p_{21}x_1 & + & p_{22}x_2. \end{array}$$

Из једнакости

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} & p_{12}(p_{11} + p_{22}) \\ p_{21}(p_{11} + p_{22}) & p_{22}^2 + p_{12}p_{21} \end{pmatrix},$$

следи да је она инволуција ако важи $p_{11} = -p_{22}$. Дакле, инволуција на пројективној правој је репрезентована матрицом

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & -p_{11} \end{pmatrix}.$$

Лако се проверава да је ова инволуција хиперболичка ако важи $p_{11}^2 + p_{12}p_{21} > 0$, односно елиптичка уколико је испуњено $p_{11}^2 + p_{12}p_{21} < 0$. □

Задатак 2.35 Одредити све инволутивне трансформације пројективне праве које тачку $A(1:0)$ преводе у тачку $A'(0:1)$. Које од њих су елиптичке, а које хиперболичке?

Задатак 2.36 На пројективној правој дате су две инволуције: ω_e–елиптичка и ω_h–хиперболичка, такве да се инваријантне тачке M и N хиперболичке инволуције трансформишу једна у другу при елиптичкој инволуцији. Доказати да је трансформација $\omega = \omega_h \circ \omega_e$ хиперболичка инволуција и објаснити шта су јој инваријантне тачке.

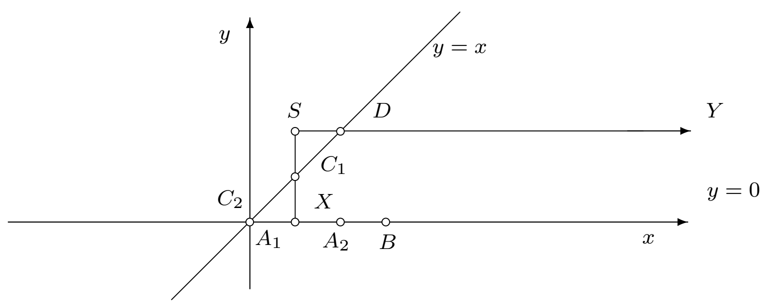
Упутство: Избором погодног координатног система одређују се инволуције ω_e и ω_h, а затим и трансформација $\omega_h \circ \omega_e$, за коју се проверава да је хиперболичка инволуција. За њене инваријантне тачке A и B важи $\omega_h(A) = B$ и $\omega_e(A) = B$. □

Задатак 2.37 Доказати да ако су M и N инваријантне тачке хиперболичке инволуције f, онда сваки пар тачака A и $A' = f(A)$ хармонијски раздваја пар M, N. Обратно, ако две тачке пројективне праве M и N хармонијски раздвајају сваки пар тачака при некој инволуцији f, тада је та инволуција хиперболичка са инваријантним тачкама M и N.

Задатак 2.38 Доказати да се свака трансформација f пројективне праве може представити као производ две инволуције од којих је бар једна хиперболичка.

Упутство: Нека важи $A' = f(A)$ и $A'' = f(A')$. Размотримо инволуцију i_1 при којој је тачка A' инваријантна, а тачка A прелази у тачку A''. Тада трансформација $i_2 = i_1 \circ f$ пресликава тачку A у A' и обратно, тачку A' у A. Дакле, и i_2 је инволуција, па важи $f = i_1 \circ i_1 \circ f = i_1 \circ i_2$. Инволуција i_1 је хиперболичка јер јој је A' инваријантна тачка, а параболичке инволуције не постоје (Задатак 2.33). □

Задатак 2.39 У афиној равни дате су праве $a : y = 0, b : y = x$ и тачка $S(1, 2)$. На правој a уведен је нови пројективни координатни систем $(x_1 : x_2)$ чије базне тачке имају афине координате $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 0)$, а тачка јединице $B(3, 0)$, а на правој b систем $(x_1' : x_2')$ чије базне тачке и тачка јединице имају афине координате $C_1(1, 1)$, $C_2(0, 0)$ и $D(2, 2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективне трансформације $\varphi : a \overset{S}{\barwedge} b$.



Задатак 2.39

Решење: Да би одредили формуле трансформације потребна су нам било која три пара тачака (то јест, три тачке са праве a и њихове слике са b). Одредимо, на пример, које се тачке трансформишу у C_1, C_2 и D. Очигледно се са центром перспективе S, у тачке $C_1(1, 1), C_2(0, 0)$ и $D(2, 2)$ трансформишу редом тачке $X(1, 0), A_1(0, 0)$ и Y (која је бесконачно далека тачка праве a). Ради прегледности дајемо табелу:

афине координате на a	хомогене $(a_1 : a_2)$	$(x_1 : x_2)$	φ	$(x_1' : x_2')$
$X(1)$	$X(1 : 1)$	$X(? :?)$	$\mapsto$	$C_1(1 : 0)$
$A_1(0)$	$A_1(0 : 1)$	$A_1(1 : 0)$	$\mapsto$	$C_2(0 : 1)$
$Y(\infty)$	$Y(1 : 0)$	$Y(? :?)$	$\mapsto$	$D(1 : 1)$

У табели су са $(a_1 : a_2)$ означене хомогене координате које одговарају афиним координатама на правој $y = 0$. Најпре треба пронаћи $(x_1 : x_2)$ координате тачака X и Y. За то нам је неопходна матрица $\mathbf{T}$ трансформације координата $(a_1 : a_2)$ у $(x_1 : x_2)$ која се добија на основу координата тачака A_1, A_2 и B. Слично као у Задатку 2.1, добијамо

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Користећи релацију $\lambda \mathbf{X} = \mathbf{TA}$, добијамо тачке $X(-3:1)$, $Y(3:1)$ у координатном систему $(x_1 : x_2)$. Преостаје нам да одредимо трансформацију φ која тачке $X(-3:1), A_1(1:0), Y(3:1)$ преводи редом у тачке $C_1(1:0), C_2(0:1), D(1:1)$. Добијамо да је она дата са

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' & = & 6x_2, \\ \lambda x_2' & = & x_1 + 3x_2. \end{array}$$

$\square$

Задатак 2.40 У афиној равни дате су праве $a : y = 0$, $b : y = 2x$ и тачке $S_1(0,1)$ и $S_2(-1,2)$. У хомогеним координатама праве a одредити једначине композиције $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ перспективних трансформација $\varphi_1 : a \overset{S_1}{\barwedge} b$ и $\varphi_2 : b \overset{S_2}{\barwedge} a$. Одредити инваријантне тачке добијене трансформације.

Глава 3

Пројективна раван

3.1 Координате у пројективној равни

Задатак 3.1 У односу на координатни систем $(x_1 : x_2 : x_3)$, дате су координате нових базних тачака $A'_1(4:1:1), A'_2(4:4:1), A'_3(0:4:1)$ и тачке јединице $B'(2:1:1)$ новог координатног система $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$. Одредити формуле трансформације старих координата у нове.

Упутство: Задатак се решава истим поступком као Задатак 2.1, с тим што се овде решава систем од 12 једначина са 13 непознатих. □

Задатак 3.2 Одредити једначину праве која садржи тачке $A(2:5:2)$ и $B(8:1:-1)$.

Решење: *1. начин (уколико су обе тачке коначне):* Дељењем последњом координатом добијамо афине координате датих тачака: $A(1, \dfrac{5}{2})$ и $B(-8,-1)$. Афина једначина праве која их садржи је $AB : 7x - 18y + 38 = 0$. Повратком на хомогене координате добијамо једначину праве AB

$$7\frac{x_1}{x_3} - 18\frac{x_2}{x_3} + 38 = 0,$$

што након множења са x_3 постаје

$$7x_1 - 18x_2 + 38x_3 = 0.$$

Координате праве AB записујемо у облику

$$AB[7 : -18 : 38].$$

2. начин: Нека је једначина тражене праве:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{3.1}$$

где су u_1, u_2 и u_3 непознати коефицијенти. Даље, добијамо систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2u_1 & + & 5u_2 & + & 2u_3 & = & 0, \\ 8u_1 & + & u_2 & - & u_3 & = & 0, \end{array} \tag{3.2}$$

одакле следи

$$[u_1 : u_2 : u_3] = [-7 : 18 : -38] = AB.$$

3. начин: Тражена права је у векторском простору представљена једначином равни (3.1). Како вектори $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ припадају тој равни, нормални вектор (u_1, u_2, u_3) равни је векторски производ

$$(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-7, 18, -38),$$

одакле следи резулат. □

Задатак 3.3 Доказати да тачка $C(-4 : 9 : 5)$ припада правој AB из претходног задатка и одредити тачку D, такву да важи $(A, B; C, D)$.

Решење: $7 \cdot (-4) - 18 \cdot 9 + 38 \cdot 5 = 0$, одакле следи $C \in AB$. Тражимо дворазмеру:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B},$$

то јест,

$$\begin{array}{rcl} -4 & = & 2\alpha + 8\beta, \\ 9 & = & 5\alpha + \beta, \\ 5 & = & 2\alpha - \beta, \end{array}$$

одакле добијамо $\alpha = 2$ и $\beta = -1$. Даље је

$$-1 = (A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{1}{2} : \frac{\delta}{\gamma},$$

одакле следи $2\delta = \gamma$, што значи да важи

$$\mathbf{D} = 2\delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{B},$$

па, на пример, за $\delta = 1$ добијамо $D(12 : 11 : 3)$. □

Задатак 3.4 Одредити пресек P правих $a : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ и $b : x_1 - x_2 = 0$.

Решење: Пресечна тачка $P(1 : 1 : 1)$ ових правих лако се добија решавањем датог система једначина. Ипак, приметимо да је тај систем истог облика као и систем (3.2) којим се одређује права која садржи две тачке. Дакле, пресек правих a и b такође налазимо користећи векторски производ, то јест,

$$(1, 1, 1) = \mathbf{P} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 3, -5) \times (1, -1, 0).$$

□

Напомена 3.1 У пројективној равни важи принцип дуалности тачака и правих: уколико у некој теореми речи *тачка, права, припада, садржи* заменимо речима *права, тачка, садржи, припада* добијени исказ је такође теорема пројективне равни.

Дефиниција 3.1 Раванску пројективну конфигурацију која се састоји од n тачака међу којима никоје три нису колинеарне и правих које садрже сваке две од њих називамо **потпуни** n**–тотеменик**. Наведене тачке су **темена**, а праве **странице** n–тотеменика. Ако две странице имају заједничко теме, тада су оне **суседне**, а у супротном **несуседне**. Пресечне тачке парова несуседних страница су **дијагоналне тачке**, а праве одређене паровима дијагоналних тачака (које не припадају истој страници) су **дијагонале**.

Дефиниција 3.2 Раванску пројективну конфигурацију која се састоји од уређене n–торке тачака $A_1, \dots, A_n$ међу којима никоје три суседне[1]

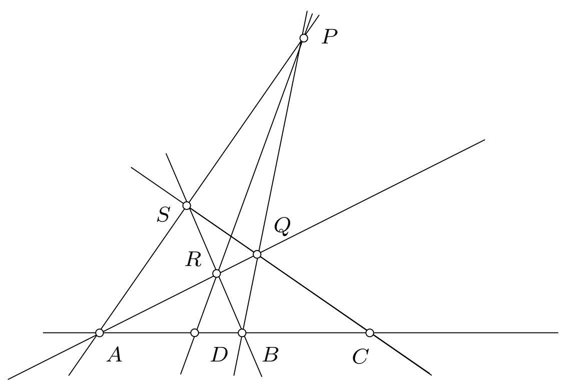
[1] Тачке A_1 и A_n су, такође, суседне.

нису колинеарне и n правих $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ називамо **прост** n–**тотеменик**, где су дате тачке и праве његова темена, односно странице. Праве одређене несуседним теменима су дијагонале, а тачке у којима се секу парови дијагонала (које не садрже исто теме) су дијагоналне тачке.

Напомена 3.2 Дуално се дефинишу **потпуни** и **прост** n–**тостраник**. Приметимо да потпуни и прост тротеменик, као и потпуни и прост тространик представљају једну исту пројективну конфигурацију.

Задатак 3.5 Доказати да за тачке A, B, C и D важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ако и само ако постоји потпуни четворотеменик $PQRS$, такав да важи $A = PS \times QR$, $B = SR \times PQ$, $C = SQ \times AB$, $D = PR \times AB$.

Решење: Нека постоји потпуни четворотеменик $PQRS$, такав да важе наведене релације и нека је $(x_1 : x_2 : x_3)$ координатни систем, такав да његова темена имају координате $P(1 : 0 : 0)$, $Q(0 : 1 : 0)$, $R(0 : 0 : 1)$, $S(1 : 1 : 1)$.



Задатак 3.5

Као у 3. начину решења Задатка 3.2 добијамо једначине правих

$$PQ[0 : 0 : 1], \quad RS[1 : -1 : 0], \quad PS[0 : 1 : -1], \quad QR[1 : 0 : 0].$$

Пресеке правих одређујемо као у Задатку 3.4 и добијамо $A(0 : 1 : 1)$, $B(1 : 1 : 0)$. Затим се одређују права $AB[1 : -1 : 1]$ и тачке $C(1 : 2 : 1)$ и $D(-1 : 0 : 1)$ и проверава да су оне хармонијски конјуговане са A и B.

Обратно, претпоставимо да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Нека су m и n праве које садрже тачку A и k права која садржи тачку D. Нека је, даље, $R = k \times m$, $P = k \times n$, $S = n \times BR$, $Q = m \times BP$. За тачку $C' = SQ \times AB$, на основу претходног смера, важи $\mathcal{H}(A, B; C', D)$. Због јединствености четврте хармонијски конјуговане тачке важи $C' = C$, па је $PQRS$ тражени четворотемник. $\square$

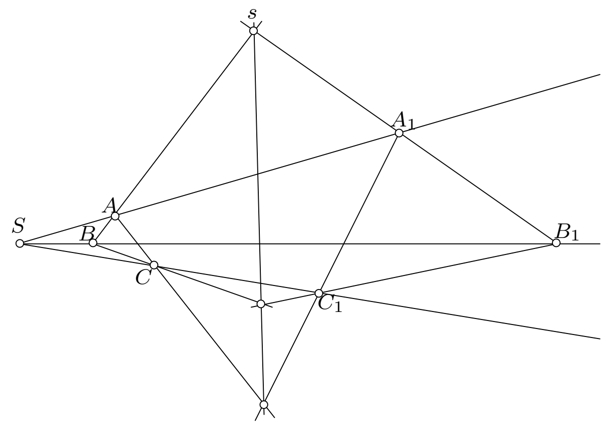
Задатак 3.6 Нека су a, b, c и d конкурентне праве пројективне равни и нека је p произвољна права која их сече редом у разним тачкама A, B, C и D. Доказати да важи $(A, B; C, D) = (a, b; c, d)$.

Упутство: Нека се праве a, b, c и d секу у тачки P и нека је $(x_1 : x_2 : x_3)$ координатни систем, такав да важи $P(0 : 0 : 1)$, $A(1 : 0 : 0)$ и $B(0 : 1 : 0)$. Следи, $p = AB[0 : 0 : 1]$, па је $C(c : 1 : 0), c \neq 0$ и $D(d : 1 : 0), c \neq d \neq 0$. Сада се тврђење проверава директним рачуном. $\square$

Задатак 3.7 Четири конкурентне праве a, b, c и d пројективне равни су хармонијски конјуговане ако и само ако постоји потпуни четвоространик $pqrs$ такав да важи $a = (p \times s)(q \times r)$, $b = (s \times r)(p \times q)$, $c = (s \times q)(a \times b)$, $d = (p \times r)(a \times b)$. Овај задатак је дуалан Задатку 3.5.

Задатак 3.8 (**Дезаргова теорема**–равански случај) Дати су тротеменици ABC и $A'B'C'$ који припадају истој равни. Доказати да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки S ако и само ако пресеци $AB \times A'B'$, $AC \times A'C'$ и $BC \times B'C'$ припадају једној правој s.

Упутство: Нека се праве AA', BB' и CC' секу у тачки $S(1 : 1 : 1)$ и нека је $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$, $C(0 : 0 : 1)$. Тада важи $A_1(\lambda_1 : 1 : 1)$, $B_1(1 : \lambda_2 : 1)$, $C_1(1 : 1 : \lambda_3)$. Странице оба тротеменика се једноставно добијају и показује се да се одговарајући парови секу на једној правој. Други смер се може разматрати дуално ако се одабере координатни систем у коме странице једног тротеменика имају координате $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]$ и $[0 : 0 : 1]$, а оса s координате $[1 : 1 : 1]$. $\square$



Задатак 3.8

Задатак 3.9 Које координате имају темена потпуног четворотеменика ако за базне тачке узмемо његове дијагоналне тачке, а за јединичну једно његово теме? Дуализовати.

Упутство: Означимо темена четворотеменика са $A_1, A_2, A_3(1:1:1)$ и A_4. Тада су његове дијагоналне тачке $D_1(1:0:0) = A_1A_4 \times A_2A_3, D_2(0:1:0) = A_2A_4 \times A_1A_3$ и $D_3(0:0:1) = A_3A_4 \times A_1A_2$. Права D_1D_2 је дата једначином $x_3 = 0$, па лако добијамо координате тачке $D_3A_3 \times D_1D_2 = M(1:1:0)$. На основу Задатка 3.5, парови D_1, D_2 и $M, N = A_1A_2 \times D_1D_2$ су хармонијски конјуговани. Одатле добијамо $N(1:-1:0)$. Темена чије се координате траже су пресеци познатих правих $D_2A_3 \times ND_3 = A_1$, $D_1A_3 \times ND_3 = A_2$ и $D_1A_1 \times A_3D_3 = A_4$. Директним рачуном се добија да су њихове координате $(-1:1:1), (1:-1:1)$ и $(1:1:-1)$.

Дуално, ако дијагонале потпуног четвоространика имају координате $[1:0:0], [0:1:0]$ и $[0:0:1]$, а једна његова страница $[1:1:1]$, тада су координате његових преосталих страница $[-1:1:1], [1:-1:1]$ и $[1:1:-1]$. $\square$

3.2 Трансформације пројективне равни

3.2.1 Колинеације

Дефиниција 3.3 Трансформацију пројективне равни која тачке преводи у тачке, а праве у праве називамо **колинеација**.

Задатак 3.10 Одредити колинеацију која тачке $A(1:0:1)$, $B(1:2:2)$, $C(1:1:1)$ и $D(-2:-1:0)$ преводи редом у тачке $A'(1:3:1)$, $B'(3:2:4)$, $C'(1:1:1)$ и $D'(3:3:1)$.

Задатак 3.11 Одредити афини запис колинеације

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1' & = & & & x_2 & + & x_3, \\ \lambda x_2' & = & x_1 & & & + & x_3, \\ \lambda x_3' & = & x_1 & + & x_2. & & \end{array}$$

Решење: Дата колинеација у афиним координатама је

$$x' = \frac{x_1'}{x_3'} = \frac{x_2+x_3}{x_1+x_2} = \frac{\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_3}}{\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_2}{x_3}} = \frac{y+1}{x+y},$$

$$y' = \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_1+x_3}{x_1+x_2} = \frac{\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_3}}{\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_2}{x_3}} = \frac{x+1}{x+y}.$$

□

Задатак 3.12 Ако се координате тачака пројективне равни трансформишу правилом $\lambda \mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X}$ тада се координате правих трансформишу по правилу $\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{U}' = (\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{U}$. Доказати.

Решење: Приметимо да је однос између тачака и правих, са алгебарске тачке гледишта, однос векторског простора и њему дуалног простора.

Праву $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ можемо записати у облику $\mathbf{U}^T\mathbf{X}=0$, а њену слику као $(\mathbf{U}')^T\mathbf{X}'=0$. Релација

$$0=\mathbf{U}^T\mathbf{X}=(\lambda\mathbf{U}^T\mathbf{P}^{-1})\mathbf{X}'=(\mathbf{U}')^T\mathbf{X}',$$

важи за свако $\mathbf{X}'$ па је

$$(\mathbf{U}')^T=\lambda\mathbf{U}^T\mathbf{P}^{-1},$$

одакле добијамо тражени закон трансформације правих

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{U}'=(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{U}.$$

□

Задатак 3.13 Одредити инваријантне тачке и инваријантне праве колинеације

$$\begin{array}{rcrcrcr}\lambda x_1' &=& 4x_1 &-& x_2, && \\ \lambda x_2' &=& 6x_1 &-& 3x_2, && \\ \lambda x_3' &=& x_1 &-& x_2 &-& x_3.\end{array}$$

Решење: Слично као код пројективне праве, инваријантне тачке одређујемо као сопствене векторе матрице колинеације

$$0=\det(\mathbf{P}-\lambda\mathbf{E})=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & 0\\ 6 & -3-\lambda & 0\\ 1 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3),$$

па сопственим вредностима $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ и $\lambda_3=3$ одговарају сопствени вектори $(0,0,1),(1,1,0)$ и $(1,6,5)$, а њима инваријантне тачке $A(0:0:1),B(1:1:0)$ и $C(1:6:5)$.

Одредимо сада инваријантне праве:

1. начин (уколико постоје тачно три инваријантне тачке): Инваријантне праве ће бити AB,AC и BC. Није тешко закључити да осим њих више нема инваријантних правих (јер ако би постојала још нека, онда би тачке које се налазе у њеном пресеку са AB,AC и BC биле такође инваријантне што је немогуће).

2. начин (општи): На основу Задатка 3.12, права U је инваријантна ако и само ако важи

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' = \lambda(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{U}, \quad \text{то јест,} \quad \mathbf{P}^T\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}.$$

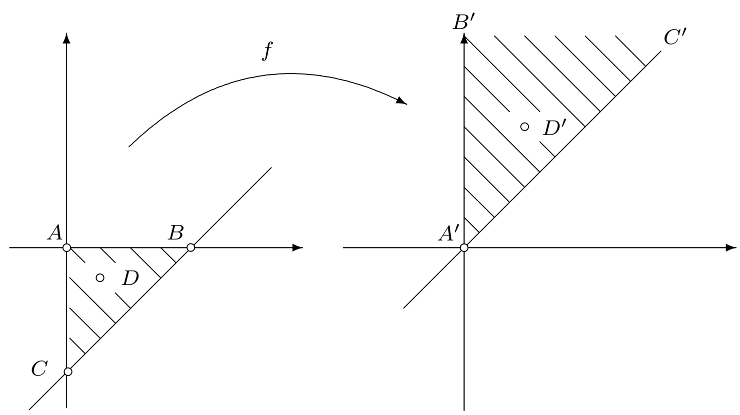
Дакле, инваријантне праве су сопствени вектори матрице $\mathbf{P}^T$.

Подсетимо се да матрице $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^T$ имају исте карактеристичне полиноме, самим тим и сопствене вредности. Њима одговарајући сопствени вектори су $(-1, 1, -1), (-6, 1, 0)$ и $(1, -1, 0)$, па су инваријантне праве $[-1 : 1 : -1], [-6 : 1 : 0]$ и $[1 : -1 : 0]$. Непосредном провером може се утврдити да су то редом праве BC, AC и AB. $\square$

Задатак 3.14 Доказати да свака колинеација има бар једну инваријантну праву и инваријантну тачку.

Решење: Како је каракеристични полином $\chi_{\mathbf{P}}(\lambda)$ матрице $\mathbf{P}$ колинеације степена три, он има бар једну реалну нулу, то јест, сопствену вредност. Одговарајући сопствени вектор представља инваријантну тачку. Матрица трансформације правих $(\mathbf{P}^{-1})^T$ такође има бар једну реалну сопствену вредност којој одговара инваријантна права. $\square$

Задатак 3.15 Одредити бар једну колинеацију f, допуњене афине равни, којом се област $U = \{(x, y) \,|\, x > 0, y < 0, y - x + 2 > 0\}$ трансформише у област $V = \{(x, y) \,|\, y > x > 0\}$.



Задатак 3.15

Упутство: Из перспективе пројективне геометрије, границе обе области су странице тротеменика, па је, за почетак, неопходно да се три праве које ограничавају област U трансформишу у праве које ограничавају V. То је еквивалентно са тим да се темена једног тротеменика трансформишу у темена другог. Даље, нека се произвољна тачка $D(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ области U, трансформише у произвољну тачку $D'(1,2)$ области V. Тада је колинеација f одређена са $f : A, B, C, D \barwedge A', B', C', D'$. Преостаје да се да се одреде пројективне координате темена и затим формуле трансформације. □

Задатак 3.16 Одредити бар једну колинеацију f допуњене афине равни која унутрашњост квадрата чија су темена $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1)$ и $D(1,-1)$ преводи у област $V = \{(x,y) \,|\, x > 0,\, y > 0,\, 3x + y - 3 > 0\}$.

Задатак 3.17 Координатно описати све колинеације које остављају инваријантним дати тротеменик ABC. Да ли је група тих колинеација комутативна? Дискутовати број инваријантних тачака и правих за сваку од њих.

Задатак 3.18 Доказати да је група колинеација пројективне равни код којих је дата права инваријантна изоморфна групи афиних трансформација равни.

Решење: Нека је координатни систем такав да инваријантна права има једначину $b : x_3 = 0$, то јест, њена слика је иста права $x_3' = 0$. Уврштавањем формула трансформације у ту једначину добијамо да је

$$0 = x_3' = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 \quad \text{иста права као} \quad 0 = x_3.$$

Зато је

$$p_{31} = 0 = p_{32}, \;\; p_{33} \neq 0.$$

Дакле, тражене колинеације су облика

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A},\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где смо означили $p_{ij} = a_{ij}$, $i, j \leq 2$, $p_{13} = v_1$, $p_{23} = v_2$, и изабрали $p_{33} = 1$. Означимо са $(\mathbf{A}, \mathbf{v})$ афину трансформацију $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{AX} + \mathbf{v}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$, са матрицом $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и вектором транслације $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$. Директно се проверава да је пресликавање

$$(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{P}_{\mathbf{A},\mathbf{v}}$$

изоморфизам групе афиних трансформација равни и ове подгрупе пројективних колинеација. $\Box$

Напомена 3.3 Ако је у проширеној афиној равни при некој пројективној трансформацији бесконачно далека права $x_3 = 0$ инваријантна, тада је она, на основу Задатка 3.18, дата матрицом (3.3). У афиним координатама записујемо је формулама

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + v_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + v_2, \end{aligned}$$

и зовемо афином трансформацијом. Афиним трансформацијама ћемо се посебно бавити у оквиру Главе 5 (видети Дефиницију 5.1). Да је свака пројективна трансформација равни афина у неким (погодно одабраним) хомогеним координатама следи из Задатка 3.14.

Дефиниција 3.4 **Оса колинеације** је права s чија је свака тачка инваријантна. **Центар колинеације** је тачка S, таква да је свака права која је садржи инваријантна. Колинеацију која има осу (а зато и центар – види Задатак 3.19) зовемо **хомологија**. Хомологија је **параболичка** ако центар колинеације припада оси, односно **хиперболичка** ако центар колинеације не припада оси.

Задатак 3.19 Доказати да колинеација има осу ако и само ако има центар.

Упутство: Нека је трансформација дата са $\lambda\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$. Ако је тачка S центар те трансформације, једноставно је показати да је права представљена вектором $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{S}$ оса трансформације (ово је мотивисано Задатком 3.12). Обратно, приметимо да су појмови осе и центра дуални. Зато је овај смер последица доказаног смера. $\Box$

Задатак 3.20 Разматра се трансформација из Задатка 3.11.

а) Доказати да је она хиперболичка хомологија и одредити јој осу и центар.

б) Одредити бар један нови хомогени координатни систем у коме је оса бесконачно далека права и афини запис трансформације у том координатном систему.

Решење: *а*) Матрица колинеације и њен карактеристични полином су

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\mathbf{P}}(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Сопственој вредности $\lambda_1 = 2$ одговара инваријантна тачка $S(1:1:1)$, док двострукој сопственој вредности $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ одговарају инваријантне тачке облика $(-x_2 - x_3 : x_2 : x_3)$, то јест, све тачке праве $s[1:1:1]$, одакле следи да је колинеација хомологија (чија је оса права s). Једноставно се проверава да важи $S \notin s$ и да је свака права која садржи тачку S инваријантна (садржи две инваријантне тачке: S и свој пресек са s), па је хомологија хиперболичка.

б) У складу са Задатком 2.17, потребно је одредити хомогени координатни систем у ком је права s дата са $x_3 = 0$. Ако две произвољне тачке праве s, $A(1:0:-1)$, и $B(1:-1:0)$ одаберемо за прве две базне тачке новог координатног система (то јест, да им нове координате буду $A(1:0:0)$, односно $B(0:1:0)$) онда ће оне постати бесконачно далеке, а самим тим и права која их садржи. Дакле, матрица преласка са старе базе на нову је

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где се у првим двема колонама налазе старе координате тачака A и B, док је трећа колона произвољна уз услов $\det(\mathbf{T}) \neq 0$ (ипак, овде смо изабрали $S(1:1:1)$ као трећу колону како би у новим координатама $S(0:0:1)$ био нови координатни почетак). Матрица колинеације у новој бази је $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}$, а како се нова база састоји од добијених сопствених вектора, то је $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \mathbf{diag}(-1,-1,2)$. Преласком на (нове) афине координате добијамо

$$x' = -\frac{1}{2}x,$$

$$y' = -\frac{1}{2}y.$$

Дакле, у новим координатама, трансформација је афина, прецизније, хомотетија са центром у координатном почетку. □

Напомена 3.4 Приметимо да је матрица колинеације у новим координатама дијагонална матрица са сопственим вредностима матрице $\mathbf{P}$ на главној дијагонали. Такав координатни систем се може одредити, ако се претходно добију три неколинеарне инваријантне тачке.

Задатак 3.21 Одредити инваријантне тачке и инваријантне праве колинеације

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1' & = & x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3, \\ \lambda x_2' & = & 4x_1 & - & 7x_2 & + & 8x_3, \\ \lambda x_3' & = & 6x_1 & - & 7x_2 & + & 7x_3. \end{array}$$

Одредити затим неки пројективни координатни систем у чијим је афиним координатама дата трансформација афина.

Задатак 3.22 Параболичка хомологија проширене афине равни којој је оса бесконачно далека права је транслација. Доказати.

Решење: Нека је A' слика тачке A при овој хомологији. Тиме је ова хомологија одређена. Докажимо да је она транслација $\tau_{\mathbf{AA'}}$ за вектор $\mathbf{AA'}$. Тачка $S_\infty = AA' \times s$ је центар хомологије. Нека је B' слика неке тачке B. Тада важи $AA' \times BB' = S_\infty \in s$ (јер је S_∞ центар) и $AB \times A'B' \in s$ (јер је тачка $AB \times s$ инваријантна). Односно, важи $AA' \parallel BB'$ и $AB \parallel A'B'$, па је четвороугао $ABB'A'$ паралелограм. Дакле, важи $\mathbf{BB'} = \mathbf{AA'}$ за произвољну тачку B, па је ова хомологија транслација $\tau_{\mathbf{AA'}}$. □

Задатак 3.23 Дата је хиперболичка хомологија проширене афине равни са центром S и осом s која је бесконачно далека права. Доказати да је она хомотетија чији је центар тачка S, а коефицијент $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$, где је λ_1 двострука, а λ_3 једнострука сопствена вредност матрице те хомологије.

Задатак 3.24 Доказати да две различите хомологије са заједничком осом комутирају ако и само ако су обе параболичке.

Упутство: Ако су обе хомологије параболичке изабрати бесконачно далеку за заједничку осу s тих хомологија. Тада су, на основу Задатка 3.22, те хомологије транслације, па комутирају.

Обратно, нека су S_1 и S_2 центри хомологија f_1 и f_2 и нека бар једна од тачака S_1, S_2 не припада правој s. Доказати да, рецимо, важи $f_1 \circ f_2(S_1) \neq f_2 \circ f_1(S_1)$. □

Задатак 3.25 Користећи Задатаке 3.22 и 3.23, одредити формуле хомологије проширене афине равни са осом $x_3 = 0$ која

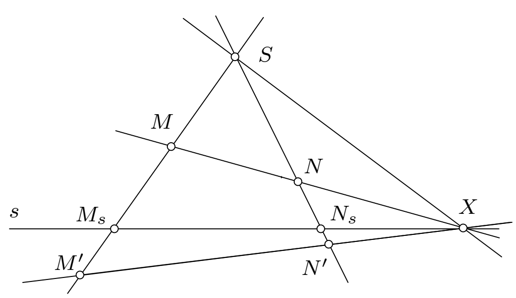
а) има центар $S(1:2:0)$ и трансформише тачку $A(0,0)$ у тачку $A'(2,4)$;

б) има центар $S(1,1)$ и трансформише тачку $A(2,0)$ у тачку $A'(-1,3)$.

Задатак 3.26 У афиној равни дате су праве $a: y = x - 2, b: y = x$ и $c: y = x + 1$. У хомогеним координатама одредити једначину праве d, такве да важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Одредити затим хомологију чији је центар тачка пресека датих правих, оса бесконачно далека права и која праву $p: x = 1$ трансформише у праву $p: x = 0$.

Задатак 3.27 Нека су дати центар S и оса s произвољне хиперболичке хомологије f и нека је $M' = f(M)$, $M_s = SM \times s$. Доказати да дворазмера $(S, M_s; M, M')$ не зависи од избора тачке M.

Решење:



Задатак 3.23

Нека је N произвољна тачка различита од M, $N' = f(N)$ и $N_s = SN \times s$. Ако је $X = MN \times s$, приметимо да тада мора важити $N' \in M'X$. Следи, $(S, M_s; M, M') = (XS, XM_s; XM, XM') = (S, N_s; N, N')$. □

Напомена 3.5 За хомологију из претходног задатка кажемо да је **хармонијска** уколико важи $\mathcal{H}(S, M_S; M, M')$.

Задатак 3.28 Доказати да је свака хармонијска хомологија f пројективне равни инволуција. Обратно, свака инволуција пројективне равни је хармонијска хомологија.

Решење: Користећи исте ознаке као у претходном задатку добијамо

$$\mathcal{H}(S, M_s; M, M') \Leftrightarrow \mathcal{H}(f(S), f(M_s); f(M), f(M')) \Leftrightarrow \mathcal{H}(S, M_s; M', M'').$$

Одавде следи $M'' = M$, па је f инволуција.

Обратно, нека је f инволуција и нека је $M' = f(M)$ и $N' = f(N)$ (тачке M, M', N, N' се налазе у општем положају). Тада је тачка $S = MM' \times NN'$ инваријантна, а такође и тачке $X = MN \times M'N'$ и $Y = MN' \times M'N$. Зато је и права $s = XY$ инваријантна. Како је и права MM' инваријантна, инваријантна је и тачка $M_s = MM' \times s$ праве s, различита од тачака X и Y. Како су три различите тачке праве s инваријантне, то је права s оса пресликавања f а тачка S њен центар. Да важи $\mathcal{H}(S, M_s; M, M')$, то јест, да је ова хиперболчка хомологија и хармонијска следи из егзистенције четворотеменика $XNYN'$. □

Задатак 3.29 Доказати да је композиција три хармонијске хомологије чији су центри темена датог тротеменика, а осе њима супротне странице идентичка трансформација.

Задатак 3.30 Тачке A, B, C и D пројективне равни, од којих никоје три нису колинеарне, трансформишу се редом у тачке B, A, D и C при некој колинеацији f. Доказати да је f инволуција.

Упутство: Види решење Задатака 3.28. □

Задатак 3.31 Одредити пројективну трансформацију равни $\alpha : z = 0$ у тродимензионом афином простору која представља композицију пројекције равни α из тачке $S_1(0, 0, -1)$ на раван $\beta : x+y+z = 1$ и пројекције равни β из тачке $S_2(6, -3, 2)$ назад на раван α. Доказати да је та трансформација параболичка хомологија.

3.2.2 Корелације

Дефиниција 3.5 **Корелација** је пресликавање тачака на праве или правих на тачке пројективне равни облика

$$\lambda\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{X}, \quad \text{односно} \quad \lambda\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{U},$$

при чему је $\mathbf{P} = (p_{ij})$ недегенерисана матрица корелације, $\lambda \neq 0$, а $\mathbf{U}$ и $\mathbf{X}$ вектори представници праве U, односно тачке X у неком координатном систему. Корелацију називамо **поларитет** ако је матрица $\mathbf{P}$ симетрична. Ако су X и U одговарајућа тачка и права при поларитету тада је X **пол** праве U, а U **полара** тачке X. Пишемо $X = \mathrm{pol}(U), U = \mathrm{pol}(X)$.

Задатак 3.32 Доказати да важи:

а) корелација је одређена са четири тачке од којих никоје три нису колинеарне или четири праве од којих никоје три нису конкурентне;

б) корелацијом се колинеарне тачке пресликавају у конкурентне праве и обратно;

в) корелација чува дворазмеру.

Задатак 3.33 Одредити корелацију пројективне равни која тачке $A_1(1 : 0 : 0), A_2(0 : 1 : 0), A_3(0 : 0 : 1)$ и $B(1 : 1 : 1)$ пресликава редом у праве $a_1[1 : 0 : 1], a_2[0 : 1 : -3], a_3[0 : 1 : 5]$ и $b[1 : 1 : 2]$.

Задатак 3.34 Дата је корелација $\lambda\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ тачака на праве.

а) Доказати да је након промене координата $\lambda\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}'$ матрица корелације $\mathbf{P}' = \mathbf{T}^T\mathbf{P}\mathbf{T}$.

б) Доказати да је дефиниција поларитета геометријска (то јест, не зависи од избора координата).

Решење: *а*) Нека је у новим координатама корелација дата са $\lambda\mathbf{U}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}'$, то јест, нека је $\mathbf{P}'$ матрица корелације у новом координатном систему. Заменом веза

$$\lambda\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}', \quad \lambda\mathbf{U} = \left(\mathbf{T}^{-1}\right)^T\mathbf{U}'$$

старих и нових координата тачака и правих (види Задатак 3.12) у корелацију $\lambda\mathbf{U} = \mathbf{PX}$ добијамо матрицу корелације у новим координатама $\mathbf{P}' = \mathbf{T}^T\mathbf{PT}$.

б) Треба доказати да је у свим координатама матрица поларитета симетрична. Пошто је $\mathbf{P}$ симетрична матрица, то јест, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, важи

$$\mathbf{P}'^T = (\mathbf{T}^T\mathbf{PT})^T = \mathbf{T}^T\mathbf{P}^T\mathbf{T}^{T^T} = \mathbf{P}',$$

па је матрица $\mathbf{P}'$ корелације симетрична и у ма којим другим координатама. □

Задатак 3.35 Доказати да је свака корелација при којој се темена неког тротеменика пресликавају у њима супротне странице поларитет.

Решење: Нека је $(x_1 : x_2 : x_3)$ пројективни координатни систем, такав да у њему темена датог тротеменика имају координате $A(1:0:0), B(0:1:0)$ и $C(0:0:1)$. Тада се она пресликавају редом у праве $BC[1:0:0], AC[0:1:0]$ и $AB[0:0:1]$, одакле добијамо општи облик матрице корелације

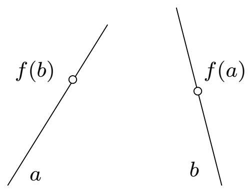
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}, \quad p_{11}, p_{22}, p_{33} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Матрица је симетрична па је корелација поларитет. □

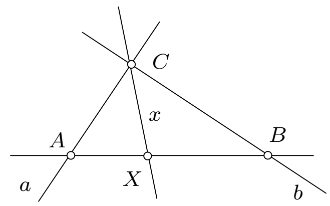
Напомена 3.6 Тротеменик из претходног задатка (дакле, онај чија се темена при неком поларитету пресликавају у њима супротне странице) зовемо **аутополарним** при датом поларитету. Сваки поларитет је јединствено одређен ако је задат аутополарни тротеменик и слика једне тачке.

Задатак 3.36 Доказати да је корелација f поларитет ако и само ако за сваке две тачке A и B (праве a и b) важи:

$$B \in f(A) \Rightarrow A \in f(B), \quad (a \ni f(b) \Rightarrow b \ni f(a)).$$



Задатак 3.36



Задатак 3.38

Дефиниција 3.6 За тачке A и B (праве a и b) које задовољавају услове претходног задатка кажемо да су **конјуговане** при поларитету f. Тачка која припада својој полари је **самоконјугована тачка**. Дуално, праву која садржи свој пол зовемо **самоконјугована права**.

Задатак 3.37 Нека је f поларитет. Доказати

а) $f(A) \times f(B) = f^{-1}(AB)$;

б) самоконјугована права садржи тачно једну самоконјуговану тачку.

Решење: *а*) Означимо $C = f(A) \times f(B)$. На основу претходног задатка, мора важити $A \in f(C)$ и $B \in f(C)$ па је $f(C) = AB$, то јест, $C = f^{-1}(AB)$.

б) Нека је A самоконјугована тачка и $a = f(A)$ њена полара. По дефиницији је a самоконјугована права и $A \in a$. Претпоставимо да постоји самоконјугована тачка $B \in a$ различита од тачке A. Пошто је поларитет бијекција за њену слику $b = f(B), B \in b$, важи $a \neq b$, па је

$$B = a \times b = f(A) \times f(B) = f^{-1}(AB) = f^{-1}(a) = A.$$

□

Задатак 3.38 Доказати да једна права пројективне равни не може садржати више од две самоконјуговане тачке при неком поларитету.

Решење: Нека су тачке A и B самоконјуговане, при поларитету f и нека се тачка C налази у пресеку њихових полара. Тада тачке A, B и

C нису колинеарне, то јест, налазе се у општем положају, па се може одабрати координатни систем $(x_1 : x_2 : x_3)$ у коме оне имају координате $A(1:0:0), B(0:1:0)$ и $C(0:0:1)$. Слика тачке A је права $AC[0:1:0]$, а слика тачке B права $BC[1:0:0]$, док се на основу Задатка 3.37, тачка C пресликава у $AB[0:0:1]$. Користећи то, добијамо матрицу пресликавања:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad p = \frac{p_{33}}{p_{12}} \neq 0.$$

Нека је X тачка праве AB различита од A и B и претпоставимо да је и она самоконјугована. Очигледно да њене координате морају бити облика $(x_1 : x_2 : 0)$, где су x_1 и x_2 бројеви различити од нуле. На основу Задатка 3.37, она се мора пресликати у праву $XC[-x_2 : x_1 : 0]$. Одатле следи

$$\begin{aligned} -\lambda x_2 &= x_2, \\ \lambda x_1 &= x_1, \end{aligned}$$

што није могуће. Контрадикција! □

Задатак 3.39 Дат је поларитет f:

$$\begin{aligned} \lambda u_1' &= 2x_1, \\ \lambda u_2' &= \quad 3x_2, \\ \lambda u_3' &= \quad\quad - 5x_3. \end{aligned}$$

Одредити све самоконјуговане тачке при поларитету f које припадају правој $p : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

Решење: Свака тачка која припада правој p је облика $M(x_1 : x_2 : \frac{x_1+x_2}{2})$, док је њена слика при датом поларитету облика $m : 2x_1x_1' + 3x_2x_2' - \frac{5(x_1+x_2)}{2}x_3' = 0$. Даље, из услова $M \in m$ добијамо једначину $2x_1^2+3x_2^2-\frac{5(x_1+x_2)^2}{4} = 0$, коју задовољавају координате свих тражених тачака. Њена решења су $A(1:1:1)$ и $B(7:3:5)$. □

Задатак 3.40 (**Шалова теорема**) Ако се при поларитету f темена тротеменика ABC пресликавају у странице $B'C', C'A'$ и $A'B'$ тротеменика $A'B'C'$ различитог од ABC, онда су праве AA', BB' и CC' конкурентне.

Упутство: Ако темена првог тротеменика имају координате $A(1:0:0), B(0:1:0)$ и $C(0:0:1)$, онда при поларитету чија је матрица $\mathbf{P}=(p_{ij})$ њихове слике имају координате $B'C'[p_{11}:p_{12}:p_{13}], A'C'[p_{12}:p_{22}:p_{23}]$ и $A'B'[p_{13}:p_{23}:p_{33}]$. Остаје да се пронађу њихове пресечне тачке и покаже конкурентност одговарајућих правих. $\square$

3.3 Криве другог реда

Задатак 3.41 Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(0:0:1), B(0:1:1), C(1:0:1), D(2:-5:1)$ и $E(-5:2:1)$.

Упутство: У складу са Дефиницијом 1.8, општа једначина криве другог реда дата је са

$$g_{11}x_1^2+g_{22}x_2^2+g_{33}x_3^2+2g_{12}x_1x_2+2g_{13}x_1x_3+2g_{23}x_2x_3=0. \tag{3.4}$$

Када се дате тачке уврсте у горњу једначину добија се систем од 5 једначина са 6 непознатих, а као решење $5x_1^2+5x_2^2+16x_1x_2-5x_1x_3-5x_2x_3=0$. $\square$

Задатак 3.42 Одредити једначину фамилије кривих другог реда које садрже темена потпуног четворотеменика ако су његове дијагоналне тачке узете за базне.

Решење: Ако за јединичну тачку одаберемо једно од темена четворотеменика онда његова темена (види Задатак 3.9) имају координате $(-1:1:1), (1:-1:1), (1:1:-1)$ и $(1:1:1)$. Заменом у једначину (3.4) добијамо $g_{ij}=0, i\neq j$ и $g_{11}+g_{22}+g_{33}=0$. Стога је једначина тражене фамилије

$$g_{11}x_1^2+g_{22}x_2^2-(g_{11}+g_{22})x_3^2=0.$$

$\square$

Задатак 3.43 Дате су тачке A, B, C и D које се налазе у општем положају. Доказати да је геометријско место тачака M за које важи $(MA,MB;MC,MD)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ крива другог реда. Да ли је за неку вредност α та крива дегенерисана?

Задатак 3.44 Доказати да се при промени координата $\lambda\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}'$ матрица $\mathbf{G}$ криве другог реда мења у $\mathbf{G}' = \mathbf{T}^T\mathbf{G}\mathbf{T}$.

Решење: Једначину (3.4) криве другог реда можемо записати у облику

$$0 = \mathbf{X}^T\mathbf{G}\mathbf{X} = (\mathbf{T}\mathbf{X}')^T\mathbf{G}(\mathbf{T}\mathbf{X}') = \mathbf{X}'^T(\mathbf{T}^T\mathbf{G}\mathbf{T})\mathbf{X}' = \mathbf{X}'^T\mathbf{G}'\mathbf{X}',$$

одакле следи тврђење. □

Задатак 3.45 Криву другог реда $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3 = 0$ свести на канонски облик, одредити шта она представља и написати формуле трансформације координата.

Решење: Матрица криве је

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Њене сопствене вредности су

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6,$$

а одговарајући сопствени вектори редом $(-2,0,1), (-1,1,0), (1,1,2)$. Нормирани сопствени вектори чине колоне матрице $\mathbf{T}$ преласка са координата $X(x_1 : x_2 : x_3)$ на координате $X'(x_1' : x_2' : x_3')$, то јест, $\lambda\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}'$. Дакле,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{T}$ је (у општем случају) ортогонална, то јест, има особину $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$. Зато је у новим координатама матрица криве (види Задатак 3.44):

$$\mathbf{G}' = \mathbf{T}^T\mathbf{G}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{T} = \mathbf{diag}(6,0,0),$$

а једначина криве

$$6{x_1'}^2 = 0,$$

што је еквивалентно са

$$x_1'^{\,2} = 0.$$

Последња једначина представља канонски облик криве (види Теорему 1.5) из ког закључујемо да је у питању права. Трансформације координата дате су матрицом $\mathbf{T}$. $\square$

Напомена 3.7 Крива из претходног задатка може се једноставније свести на канонски облик. Приметимо да је

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2.$$

Зато трансформацијом облика $\lambda x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3$ крива постаје $x_1'^2 = 0$. Остале формуле трансформације су произвољне, рецимо $\lambda x_2' = x_2, \lambda x_3' = x_3$.

Напомена 3.8 У општем случају се након трансформације координата $\lambda\mathbf{X} = \mathbf{TX}'$ добија матрица криве $\mathbf{G}' = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где су $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, сопствене вредности матрице $\mathbf{G}$. Зато је, након те трансформације, крива облика $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0$, па је потребно извршити још и трансформацију координата $\lambda x_i'' = \sqrt{|\lambda_i|}x_i', i = 1, 2, 3$, како би се добио канонски облик.

Задатак 3.46 Следеће криве другог реда свести на канонски облик:

а) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$.

Задатак 3.47 Одредити општи облик кривих другог реда инваријантних при хармонијској хомологији

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= -x_1, \\ \lambda x_2' &= \quad x_2, \\ \lambda x_3' &= \quad x_3. \end{aligned}$$

3.3.1 Пол и полара

Дефиниција 3.7 Полара тачке X у односу на недегенерисану криву другог реда Γ чија је матрица $\mathbf{G} = (g_{ij})$ је права U, таква да важи

$$\lambda \mathbf{U} = \mathbf{GX}. \tag{3.5}$$

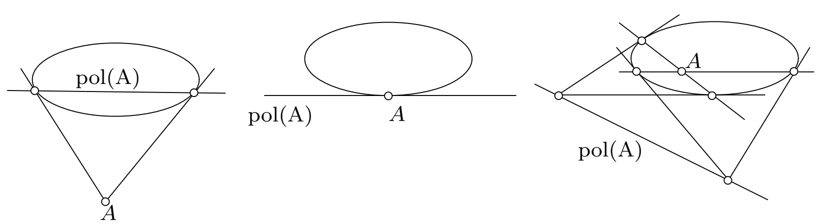
Тачку X називамо **пол праве U (у односу на криву Γ)**.

Напомена 3.9 Задаци 3.44 и 3.34 *б*) објашњавају геометријску суштину поларитета. Наиме, сваки поларитет је задат недегенерисаном кривом другог реда.

Задатак 3.48 Доказати да је недегенерисана крива другог реда скуп самонконјугованих тачака у поларитету који она дефинише.

Решење: Нека је $\mathbf{G}$ матрица криве и X произвољна тачка. Полара тачке X је права чији је вектор $\mathbf{GX}$. Тачка X је самоконјугована, ако припада својој полари, то јест, ако важи $0 = \mathbf{X}^T(\mathbf{GX}) = \mathbf{X}^T\mathbf{GX}$, то јест, ако X припада кривој. □

Напомена 3.10 Сада је јасно да Задатак 3.38 тврди да недегенерисана крива другог реда и права имају само две пресечне тачке.



Задатак 3.49

Задатак 3.49 На основу претходног и Задатка 3.37, доказати да за недегенерисану криву другог реда важи:

а) ако је тачка изван криве другог реда, полара тачке A је права a одређена додирним тачкама тангенти из A на криву;

б) ако тачка A припада кривој, њена полара је тангета криве у тачки A;

в) ако је тачка A унутар криве, њена полара је одређена половима ма којих двеју правих које је садрже.

Задатак 3.50 Дата је крива другог реда $\Gamma : 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$. У односу на њу одредити

а) полару тачке $A(1:0:1)$;

б) пол праве $q : x_3 = 0$.

Решење: *а*) Означимо са $\mathbf{G}$ матрицу дате криве. Вектор поларе тачке A је $\mathbf{GA}(2,-1,-2)$, па је $\mathrm{pol}(A) = [2 : -1 : -2]$.

б) Означимо са $U[0 : 0 : 1]$ полару q, а са X тражени пол. Из $\lambda\mathbf{U} = \mathbf{GX}$, следи $\mathbf{X} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{U}$, одакле добијамо координате траженог пола $X(6:4:7)$. □

Задатак 3.51 Ако темена четворотеменика $ABCD$ припадају недегенерисаној кривој другог реда, онда полара његове дијагоналне тачке (у односу на ту криву) садржи преостале две дијагоналне тачке.

Упутство: Три темена четворотеменика одабрати за базне тачке, а четврто за јединичну. Из услова да она припадају кривој добија се њен облик:

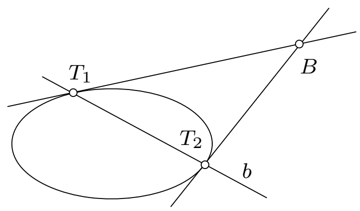
$$\Gamma(g) : gx_1x_2 + x_1x_3 - (g+1)x_2x_3 = 0.$$

Преостаје да се одреде координате дијагоналних тачака P, Q и R и покаже да важи $Q, R \in \mathrm{pol}(P)$. □

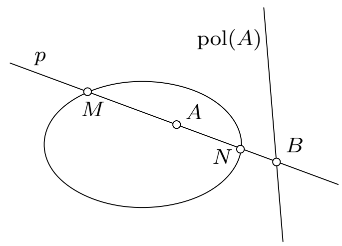
Задатак 3.52 Шта представља скуп полова дате праве p у односу на криве другог реда описане око датог четворотеменика?

Задатак 3.53 Одредити једначине тангенти из тачке $A(3 : -2 : 2)$ на криву $3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

Упутство: Одредити полару a тачке A. Пресечне тачке (ако постоје) T_1 и T_2 праве a и криве другог реда су додирне тачке тангенти. Тражене тангенте су зато AT_1 и AT_2. □



Задатак3.53



Задатак 3.56

Дефиниција 3.8 Тачке A и B називамо **конјугованим у односу на криву другог реда** Γ, ако важи $\mathcal{H}(A, B; M, N)$ где су M и N (могуће комплексни) пресеци праве AB и криве Γ (види Задатак 3.56). Слично, две праве су **конјуговане у односу на криву другог реда** Γ, ако пресечне тачке произвољне праве са њима и кривом чине хармонијску четворку.

Задатак 3.54 Доказати да је геометријско место тачака конјугованих тачки A у односу на криву другог реда Γ полара тачке A у односу на ту криву.

Задатак 3.55 Доказати да су тачке A и B конјуговане у односу на криву другог реда Γ ако и само ако су оне конјуговане у поларитету који она дефинише (у смислу Напомене 3.6).

Задатак 3.56 На правој $p : 2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$ одредити тачку B конјуговану тачки $A(-1 : 2 : 1)$ у односу на криву другог реда $\Gamma : x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$.

Упутство: Тражена тачка се налази у пресеку праве p и поларе тачке A у односу Γ. Полара тачке A се једноставно одређује: $\mathrm{pol}(A) : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$, одакле добијамо пресечну тачку $B(5 : 1 : 1)$. $\square$

Задатак 3.57 Дат је тротеменик, недегенерисана крива другог реда која садржи његова темена и поларитет одређен њоме. Доказати да права конјугована са једном страном тротеменика сече друге две стране у конјугованим тачкама.

3.3.2 Криве другог реда у афиној равни

Задатак 3.58 Одредити једначину круга $x^2 + y^2 = 1$ проширене афине равни у систему координата чије базне тачке имају афине координате $A_1(1, 0), A_2(0, 1), A_3(-1, 0)$, а тачка јединице $B(0, -1)$. Коју криву другог реда он представља у новом афином систему координата?

Решење: Нека је $(x_1 : x_2 : x_3)$ пројективни координатни систем који одговара афиним координатама (x, y), а $(x_1' : x_2' : x_3')$ нови пројективни координатни систем. Тада су координате датих тачака:

тачке	$(x_1 : x_2 : x_3)$	$(x_1' : x_2' : x_3')$
A_1	$(1 : 0 : 1)$	$(1 : 0 : 0)$
A_2	$(0 : 1 : 1)$	$(0 : 1 : 0)$
A_3	$(-1 : 0 : 1)$	$(0 : 0 : 1)$
B	$(0 : -1 : 1)$	$(1 : 1 : 1)$

Решавањем система $\lambda \mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}'$, добијамо везу између њих:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x_1 & = & x_1' & & & - & x_3', \\ \lambda x_2 & = & & - & x_2', & & \\ \lambda x_3 & = & x_1' & - & x_2' & + & x_3'. \end{array}$$

Преостаје да се у једначину круга у старим хомогеним координатама $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ замене горње формуле. После сређивања добија се

$$x_1'x_2' - 2x_1'x_3' + x_2'x_3' = 0, \quad \text{односно афино,} \quad xy - 2x + y = 0. \tag{3.6}$$

Приметимо да су тачке A_1 и A_2 које припадају кругу у новом систему координата бесконачно далеке (види табелу), па стога једначина (3.6) у афином систему координата представља хиперболу. □

Задатак 3.59 Одредити једначину недегенерисане криве другог реда која додирује x–осу у тачки $(3, 0)$, y–осу у тачки $(0, 2)$ и додирује бесконачно далеку праву.

Решење: Разматрајмо све у пројективној равни. x и y–оса су поларе датих тачака у односу на тражену криву која је одређена са $\mathbf{X}^T\mathbf{G}\mathbf{X} = 0$. Из формула поларног пресликавања добијамо

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

односно

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где је $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Решавањем горњег система долазимо до облика матрице криве

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dfrac{\lambda_2 + 3g_{11}}{2} & -3g_{11} \\ \dfrac{\lambda_2 + 3g_{11}}{2} & \dfrac{9}{4}g_{11} & -\dfrac{9}{2}g_{11} \\ -3g_{11} & -\dfrac{9}{2}g_{11} & 9g_{11} \end{pmatrix},$$

односно, дељењем са $\dfrac{g_{11}}{4}$ (важи $g_{11} \neq 0$, иначе би крива била дегенерисана, а није)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 2(g+3) & -12 \\ 2(g+3) & 9 & -18 \\ -12 & -18 & 36 \end{pmatrix}, \quad g \in \mathbb{R}.$$

Искористимо услов додира са бесконачно далеком правом, то јест, у једнакост

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 36x_3^2 + 4(g+3)x_1x_2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 = 0,$$

уврстимо $x_3 = 0$. Добијамо

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 4(g+3)x_1x_2 = 0.$$

Поделимо горњу једнакост са x_2^2 и означимо $z = \dfrac{x_1}{x_2}$:

$$4z^2 + 4(g+3)z + 9 = 0.$$

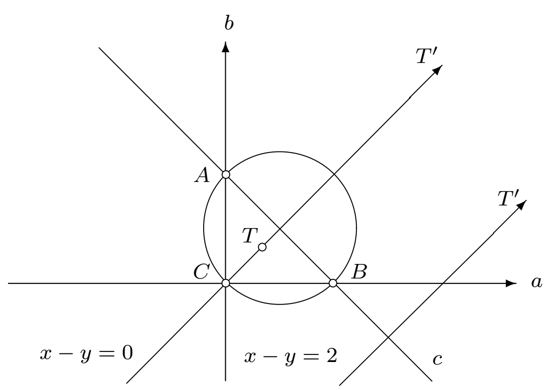
Због услова додира, дискриминанта ове квадратне једначине мора бити једнака нули. То је тако за $g = 0$ и $g = 6$, но први случај није могућ (због $\lambda_2 = gg_{11} = 0$), па је тражена крива:

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 36x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 = 0.$$

□

Задатак 3.60 У хомогеним координатама одредити формуле трансформације f афине равни, која праве $a : x = 0$, $b : y = 0$ и $c : y = 1-x$ преводи редом у праве b, c и a, а тежиште троугла $\triangle ABC$ чије странице припадају датим правама у пресек правих $p : x - y = 0$ и $q : x - y = 2$. Која се права трансформише у бесконачно далеку? Која крива је слика описаног круга троугла $\triangle ABC$?

Решење: Једначине правих p и q у хомогеним координатама су $x_1 - x_2 = 0$, односно $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, одакле једноставно добијамо да се у њиховом пресеку налази тачка $T'(1 : 1 : 0)$. Даље, приметимо да се тачка која се налазе у пресеку двеју правих мора трансформисати у пресек слика тих правих. Како је $T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ и ако означимо $b \times c = A(1,0), a \times c = B(0,1)$ и $a \times b = C(0,0)$, онда је трансформација одређена са $f : A, B, C, T \barwedge B, C, A, T'$.



Задатак 3.60

Преласком на хомогене координате, познатим поступком, добијамо матрицу трансформације

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Како важи $\lambda\mathbf{U} = \mathbf{P}^T\mathbf{U}'$, праву која се пресликава у бесконачно далеку праву $x_3 = 0$ (то јест, $[0:0:1]$), одређујемо из

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Дакле, права $3x_2 - x_3 = 0$ се трансформише у бесконачно далеку праву. Приметимо да она садржи тежиште T, па тиме сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у двема тачкама које после трансформације постају бесконачно далеке што значи да је, афино посматрано, слика круга хипербола. □

Задатак 3.61 Дате су тачке афине равни: $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ и $D(0,1)$.

а) У хомогеним координатама одредити формуле трансформације f при којој су тачке A и C инваријантне, док се тачке B и D трансформишу редом у бесконачно далеке тачке правих AB и AD.

б) Одредити слике унутрашњости квадрата $ABCD$, као и круга $k(C, CB)$ при трансформацији f. Која је афина једначина криве $f(k)$?

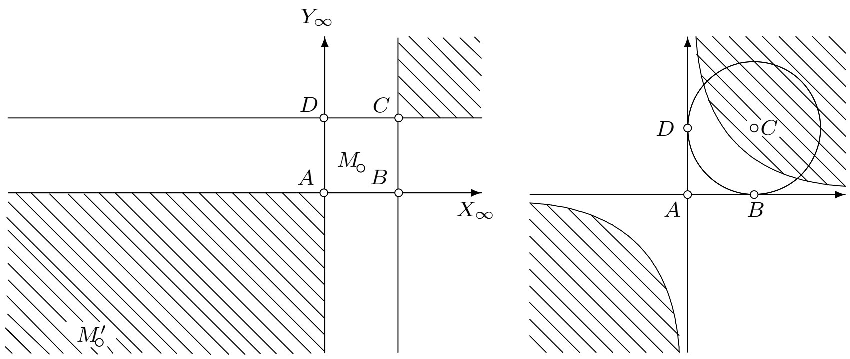
Решење: *а*) Бесконачно далеке тачке правих AB и AD имају хомогене координате $X_\infty(1:0:0)$ и $Y_\infty(0:1:0)$. Пројективну трансформацију одређујемо са четири пара одговарајућих тачака:

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= x_1 \\ \lambda x_2' &= \phantom{x_1 + {}} x_2 \\ \lambda x_3' &= x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

б) Праве AB, BC, CD и DA које ограничавају квадрат трансформација f преводи редом у те исте праве $AX_\infty, X_\infty C, CY_\infty$ и $Y_\infty A$ које чине и границу слике квадрата. Но, како оне пројективну раван деле на 7 области то треба одредити у коју од њих се трансформисала унутрашњост квадрата. За то је довољно узети било коју тачку из унутрашњости квадрата и одредити тачку у коју се она трансформише. Тако је, на пример, $f(M(3:2:6)) = M'(-3:-2:1)$, па је тражена област она која садржи M'.

Афина једначина круга је $k : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, то јест, $x^2 + y^2 - 2x - 2y = -1$, одакле добијамо њен облик у хомогеним координатама

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0. \tag{3.8}$$



Задатак 3.61

Из формула (3.7) добијамо $x_1 = x_1', x_2 = x_2', x_3 = x_1' + x_2' - x_3'$, па заменом у једначину (3.8) и након сређивања долазимо до пројективне једначине слике круга $k' : 2x_1'x_2' = x_3'$, то јест, афино $x'y' = \dfrac{1}{2}$. Дакле, у питању је хипербола. Унутрашњост круга се пресликава у унутрашњост хиперболе (зато што је појам унутрашњосте криве другог реда инваријантан у односу на пројективне трансформације). □

Задатак 3.62 Одредити бар једну пројективну трансформацију која преводи

а) $x^2 - y^2 = 1$ у $y = x^2$;

б) $x^2 + y^2 = 1$ у $x^2 - y^2 = 1$;

в) $x^2 + y^2 = 1$ у $y = x^2$;

г) $x^2 - y^2 = 0$ у $x^2 = 1$.

Одредити затим њене формуле у афиним координатама.

Решење: *а*) Хомогена једначина дате хиперболе је $x_2^2 - (x_1^2 - x_3^2) = 0$, а параболе $x_1'^2 - x_2'x_3' = 0$. Уочимо да трансформација дата формулама

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' & = & x_2, \\ \lambda x_2' & = & x_1 + x_3, \\ \lambda x_3' & = & x_1 - x_3, \end{array}$$

испуњава услов задатка. Њен афини облик је

$$x' = \frac{y}{x-1},$$
$$y' = \frac{x+1}{x-1}.$$

Преостали случајеви се решавају на сличан начин. □

Напомена 3.11 Непосредна последица претходног задатка је да се елипса, парабола и хипербола у пројективној равни не разликују, као ни пар паралелних правих и две праве које се секу.

Задатак 3.63 У проширеној афиној равни дата је парабола $y^2 = 4x$. Одредити њену једначину у новом пројективном систему координата чије су базне тачке $A_1(1,0), A_2(-1,2)$ и $A_3(-1,-2)$, а тачка јединице $B(0,0)$.

Задатак 3.64 Доказати да је пол бесконачно далеке праве у односу на елипсу или хиперболу њен центар.

Решење: Нека произвољна права p сече криву другог реда у тачкама M и N, а бесконачно далеку праву у тачки P_∞. На основу Задатака 3.54, пол бесконачно далеке праве је тачка B, која задовољава $\mathcal{H}(B, P_\infty; C, D)$. Како је тачка B средиште дужи MN, она је центар елипсе, односно хиперболе. □

Напомена 3.12 Парабола додирује бесконачно далеку праву у бесконачно далекој тачки своје осе. Ту тачку сматрамо центром параболе, тако да тврђење важи и у овом случају.

3.4 Примена на проблеме афине равни

Задатак 3.65 Дат је трапез $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Нека је $P = AD \times BC$, $Q = BD \times AC$, и нека су тачке R и S редом средишта дужи DC и AB. Доказати:

а) тачке P, Q, R и S су колинеарне;

б) важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Решење: Нека је $A'B'C'D'$ произвољан квадрат допуњене афине равни (којој припада и трапез) и нека је f пројективно пресликавање те равни одређено са

$$f : A', B', C', D' \barwedge A, B, C, D.$$

Означимо са P', Q', R' и S' редом бесконачно далеку тачку праве $A'D'$, пресек $A'C' \times B'D'$ и средишта дужи $D'C'$ и $A'B'$. Означимо са K и K' редом бесконачно далеке тачке правих AB и $A'B'$. Пошто је

$$K = AB \times CD, \quad K' = A'B' \times C'D',$$

важи $f(K') = K$. Слично, важи и $f(P') = P$ и $f(Q') = Q$. Како је

$$\mathcal{H}(A, B; S, K), \quad \mathcal{H}(A', B'; S', K'),$$

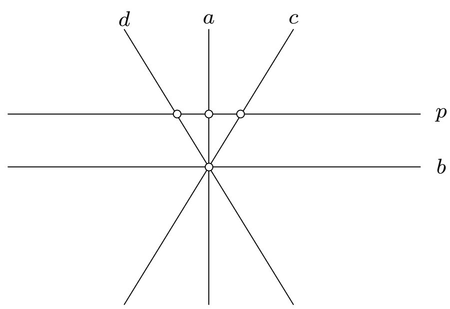
закључујемо да важи $f(S') = S$, на основу јединствености четврте хармонијски конјуговане тачке и јер f чува хармонијску конјугованост. Слично, важи $f(R') = R$.

Дакле, $f : P', Q', R', S' \barwedge P, Q, R, S$. Како су тачке P', Q', R' и S' колинеарне и хармонијски конјуговане, такве су и њихове слике P, Q, R и S, чиме су тврђења *а*) и *б*) доказана. □

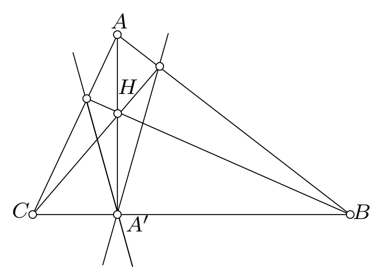
Задатак 3.66 Дате су конкурентне праве a, b, c и d, такве да важи $a \perp b$. Доказати да је права a симетрала угла $\measuredangle(b, c)$ ако и само ако важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.

Решење: Проблем разматрамо у проширеној афиној равни. Услов $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ је еквивалентан са тим да права p, паралелна правој b, сече праве a, b, c и d у хармонијски конјугованим тачкама A, B, C и D.

Како се праве p и b секу у бесконачно далекој тачки праве p, а тачка A је средиште дужи CD, тврђење следи на основу Задатка 2.7. $\square$



Задатак 3.66



Задатак 3.67

Задатак 3.67 Доказати да висине AA', BB' и CC' произвољног неправоуглог троугла $\triangle ABC$ полове углове троугла $\triangle A'B'C'$.

Решење: Нека је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Како су A', B' и C' дијагоналне тачке потпуног четворотеменика $ABCH$, важи

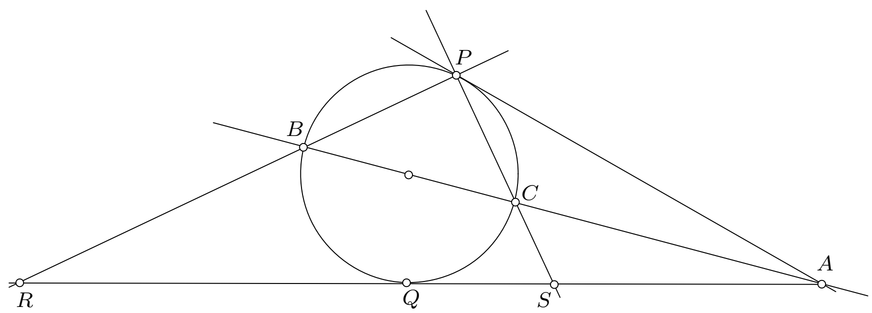
$$(A'B', A'C'; A'A, A'B) = -1.$$

Будући да важи $A'A \perp A'B$, на основу Задатка 3.66, следи $\measuredangle B'A'A = \measuredangle AA'C'$, то јест, AA' је симетрала угла код темена A' троугла $\triangle A'B'C'$. Аналогно се доказују и преостала два случаја. $\square$

Задатак 3.68 Нека се тангенте круга са додирним тачкама P и Q секу у тачки A и нека је BC пречник круга који садржи тачку A. Доказати да тачке A и Q хармонијски раздвајају пар тачака R, S у којима праву AQ секу праве PB и PC. Шта се може закључити у случају када је једна од тачака R, S бесконачно далека?

Решење: Како важи $PS \perp PR$ (угао над пречником) и $\measuredangle QPS = \measuredangle SPA$ (став о периферијским угловима), на основу Задатка 3.6, следи

$$(PA, PQ; PR, PS) = (A, Q; R, S) = -1.$$



Задатак 3.68

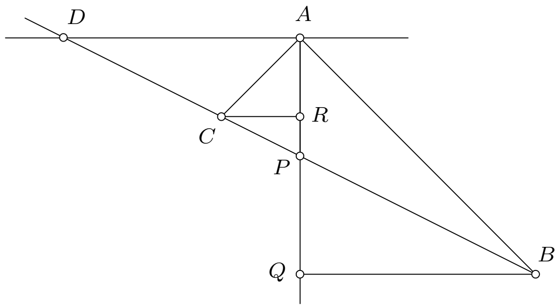
Ако је тачка R бесконачно далека, онда је четвороугао $BPAQ$ паралелограм, штавише, због симетрије у односу на праву AB, у питању је ромб. Из $\measuredangle PBQ = \measuredangle PQA$, следи да је тај ромб разложив на два подударна једнакостранична троугла $\triangle PBQ$ и $\triangle QAP$. Пошто је $(A, Q; R, S) = -1$, а R бесконачна тачка, то је S средиште дужи AQ. Стога је PS висина једнакостраничног троугла $\triangle QAP$, а она садржи тачку C датог круга. Према томе: *Ако две странице једног једнакостраничног троугла додирују један круг у два темена, онда се његове висине секу у тачки која припада кругу.* $\square$

Задатак 3.69 Ако су AP, BQ и CR висине троугла $\triangle ABC$ афине равни, онда су праве PQ, PR, PA и PB хармонијски конјуговане.

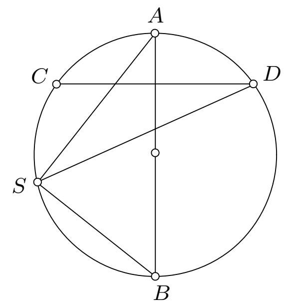
Упутство: $\mathcal{H}(PQ, PR; PA, PB)$ следи на основу претходна два задатка ако се разматра потпуни четворотеменик $PCQS$ где је S ортоцентар троугла. $\square$

Задатак 3.70 Симетрала угла код темена A троугла $\triangle ABC$ сече његову супротну страницу у тачки P. Нека су Q и R ортогоналне пројекције тачака B и C на праву AP. Доказати да су тачке A, P, Q и R хармонијски конјуговане.

Решење: Нека је тачка D пресек нормале на праву AP у тачки A и праве BC. Онда важи $AP \perp AD, \measuredangle CAP = \measuredangle PAB$, одакле закључујемо да важи $(AB, AC; AP, AD) = -1$, што имплицира једнакост $-1 = (B, C; P, D) = (A, P; R, Q)$. $\square$



Задатак 3.70



Задатак 3.72

Задатак 3.71 Ако су L, M и N редом средишта страница BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$, онда је четворка правих LM, LN, LA, LB хармонијска.

Задатак 3.72 Ако је AB пречник круга, а CD тетива нормална на AB, онда четири праве које садрже било коју тачку круга и редом тачке A, B, C и D образују хармонијску четворку. Доказати.

Решење: Нека је S тачка која припада кругу. Угао $\measuredangle(SA, SB)$ је прав, а такође су SA и SB симетрале углова које заклапају праве SC и SD, па тврђење следи на основу Задатка 3.66. $\square$

Глава 4

Пројективни простор

4.1 Координате у пројективном простору

Задатак 4.1 У проширеном еуклидском простору уведене су хомогене координате базним тачкама A_1, A_2, A_3, A_4 и тачком јединице B.

а) Доказати да за координате коначне тачке M важи $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (\frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3} : \frac{d_4}{e_4})$, где су d_i и e_i растојања редом тачака M и B од равни којој припада страна тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ која не садржи тачку $A_i, i = 1, 2, 3, 4$.

б) Доказати да за координате коначне равни α важи $[u_1 : u_2 : u_3 : u_4] = (\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} : \frac{\delta_2}{\varepsilon_2} : \frac{\delta_3}{\varepsilon_3} : \frac{\delta_4}{\varepsilon_4})$, где су δ_i и ε_i растојања базних тачака $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, редом од равни α и од равни са координатама $[1 : 1 : 1 : 1]$.

Задатак 4.2 Одредити једначину праве која садржи тачку $A(2 : 0 : 1 : -3)$ и која сече две праве: праву p која садржи тачке $P_1(1 : -1 : 0 : 4)$ и $P_2(-2 : 0 : -4 : 3)$ и праву q која је пресек равни $\alpha_1[2 : 5 : -3 : 0]$ и $\alpha_2[3 : -2 : 2 : 1]$.

Решење: Нека је a права која садржи тачку A и произвољну тачку P праве P_1P_2. Одредићемо тачку P тако да права a сече праву q. Тада ће права PA бити тражена права.

За произвољну тачку $P \in P_1P_2$ важи

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_1 + \mu \mathbf{P}_2 = (\lambda - 2\mu, -\lambda, -4\mu, 4\lambda + 3\mu), \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 + \mu^2 > 0.$$

За вектор тачке X праве AP важи

$$\mathbf{X} = \nu \mathbf{A} + \eta \mathbf{P} = \nu \mathbf{A} + \mathbf{P} = (2\nu + \lambda - 2\mu, -\lambda, \nu - 4\mu, -3\nu + 4\lambda + 3\mu), \ \ \nu \in \mathbb{R},$$

при чему смо $\eta = 1$ могли изабрати уз претпоставку $X \neq A$. Заменом координата тачке X у једакости $2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$ и $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ добијамо систем

$$\begin{aligned} \nu - 3\lambda + \ \ 8\mu &= 0, \\ 5\nu + 9\lambda - 11\mu &= 0. \end{aligned}$$

Из њега, елиминацијом параметра ν, добијамо $\lambda = \dfrac{17}{8}\mu$, то јест, да је тачка P за коју права PA сече праву Q дата са $P(1 : -17 : -32 : 92)$. Тражена права је $a = PA$. $\square$

Задатак 4.3 Одредити једначину праве која припада равни $[1 : 0 : -2 : 3]$ и која сече две праве: праву која садржи тачке $(2 : 3 : -4 : 0)$ и $(0 : 3 : -4 : 0)$ и праву која је пресек равни $[2 : 0 : -3 : 0]$ и $[1 : 5 : 4 : 3]$.

Задатак 4.4 Дате су тачке $P(1 : 1 : 1 : 0)$ и $Q(-1 : 0 : 2 : 0)$. Одредити све равни прамена PQ и дати афино тумачење.

Решење: Раван прамена PQ одредимо у облику $\alpha : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$. Уврштавањем тачака P и Q у једнакост α добијамо систем

$$a + b + c = 0, \quad -a + 2c = 0,$$

одакле су тражене равни облика $c(2x_1 - 3x_2 + x_3) + dx_4 = 0$, при чему вредности c и d нису истовремено једнаке нули. За $c = 0$ добијамо бесконачно далеку раван, што одговара чињеници да јој права PQ припада, јер је одређена бесконачно далеким тачкама. Преласком на афине координате добијамо

$$2x - 3y + z + \frac{d}{c} = 0. \tag{4.1}$$

Дакле, пресек паралелних равни (4.1) и бесконачно далеке равни је права PQ. □

Задатак 4.5 (**Мебиусова теорема**) Ако четири темена једног тетраедра припадају странама другог и три темена другог припадају странама првог тада и четврто теме другог припада страни првог.

Задатак 4.6 Нека је π раван која не садржи ни једно од темена тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ и M_{ij} тачка пресека равни π са ивицом $A_iA_j, 1 \leq i, j \leq 4$. Нека је тачка P_{ij} хармонијски конјугована тачки M_{ij} у односу на пар тачка A_i, A_j. Доказати да три праве $P_{ij}P_{kl}$ и шест равни $P_{ij}A_kA_l$ ($(ijkl)$ је ма која пермутација скупа (1234)) садрже исту тачку Q.

4.2 Трансформације пројективног простора

Задатак 4.7 Праве A_1B, A_2B, A_3B, A_4B које редом садрже базне тачке A_1, A_2, A_3, A_4 и јединичну тачку B секу редом наспрамне стране $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ у тачкама E_1, E_2, E_3, E_4. Одредити једначине пројективне трансформације при којој је тачка B инваријантна и којом се тачке A_i се трансформишу у тачке $E_i, i = 1, \ldots, 4$.

Задатак 4.8 У пројективном простору уведен је систем координата базним тачкама A_1, A_2, A_3, A_4 и тачком јединице B.

а) Одредити пројективну трансформацију при којој су тачке A_1 и A_2 и све тачке праве A_3A_4 инваријантне.

б) Која пројективна трансформација је индукована на равни $A_1A_3A_4$?

в) Која пројективна трансформација је индукована на ивицама тетраедра $A_1A_2A_3A_4$?

Решење: *а*) Директно се проверава да је тражена трансформација облика

$$\lambda x_1' = ax_1, \;\; \lambda x_2' = bx_2, \;\; \lambda x_3' = cx_3, \;\; \lambda x_4' = cx_4,$$

где је $a, b, c \neq 0$. При томе важи

- $a = b$ ако и само ако је свака тачка праве A_1A_2 инваријантна,
- $a = c = b$ ако и само ако је трансформација идентичка и
- $a = c, b \neq c$, односно $b = c, a \neq c$ ако и само ако је свака тачка равни $A_3A_4A_1$, односно $A_3A_4A_2$ инваријантна.

б) Раван $A_1A_3A_4$ је инваријантна (инваријантне су три тачке које јој припадају) и има једначину $x_2 = 0$. На њој је индукована хиперболичка хомологија са осом A_3A_4 и центром A_1 ако важи $a \neq c$, а идентичка трансформација уколико је испуњено $a = c$.

в) Све ивице су инваријантне. На ивици A_1A_2 је индукована хиперболичка трансформација ако је $a \neq b$, а иначе идентичка. На ивици A_3A_4 индукован је идентитет. Од осталих ивица размотиримо, на пример, ивицу A_1A_3. Урадимо то аналитички. Ивица A_1A_3 задата је једначинама $x_2 = 0, x_4 = 0$, па зато за хомогене координате на њој можемо одабрати $(x_1 : x_3)$ и индукована трансформација је дата са

$$\lambda x_1' = a x_1, \quad \lambda x_3' = c x_3.$$

Одатле закључујемо да је на ивици A_1A_3 индукован идентитет ако важи $a = c$, а хиперболичка трансформација иначе. Остале ивице се могу разматрати аналогно. □

Задатак 4.9 Доказати да је подгрупа групе пројективних трансформација које остављају инваријантним две мимоилазне праве изоморфна директном производу група реалних квадратних матрица реда 2, то јест,

$$(Gl(2,\mathbb{R}) \times Gl(2,\mathbb{R}))/_{\sim}$$

где је $\sim$ релација еквиваленције $(A, B) \sim (\lambda A, \lambda^{-1} B)$, $\lambda \neq 0$.

Задатак 4.10 У пројективном простору уведен је систем координата базним тачкама A_1, A_2, A_3, A_4 и тачком јединице B.

а) Одредити пројективну трансформацију при којој су само A_1 и A_2 инваријантне тачке и само A_3A_4 инваријантна права.

б) Каква пројективна трансформација је индукована на правама A_1A_2 и A_3A_4? Када је та трансформација инволуција?

4.3 Површи другог реда

Задатак 4.11 Одредити пројективни тип следећих површи другог реда:

а) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+6x_3x_4=0;$

б) $x_1^2+4x_2x_3-x_4^2=0;$

в) $x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+2x_3x_4=0;$

г) $2x_1^2-x_1x_2-3x_2^2+2x_1x_3-3x_2x_3-x_1x_4+4x_2x_4+x_3x_4-x_4^2=0.$

Решење: *а*) Карактеристични полином матрице површи другог реда је $\chi_{\mathbf{G}}(\lambda)=\lambda^4-8\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda-1$. Детаљнија анализа показује да су три сопствене вредности позитивне, а једна негативна. Зато је дата површ овална површ.

б) Сопствене вредности су $-2,-1,1,$ и 2, па се ради о тороидалној површи.

в) Карактеристични полином је $\chi_{\mathbf{G}}(\lambda)=\lambda(\lambda^3-5\lambda^2-3\lambda+2)$. Једна сопствена вредност је нула, две позитивне, а једна негативна, па се ради о конусу.

г) Карактеристични полином је $\chi_{\mathbf{G}}(\lambda)=\lambda^2(\lambda+2\lambda-13)$, па се површ састоји од две равни: $2x_1-3x_2+x_4=0$ и $x_1+x_2+x_3-x_4=0$. □

Задатак 4.12 Којим бесконачно далеким тачкама треба допунити

а) двограни хиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1;$

б) елиптички параболоид $x^2+y^2=z$

до овалне површи другог реда? Одредити пројективну трансформацију између те две површи.

Решење: *а*) Двограни хиперболоид треба допунити бесконачно далеким тачкама конуса $x^2+y^2-z^2=0$. У хомогеним координатама те се тачке могу записати као пресек конуса и бесконачно далеке равни, то јест,

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,\;\; x_4=0.$$

Дељењем прве једначине са x_3^2 и преласком на афине координате (у бесконачно далекој равни) $\xi = \dfrac{x_1}{x_3}, \eta = \dfrac{x_2}{x_3}$ добијамо да је тај скуп заправо круг

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Дакле, двограни хиперболоид се добија избором оне бесконачно далеке равни која овалну површ сече по кругу.

б) Елиптички параболоид довољно је допунити бесконачно далеком тачком $(0 : 0 : 1 : 0)$ осе Oz. Дакле, елиптички параболоид се добија избором оне бесконачно далеке равни која додирује овалну површ.

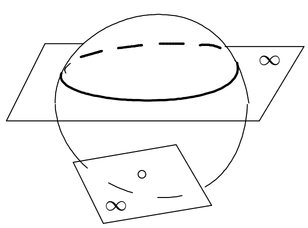
Да бисмо одредили формуле трансформације хиперболоида у параболоид запишимо их у хомогеним координатама

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0, \quad x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'x_4' = 0.$$

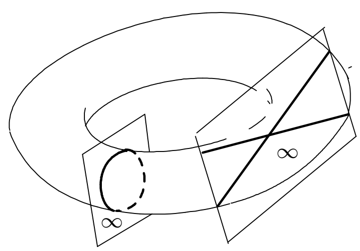
Лако се проверава да је једна тражена трансформација:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= x_1, \\
\lambda x_2' &= x_2, \\
\lambda x_3' &= x_3 + x_4, \\
\lambda x_4' &= x_3 - x_4.
\end{aligned}$$

□



Задатак 4.12



Задатак 4.13

Задатак 4.13 Којим бесконачно далеким тачкама треба допунити

а) једнограни хиперболоид $\quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

б) хиперболички параболоид $\quad x^2 - y^2 = z$

до торусне површи другог реда? Одредити пројективну трансформацију између те две површи.

Решење: *а*) Једнограни хиперболид треба допунити бесконачно далеким тачкама конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (елипса).

б) Хиперболоички параболоид треба допунити бесконачно далеким тачкама двеју равни $x^2 - y^2 = 0$ (две праве које се секу).

Трансформација се одређује слично као у претходном задатку. □

Задатак 4.14 Којим бесконачно далеким тачкама треба допунити

а) конус $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0;$

б) елиптички цилиндар $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

в) хиперболички цилндар $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

г) параболички цилиндар $\quad y^2 = 2px$

до конусне површи другог реда? Одредити пројективну трансформацију између тих површи.

Задатак 4.15 У пројективном простору је дата површ другог реда.

а) Доказати је њена тангентна раван сече по кривој другог реда која се разлаже на пресек две праве.

б) Доказати да су пресечне праве из дела *а*)

- имагинарне и секу се у тачки додира у случају овалне површи,
- реалне и секу се у тачки додира у случају торусне површи,
- једна двострука реална права у случају конусне површи.

Задатак 4.16 Одредити једначине фамилије површи другог реда које додирују раван $x_1 = 0$ у тачки $(0 : 0 : 1 : 0)$, а раван $x_2 = 0$ у тачки $(0 : 0 : 0 : 1)$.

Задатак 4.17 У простору је дато седам тачака од којих никоје три нису колинеарне и никоје четири нису компланарне. Доказати да постоји осма тачка таква да свака површ другог реда која садржи датих седам тачака садржи и осму тачку.

Глава 5

Афине трансформације са пројективне тачке гледишта

5.1 Афине трансформације простора $\mathbb{R}^n$

Дефиниција 5.1 Афина трансформација простора $\mathbb{R}^n$ је трансформација која је у неким (па дакле и у сваким) афиним координатама $(x_1, \dots, x_n)^T$ облика

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + v_1, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + v_n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

и таква да важи $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ представља **линеарни део**, а вектор координата $\mathbf{v}(v_1, \dots, v_n)^T$ **транслаторни део** трансформације (5.1). Зато њу означавамо са $(\mathbf{A}, \mathbf{v})$ и матрично записујемо

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{v}. \tag{5.2}$$

Афине трасформације чине групу у односу на композицију, коју означавамо са $Aff(n)$, где је n димензија одговарајућег афиног простора.

Трансформације облика (5.2) за $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ чине **подгрупу линеарних трансформација** простора $\mathbb{R}^n$, која је изоморфна групи $Gl(n)$. Подсећамо да су колоне матрице $\mathbf{A}$ слике базних вектора координатног система.

Трансформације облика (5.2) за $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ чине **подгрупу транслација** $T(n)$ простора $\mathbb{R}^n$ која је изоморфна адитивној Абеловој групи $\mathbb{R}^n$.

Из аналитичке геометрије позната је следећа теорема:

Теорема 5.1 Афина трасформација има следеће особине:

а) бијекција је;

б) чува однос дељења дужи;

в) равни пресликава у равни исте димензије и чува њихову паралелност;

г) однос запремина слике $\mathcal{M}'$ лика $\mathcal{M}$ и оригинала једнак је апсолутној вредности детерминанте матрице $\mathbf{A}$.

Задатак 5.1 *а*) Одредити композицију две афине трансформације.

б) Доказати да је подгрупа транслација $T(n)$ нормална подгрупа групе $Aff(n)$.

Решење: *а*) Одредимо композицију афиних трансформација $(\mathbf{A}, \mathbf{v})$ и $(\mathbf{B}, \mathbf{w})$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Gl(n)$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, тако што ћемо их применити на вектор координата $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{B}, \mathbf{w}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{v}))(\mathbf{X}) &= (\mathbf{B}, \mathbf{w})(\mathbf{AX} + \mathbf{v}) = (\mathbf{B}(\mathbf{AX} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}) = \\ &= ((\mathbf{BA})\mathbf{X} + (\mathbf{Bv} + \mathbf{w})) = (\mathbf{BA}, \mathbf{Bv} + \mathbf{w})(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Дакле, множење (то јест, композиција) у афиној групи је дато са

$$(\mathbf{B}, \mathbf{w}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{v}) = (\mathbf{BA}, \mathbf{Bv} + \mathbf{w}). \tag{5.3}$$

б) Треба показати да важи $L_{\mathbf{A}}^{-1} T_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{A}} \in T(n) \subset Aff(n)$ где је $L_{\mathbf{A}} \in Gl(n) \subset Aff(n)$ линеарна трансформација дата матрицом $\mathbf{A}$, а $T_{\mathbf{v}} \in$

$T(n) \subset Aff(n)$ транслација за вектор $\mathbf{v}$. Оне су репрезентоване паровима $L_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \mathbf{0})$ и $T_{\mathbf{v}} = (\mathbf{E}, \mathbf{v})$. Користећи правило (5.3) добијамо

$$L_{\mathbf{A}}^{-1} T_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{0}) \circ (\mathbf{E}, \mathbf{v}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{0}) = \ldots = (\mathbf{E}, \mathbf{A}\mathbf{v}) \in T(n),$$

то јест, да је $T(n)$ је нормална подгрупа. Алтернативно се може показати да је пресликавање $f : Aff(n) \mapsto Gl(n)$, дато са $f((\mathbf{A}, \mathbf{v})) = \mathbf{A}$, хомоморфизам чије је језгро $Ker(f) = T(n)$, па је на основу тога $T(n)$ нормална подгрупа групе $Aff(n)$. $\square$

Напомена 5.1 У претходном задатку смо показали да се линеарне трансформације реализују матричним множењем, док се транслације реализују сабирањем вектора. За примене у рачунарској графици погодно је и транслације реализовати матрично, то јест, представити комплетну афину трансформацију матричним множењем.

Задатак 5.2 Одредити репрезентацију афине трансформације (5.1) равни у хомогеним координатама $(\xi_1 : \ldots : \xi_{n+1})$.

Решење: Заменом једнакости

$$x_1' = \frac{\xi_1'}{\xi_{n+1}'}, \ldots, x_n' = \frac{\xi_n'}{\xi_{n+1}'} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}}, \ldots, x_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$$

у формуле афине трансформације (5.1) и додавањем једнакости $\xi_{n+1} = \xi_{n+1}'$ добијмо

$$\begin{array}{rcllll} \lambda\xi_1' & = & a_{11}\xi_1 & +\ldots+ & a_{1n}\xi_n & + \; v_1\xi_{n+1}, \\ & \vdots & & & & \\ \lambda\xi_n' & = & a_{n1}\xi_1 & +\ldots+ & a_{nn}\xi_n & + \; v_n\xi_{n+1}, \\ \lambda\xi_{n+1}' & = & & & & \qquad \xi_{n+1}, \end{array} \tag{5.4}$$

за $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. $\square$

Дакле, композиција афиних трансформација (5.3) одговара множењу матрица којима су репрезентоване одговарајуће пројективне трансформације, док је пресликавање

$$(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & v_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

изоморфизам група што се и директно једноставно проверава. □

Напомена 5.2 Координатни систем $Ox_1 \dots x_n$ простора $\mathbb{R}^n$ сматраћемо Декартовим правоуглим, то јест, скаларни производ вектора $\mathbf{X}^T = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{Y}^T = (y_1, \dots, y_n)$ је дат са

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{X}\mathbf{Y}^T = \mathbf{X}^T \mathbf{E}\mathbf{Y}, \tag{5.5}$$

где је матрица скаларног производа у овом случају јединична матрица.

Задатак 5.3 Описати све изометрије простора $\mathbb{R}^n$.

Решење: Нека је $Ox_1 \dots x_n$ правоугли координатни систем простора $\mathbb{R}^n$. Ако је O' слика тачке O у изометрији Φ, размотримо изометрију $\bar{\Phi} = \Phi - \mathbf{OO'}$. Јасно је да важи $\bar{\Phi}(O) = O$, то јест, изометрија $\bar{\Phi}$ фиксира координатни почетак. Лако се показује да је изометрија $\bar{\Phi}$ линеарна, па је зато облика $\bar{\Phi}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$. Пошто је $\bar{\Phi}$ изометрија мора важити

$$\mathbf{X}^T \mathbf{E}\mathbf{Y} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \bar{\Phi}(\mathbf{X}), \bar{\Phi}(\mathbf{Y}) \rangle = (\mathbf{AX})^T (\mathbf{AY}) = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{Y},$$

за све векторе $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, па је зато $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Дакле Φ је облика $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{v}$, где је $\mathbf{v} = \mathbf{O'O}$ вектор транслације, док матрица $\mathbf{A}$ задовољава услов $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$. □

Напомена 5.3 Из претходног задатка закључујемо да је подгрупа свих изометрија векторског простора $\mathbb{R}^n$ (**ортогонална група**) изоморфна матричној групи

$$O(n) = \{\mathbf{A} \in Gl(n) \mid \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}\}.$$

Њена подгрупа (индекса 2) која се састоји од трансформација које чувају оријентацију (**специјална ортогонална група**) је

$$SO(n) = \{\mathbf{A} \in O(n) \mid \det(\mathbf{A}) = 1\}.$$

Подрупу свих изометрија (групе $Aff(n)$) простора $\mathbb{R}^n$ означавамо са $Isom(\mathbb{R}^n)$. Она је у векторској нотацији облика

$$Isom(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{X} \mapsto \mathbf{AX} + \mathbf{v} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Задатак 5.4 Доказати да колоне (врсте) матрице $\mathbf{A} \in O(n)$ чине ортонормирану базу.

Решење: У Задатку 5.3 показано је да су матрице $\mathbf{A} \in O(n)$ у кореспонденцији са линеарним изометријама. Колоне матрице су слике базних вектора при том пресликавању (по дефиницији матрице трансформације). Како базни вектори чине ортонормирану базу (јер је скаларни производ дат са (5.5)), чине је и њихове слике, то јест, колоне матрице $\mathbf{A}$. Како из $\mathbf{A} \in O(n)$ следи $\mathbf{A}^T \in O(n)$, тврђење важи и за врсте. $\square$

Напомена 5.4 Колоне (врсте) матрице $\mathbf{A} \in O(n)$ чине базу исте оријентације као и базни вектори координатног система ако и само ако важи $\mathbf{A} \in SO(n)$. Из Задатка 5.4 је јасно да постоји бијекција матрица из $O(n)$ и ортонормираних база простора $\mathbb{R}^n$.

5.2 Афине трансформације равни

Задатак 5.5 Описати све изометрије простора $\mathbb{R}^2$.

Решење: На основу Задатка 5.3, проблем се своди на опис квадратних матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ реда два које задовољавају услов $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Директно се проверава да је тај услов еквивлентан са

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 = a_{21}^2 + a_{22}^2, \;\; a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$$

На основу тога, мора важити $a = \cos\phi = \pm d, \pm c = \sin\phi = b$, за неку вредност $\phi \in \mathbb{R}$. Формуле (5.1) постају

$$Isom(\mathbb{R}^2) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi \\ \sin\phi & \pm\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mid \phi, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

Дефиниција 5.2 Линеарне трансформације репрезентоване матрицама

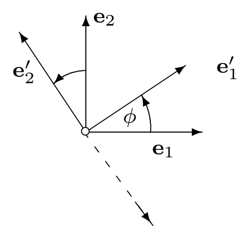
$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{R}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix},$$

представљају **ротацију за угао** $\phi \in \mathbb{R}$, односно композицију ротације и **рефлексије око (ротиране)** x**–осе**.

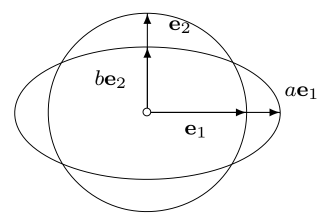
Напомена 5.5 Приметимо да матрица ротације има детерминанту 1, те чува оријентацију равни за разлику од друге трансформације код које је детерминанта матрице једнака -1.

Задатак 5.6 Доказати да је трансформација $\bar{\mathbf{R}}(\phi)$ рефлексија у односу на праву и одредити ту праву.

Задатак 5.7 Доказати да је скуп ротација равни $SO(2) = \{\mathbf{R}(\phi) \mid \phi \in \mathbb{R}\}$ Абелова група изоморфна групи јединичних комплексних бројева $S^1 = \{e^{i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}$.



Задатак 5.5



Задатак 5.8

Дефиниција 5.3 Трансформација

$$\begin{aligned} x' &= \quad ax, \\ y' &= \qquad\quad by. \end{aligned} \tag{5.6}$$

за $a, b \neq 0$ је **истезање** (**са центром** O, **дуж координатних оса**). Истезање за $a = b$, зовемо **хомотетија** (**са коефицијентом** a **и центром** O).

Напомена 5.6 У општем случају истезање није изометрија нити је конформно (то јест, не чува углове), док хомотетија јесте конформна трансформација.

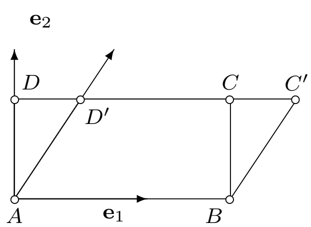
Задатак 5.8 Доказати да је афина трансформација круга ${x'}^2 + {y'}^2 = 1$ на елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ дата формулама (5.6).

Решење: Заменом формула (5.6) у једначину круга добијамо дату елипсу. $\square$

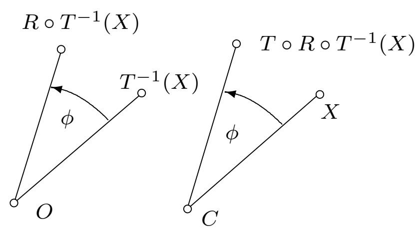
Задатак 5.9 Одредити афину трансформацију којом се правоугаоник $ABCD$ трансформише у правоугаоник $A'B'C'D'$, ако је $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, ивице правоугаоника су паралелне координатним осама и висине и ширине правоугаоника су једнаке редом $h, d; h', d'$.

Задатак 5.10 Доказати да скуп свих истезања чини комутативну групу изоморфну са $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, где је $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ мултипликативна група реалних бројева.

Задатак 5.11 Доказати да скуп свих хомотетија и свих ротација чини комутативну групу изоморфну мултипликативној групи $\mathbb{C}^*$ комплексних бројева различитих од нуле.



Задатак 5.12



Задатак 5.16

Задатак 5.12 Дате су тачке $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, $D'(cp,c)$ $(b > 0)$. Одредити афину трансформацију f правоугаоника $ABCD$ на паралелограм $ABC'D'$.

Решење: Како је тачка $A(0,0)$ инваријантна, трансформација је линеарна. Јасно је да важи $f(AB) = AB$, па је и $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$. Мора важити и $f(0,c) = f(AD) = AD' = (cp, c)$, па је $f(\mathbf{e_2}) = f((0,1)) = (1,p) = \mathbf{e_1} + p\mathbf{e_2}$. Тражена трансформација је дата са

$$\begin{aligned} x' &= x \quad + \quad py, \\ y' &= \qquad\quad\;\; y. \end{aligned} \tag{5.7}$$

□

Дефиниција 5.4 Трансформацију облика (5.7) називамо **смицање дуж x–осе**.

Напомена 5.7 Матрица **смицања дуж y–осе** је транспонована матрици смицања дуж x–осе.

Задатак 5.13 Доказати да смицање и истезање комутирају ако и само ако је истезање хомотетија.

Задатак 5.14 Доказати да је свака афина трансформација равни композиција транслације, истезања, смицања и ротације. Да ли је то разлагање јединствено?

Задатак 5.15 Одредити матрице које представљају хомогени запис транслације, ротације, истезања и смицања у равни.

Решење: На основу Задатака 5.2, закључујемо да су тражене матрице дате редом са

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 5.16 Одредити матрицу која репрезентује ротацију у равни око произвољне тачке $C(x_0, y_0)$, за угао ϕ.

Решење: Прво ћемо транслирати тачку C у координатни почетак $O(0,0)$, затим извршити ротацију око координатног почетка, и, напослетку, "вратити" тачку O у тачку C инверзном транслацијом. Ако је $\mathbf{T}$ матрица транслације, а $\mathbf{R}$ матрица ротације, онда је тражена трансформација дата матрицом $\mathbf{TRT}^{-1}$. Конкретно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & x_0(1-\cos\phi)+y_0\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & y_0(1-\cos\phi)+x_0\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Задатак 5.17 Одредити матрицу која реализује хомотетију са центром $C(x_0, y_0)$ и коефицијентом a.

Задатак 5.18 Одредити матрицу која реализује истезање у равни дуж страница AB и AD правоугаоника $ABCD$ за коефицијенте a и b, тако да тачка A остане инваријантна. Темена правоугаоника имају координате $A(1,1), D(0, 1+\sqrt{3}), B(1+2\sqrt{3}, 3)$.

Упутство: Нека је $\mathbf{T}$ матрица транслације за вектор $(1,1)$, $\mathbf{R}$ матрица ротације за угао између x-осе и праве AB ($\frac{\pi}{6}$) и $\mathbf{H}$ истезање дато трећом од матрица из Задатка 5.15. Тражена трансформација је дата матрицом $\mathbf{TRHR}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$. □

5.3 Афине трансформације простора

Задатак 5.19 Доказати да је свака оријентабилна изометрија простора ротација око неке праве која садржи координатни почетак.

Упутство: Изометрија је представљена матрицом $\mathbf{A} \in SO(3)$, то јест, таквом да важи $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Како је карактеристични полином матрице $\mathbf{A}$ степена 3, он има бар једну реалну сопствену вредност λ_1, односно одговарајући сопствени вектор $\mathbf{v_1}$. Како је у питању изометрија, мора важити $\lambda_1 = \pm 1$ (да се вектор $\mathbf{v_1}$ не би издужио). Преостале две сопствене вредности, λ_2 и λ_3, су или реалне (и тада имају вредност ± 1) или конјуговано–комплексне. Из услова $1 = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, може се закључити да је бар једна сопствена вредност једнака 1, а затим да је дата изометрија ротација око сопственог вектора који одговара тој сопственој вредности. □

Напомена 5.8 Позитивност смера ротације утврђујемо такозваним правилом десне руке: држимо ли осу ротације десном руком, ротација у правцу прстију је позитивна ако испружени палац показује у смеру осе ротације. На пример, ротација осе Ox у Oy око Oz је позитивна, као и ротација Oz у Ox око Oy и ротација Oy у Oz око Ox.

Задатак 5.20 Одредити матрице ротација у позитивном смеру око оса Oz, Oy и Ox редом за углове ϕ, θ и ψ.

Решење: Ротација око осе Oz оставља вектор те осе инваријаним, а у равни Oxy је репрезентована као ротација око тачке O за угао ϕ (и то од осе Ox ка Oy.) Зато је $R_z(\phi)(\mathbf{e}_1) = \cos\phi\mathbf{e}_1 + \sin\phi\mathbf{e}_2$, $R_z(\phi)(\mathbf{e}_2) = -\sin\phi\mathbf{e}_1 + \cos\phi\mathbf{e}_2$, $R_z(\phi)(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$. Слично се резонује и у преостала два случаја, па су тражене матрице, редом

$$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 5.21 Доказати да се сваки једнични вектор **a** може записати у облику $\mathbf{a}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где су α, β и γ углови које вектор **a** захвата редом са осама Ox, Oy и Oz.

Задатак 5.22 У координатном систему $Oxyz$ дата је тачка $A(a_1, a_2, a_3)$. Заротирати полуправу OA у позитивни део осе Oz на три начина:

а) ротацијом око осе Ox до равни Oxy, а затим ротацијом око Oy;

б) ротацијом око осе Oy до равни Oyz, а затим ротацијом око Ox;

в) ротацијом око осе Oz до равни Oxz, а затим ротацијом око Oz.

Решење: *б*) Заротираћемо тачку A око осе Oy у негативном смеру (то јест, од осе Ox ка оси Oz) за угао ϕ. Угао ϕ је угао између пројекције OA''' дужи OA на раван Oxz и осе Oz. Једноставно се израчунава:

$$\cos\phi = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}, \quad \sin\phi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}.$$

Резултат ротације је тачка $A_1(0, a_2, \sqrt{a_1^2 + a_3^2})$ која припада равни Oyz.

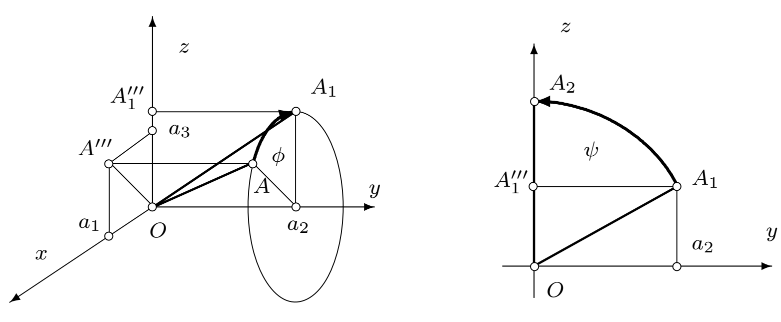
Сада је потребно заротирати тачку A_1 око осе Ox за угао ψ до тачке $A_2(0, 0, \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})$ која припада оси Oz. Смер ротације је позитиван, то јест, од осе Oy ка оси Oz, док је угао ψ угао између дужи OA_1 и осе Oz. Добијамо:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \sin\psi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Зато је тражена трансформација дата производом матрица $\mathbf{R}_x(\psi)$ и $\mathbf{R}_y(-\phi)$ (тим редом), то јест,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} & -\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \\ 0 & \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} & \dfrac{\sqrt{a_1^2+a_3^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}} & 0 & -\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}} & 0 & \dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_3^2}} \end{pmatrix}.$$

Резултат се може проверити директном применом овог производа матрица на тачку $A(a_1, a_2, a_3)$, што резултира тачком $A_2(0, 0, \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})$. Случајеви под *а*) и *в*) се разматрају на сличан начин. □



Задатак 5.22 *б*)

Напомена 5.9 Јасно је да формуле из претходног задатка важе ако тачка A не припада оси Oy. У супротном, треба изоставити ротацију око осе Oy и применити само матрицу $\mathbf{R}_x(\psi)$.

Задатак 5.23 Одредити матрицу ротације за угао α око произвољне праве a.

Решење: Сматраћемо праву a оријентисаном и одредити формуле ротације у позитивном смеру. Претпоставимо прво да права a садржи координатни почетак и да је њен (оријентисани) вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ јединични вектор, то јест, да важи $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Тражену ротацију можемо реализовати као композицију трију трансформација:

1. Композиције (рецимо) $R_x(\psi) \circ R_y(-\phi)$ (права a се трансформише у осу Oz).
2. Ротације $R_z(\alpha)$ око осе Oz.
3. Композиције $R_y(\phi) \circ R_x(-\psi)$ инверзне трансформацији 1 (оса Oz се враћа у праву a).

Директно се проверава да је матрица композиције $R_{\mathbf{a}}(\alpha) = R_y(\phi) \circ R_x(-\psi) \circ R_z(\alpha) \circ R_x(\psi) \circ R_y(-\phi)$ дата са

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + (1 - a_1^2)\cos\alpha & a_1a_2(1 - \cos\alpha) - a_3\sin\alpha & a_1a_3(1 - \cos\alpha) + a_2\sin\alpha \\ a_1a_2(1 - \cos\alpha) + a_3\sin\alpha & a_2^2 + (1 - a_2^2)\cos\alpha & a_2a_3(1 - \cos\alpha) - a_1\sin\alpha \\ a_1a_3(1 - \cos\alpha) - a_2\sin\alpha & a_2a_3(1 - \cos\alpha) + a_1\sin\alpha & a_3^2 + (1 - a_3^2)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Уколико права a не садржи координатни почетак већ неку тачку A, тражену трансформацију представља следећа композиција

$$T_{\mathbf{OA}} \circ R_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{AO}}.$$

□

Задатак 5.24 (Ојлерова теорема) Доказати да се свака изометријска трансформација која чува оријентацију пројективног простора, може представити као композиција транслације и највише три ротације око координатних оса.

Решење: Можемо претпоставити да је координатни почетак O фиксиран и доказати да је свака линеарна изометрија композиција три ротације око координатних оса. Нека је $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ортонормирана база координатног система $Oxyz$. Свака линеарна изометрија I је одређена сликама $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ базних вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ координатних оса. Обе наведене базе су ортонормиране и исте оријентације. Реализујмо I^{-1}, а затим и I трима ротацијама око координатних оса.

У Задатку 5.22 је доказано да важи

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_2 = (R_x(\psi) \circ R_y(-\phi))(\mathbf{k}),$$

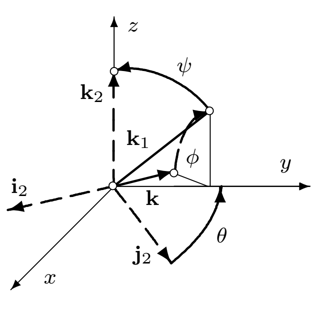
за погодно изабране углове ϕ, ψ. Како је $R_x(\psi) \circ R_y(-\phi)$ изометрија, вектори $\mathbf{i}_2 = (R_x(\psi) \circ R_y(-\phi))(\mathbf{i})$ и $\mathbf{j}_2 = (R_x(\psi) \circ R_y(-\phi))(\mathbf{j})$ припадају равни Oxy (јер су ортогонални на вектор $\mathbf{k}_2$) и заједно са вектором $\mathbf{k}_2$ чине ортонормирану базу позитивне оријентације. Зато ротацијом за неку угао θ око осе Oz можемо трансформисати векторе $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ редом у векторе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Дакле, важи

$$I^{-1} = R_z(\theta) \circ R_x(\psi) \circ R_y(-\phi),$$

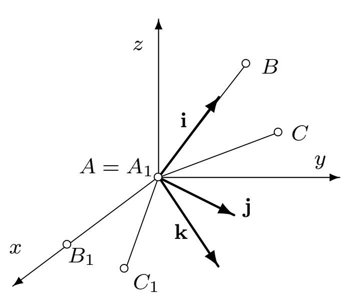
то јест,

$$I = R_y(\phi) \circ R_x(-\psi) \circ R_z(-\theta).$$

□



Задатак 5.24



Задатак 5.25

Задатак 5.25 Дате су неколинеарне тачке A, B, C афиног простора. Одредити изометрију која трансформише тачку A у координатни почетак, тачку B у позитивни део осе Ox и при којој слика дужи AC припада равни Oxy.

Решење: Транслација $T_{\mathbf{AO}}$, за вектор $\mathbf{AO}$, тачку A преводи у тачку O. Претпоставимо да је та транслација већ извршена, то јест, да важи $A = O$. Нека је

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}}{\mid \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} \mid}, \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{AB}}{\mid \mathbf{AB} \mid}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}.$$

Вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ чине позитивно оријентисану ортонормирану базу. Изометрија која преводи базу $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ координатног система $Oxyz$ у базу $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ трансформише тачке A, B и C на тражени начин. Матрица $\mathbf{P}$ те трансформације може се одредити као у Задатку 5.24. Ипак, наводимо много једноставнији начин. Наиме, колоне матрице $\mathbf{P}^{-1}$ трансформације базе $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ у базу $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ су координате слика базних вектора, то јест, колоне координата $[\mathbf{i}], [\mathbf{j}], [\mathbf{k}]$. Дакле,

$$\mathbf{P}^{-1} = ([\mathbf{i}], [\mathbf{j}], [\mathbf{k}]).$$

Како из једнакости $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{E}$, следи $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, добијамо матрицу $\mathbf{P}$ тражене трансформације:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} [\mathbf{i}]^T \\ [\mathbf{j}]^T \\ [\mathbf{k}]^T \end{pmatrix}.$$

(где су координате вектора уписане као врсте). □

Задатак 5.26 Дат је авион у Oxy равни. Авион је постављен дуж Ox осе са центром у координатном почетку O. Одредити изометрију која премешта центар авиона у дату тачку A, авион усмерава у правцу датог вектора $\mathbf{a}$, тако да крила авиона са равни Oxy заклапају дати угао α.

Глава 6

Пројекције

Дефиниција 6.1 Нека је τ хиперраван и $O \notin \tau$ тачка пројективног простора $\mathbb{R}P^n$. Пресликавање које свакој тачки $A \neq O$ додељује тачку $A' = OA \times \tau$ називамо **централна пројекција из тачке O на раван τ**. Тачку O зовемо **центар пројектовања**.

Задатак 6.1 *а*) Одредити централну пројекцију допуњеног афиног простора из центра $O(0,0,h)$, $h > 0$ на раван $\tau : z = 0$. Написати решење у афиним и хомогеним координатама.

б) Које се тачке пресликавају бесконачно далеко?

Решење: *а*) Нека су (X, Y, Z) текуће афине координате простора $\mathbb{R}P^n$. Одредимо слику $A'(x', y'z')$ тачке $A(x, y, z)$. Једначина праве OA је:

$$OA : \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z-h}{z-h} = t \in \mathbb{R}.$$

Пресек са равни τ добијамо за

$$0 = Z = t(z-h) + h,$$

односно за $t = \dfrac{h}{h-z}$, па су координате тачке A' :

$$x' = \frac{hx}{h-z}, \quad y' = \frac{hy}{h-z}, \quad z' = 0.$$

Преласком на хомогене координате $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ претходне формуле постају:

$$\frac{x_1'}{x_4'} = \frac{hx_1}{hx_4 - x_3}, \quad \frac{x_2'}{x_4'} = \frac{hx_2}{hx_4 - x_3}, \quad x_3' = 0,$$

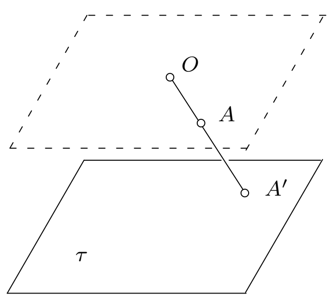
односно

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1' &=& hx_1, \\ \lambda x_2' &=& hx_2, \\ \lambda x_3' &=& 0, \\ \lambda x_4' &=& -x_3 + hx_4. \end{array}$$

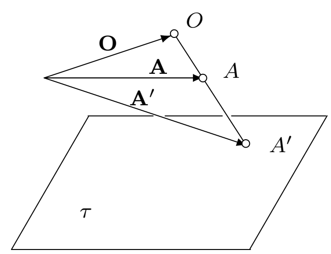
б) Бесконачно далеко на раван $z = 0$ (тј. $x_3' = 0$) се пресликавају оне тачке за које важи $x_4' = 0$. Дакле,

$$0 = -x_3 + hx_4 \implies \frac{x_3}{x_4} = h,$$

па се раван $z = h$ пресликава на бесконачно далеку праву равни $z = 0$. То је раван која садржи центар пројекције O и паралелна је равни τ. $\square$



Задатак 6.1



Задатак 6.2

Напомена 6.1 Приметимо да у хомогеним координатама пројекција из претходног задатка, такође, има матрични запис $\lambda\mathbf{X}' = \mathbf{PX}$. Тако је и у општем случају. Наравно, како пројекција није бијекција матрица $\mathbf{P}$ је сингуларна, то јест, важи $\det(\mathbf{P}) = 0$.

Задатак 6.2 Доказати да се централна пројекција простора $\mathbb{R}P^n$ из центра O на хиперраван τ може представити у матричном облику $\lambda\mathbf{X}' = \mathbf{PX}$, где је $\mathbf{P}$ до на скалар јединствена сингуларна матрица.

Решење: Приметимо да централна пројекција није дефинисана само у тачки O. То значи да ако се она може представити у датом облику, онда вектор репрезент $\mathbf{O}$ тачке O (и само он) мора припадати језгру матрице $\mathbf{P}$ пројекције P (тј. слика тог вектора је нула вектор, па одговарајуће пресликавање пројективног простора није дефинисано у тачки O). Са друге стране, тачке пројективне хиперравни τ су инваријантне, па је матрица $\mathbf{P}$ одређена условима:

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{P}) = \mathbf{O}, \quad P|_\tau = \lambda\, Id. \tag{6.1}$$

Таква матрица је до на скалар јединствена. Докажимо да је пресликавање P одређено том матрицом заиста централна пројекција из тачке O на раван τ. Довољно је показати да се за сваку тачку $A' \in \tau$ било која тачка A на правој OA' пресликава у A'. Како је $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{O} + \beta\mathbf{A'}$, $\beta \neq 0$, заиста важи

$$\mathbf{PA} = \mathbf{P}(\alpha\mathbf{O} + \beta\mathbf{A'}) = \beta\mathbf{PA'} = \beta\lambda\mathbf{A'},$$

то јест, $P(A) = A'$, што је и требало доказати. □

Напомена 6.2 Како централна пројекција има исти запис као и пројективна трансформација она има и сличне особине. Рецимо, централна пројекција чува дворазмеру тачака (уколико не дегенерише праву на којој се тачке налазе, тј. уколико та права не садржи центар пројекције). Доказ је сличан ономе за пројективне трансформације и може се наћи у [10].

Задатак 6.3 Одредити центар O централног пројектовања пројективног простора на раван $\tau : t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 = 0$, тако да то пројектовање после преласка на афине координате буде:

а) коса пројекција у правцу вектора $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$;

б) нормална пројекција на раван τ.

Решење: *а*) Праве које спајају одговарајуће тачке секу се у тачки O. Код косог пројектовања те праве су паралелне вектору $\mathbf{v}$, па је O бесконачно далека тачка $O(v_1 : v_2 : v_3 : 0)$ пројективног простора. Из услова $O \notin \tau$, следи $v_1t_1 + v_2t_2 + v_3t_3 \neq 0$.

б) Нормално пројектовање је специјалан случај косог при ком је вектор $\mathbf{v}$ вектор равни τ. Како је у афиним координатама једначина равни τ дата са $\tau : t_1x + t_2y + t_3z + t_4 = 0$, њен вектор је $\mathbf{n}_\tau(t_1, t_2, t_3)$, па на основу *а*) добијамо $O(t_1 : t_2 : t_3 : 0)$. □

Напомена 6.3 Јасно је да се коса и нормална пројекција постоје у свим димензијама и да у афиним координатама имају облик (5.1), при чему важи $\det(a_{ij}) = 0$.

Задатак 6.4 Одредити формуле централне пројекције из тачке $O(x_0, y_0)$ афине равни на праву $y = kx + n$.

Решење: Нека је $\lambda \mathbf{X}' = \mathbf{P}\mathbf{X}$ запис пројекције у хомогеним координатама, при чему је $\mathbf{P} = (p_{ij})$ одговарајућа матрица формата (3×3). Како се основу Задатака 6.2, вектор $\mathbf{O}(x_0, y_0, 1)$ тачке $O(x_0 : y_0 : 1)$ слика у нула вектор, добијамо

$$\begin{aligned} p_{11}x_0 + p_{12}y_0 + p_{13} &= 0, \\ p_{21}x_0 + p_{22}y_0 + p_{23} &= 0, \\ p_{31}x_0 + p_{32}y_0 + p_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Свака тачка праве $y = kx+n$, то јест, $kx_1 - x_2 + nx_3 = 0$ је инваријантна, па за, рецимо тачке $(1 : k : 0)$ и $(0 : n : 1)$, добијамо

$$\begin{array}{rclcrcl} p_{11} + p_{12}k & = & \lambda, & \qquad & p_{12}n + p_{13} & = & 0, \\ p_{21} + p_{22}k & = & \lambda k, & & p_{22}n + p_{23} & = & \lambda n, \\ p_{31} + p_{32}k & = & 0; & & p_{32}n + p_{33} & = & \lambda. \end{array}$$

За разне тачке узет је исти коефицијент λ, јер је рестрикција пројекције на праву идентитет (релација (6.1)). Одатле добијамо матрицу пројекције:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} n - y_0 & x_0 & -nx_0 \\ -ky_0 & kx_0 + n & -ny_0 \\ -k & 1 & kx_0 - y_0 \end{pmatrix}.$$

Напомињемо да је задатак могао бити решен и методама аналитичке геометрије, слично Задатку 6.1. □

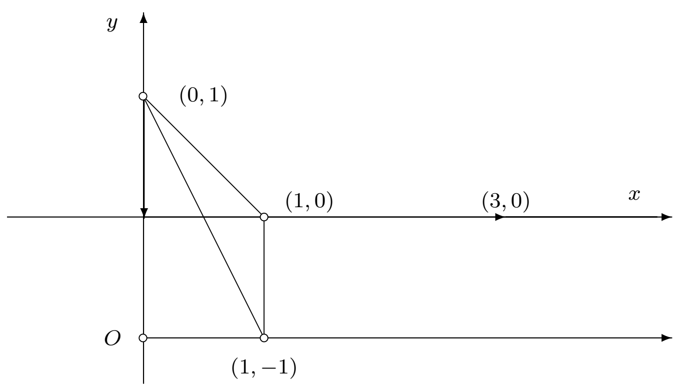
Задатак 6.5 Одредити формуле композиције f пројекције из тачке $O(0, -1)$ на x–осу афине равни и транслације за вектор $\mathbf{v}(3, 0)$. Шта је слика троугла чија су темена $(1, 0), (0, 1)$ и $(1, -1)$?

Упутство: У хомогеним координатама, матрица пројекције је

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компонујемо ли је са транслацијом добијамо:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Задатак 6.5

С обзиром да се теме $(1, -1)$ пројектује у бесконачно далеку тачку x–осе, пројекција троугла је полуправа која представља позитивни део осе. Транслацијом се њен почетак помера у тачку $(3, 0)$. $\square$

Задатак 6.6 Одредити формуле косе пројекције афине равни на праву $y = x - 1$, ако су зраци пројектовања паралелни x–оси.

Решење: Одредимо прво формуле у афиним координатама. Нека је (x', y') пројекција тачке (x, y). Јасно је да тачка и њена пројекција имају исту y-координату, тј. $y' = y$. Како пројекција припада правој важи

$x' = y' + 1 = y + 1$ чиме су формуле пројекције одређене. Одговарајућа матрица у хомогеним координатама је

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 6.7 Одредити формуле нормалне пројекције афине равни на x–осу у хомогеним и афиним координатама.

Задатак 6.8 Одредити слику круга $(x-2)+(y-3) = 1$ при пројекцијама из претходна два задатка.

Задатак 6.9 Одредити формуле композиције ротације око тачке $S(x_0, y_0)$ за угао ϕ и нормалне пројекције на x–осу.

Решење: Матрица ротације око произвољне тачке у равни дата је у Задатку 5.16, а тражене пројекције у Задатку 6.7, па се матрица траженог пресликавања добија као производ тих двеју:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & x_0(1-\cos\phi) + y_0 \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi & y_0(1-\cos\phi) + x_0 \sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & x_0(1-\cos\phi) + y_0 \sin\phi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Задатак 6.10 Одредити формуле пројекције из тачке $O(x_0, y_0, z_0)$ афиног простора на раван $Ax + By + Cz + D = 0$.

Задатак 6.11 Одредити сенку сфере $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 1$ на равни Oyz, ако се извор светлости налази у тачки $M(5, 1, 1)$.

Задатак 6.12 Одредити пројекцију тетраедра из тачке $O(-4, 4, 4)$ на раван $x - y + 2z + 5 = 0$, ако су његова три темена $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$ и $C(1, \sqrt{3}, 0)$, док је трећа координата четвртог темена позитивна.

Задатак 6.13 Коса пројекција простора $\mathbb{R}^3$ на раван Oxy одређена је пројекцијом $M_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0)$ тачке $M(0,0,1)$. Одредити формуле ове пројекције и пројекцију елипсе $y^2 + 2z^2 = 1, x = 0$.

Упутство: Зраци пројектовања су паралелни правој која садржи тачке M_1 и M. Познатим поступком добијамо матрицу пројекције у хомогеним координатама

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то јест, афини облик пресликавања је

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{1}{2}z, \\ y' &= y - \frac{1}{3}z, \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Даље, добијамо пројекцију елипсе: $(y' - \frac{2}{3}x')^2 + 8x'^2 = 1, z' = 0.$ □

Задатак 6.14 Одредити формуле композиције ротације око произвољне праве a за угао α и пројекције дуж z–осе на раван Oxy.

Упутство: Ротација око праве a дата је у Задатку 5.23, док, аналогно као у Задатку 6.7, добијамо да је тражена пројекција репрезентована са $\mathbf{P} = \mathbf{diag}(1,1,0,1)$. Матрица композиције једнака је производу матрице ротације и матрице пројекције. □

Напомена 6.4 Композиције раванских и просторних трансформација, разматраних у Глави 5, са пројекцијама реализују се на сличан начин као у Задацима 6.9 и 6.14.

Глава 7

Кватерниони

7.1 Укратко о кватернионима

Мада су на одређен начин за њих знали још и Ојлер и Гаус, откриће кватеринионa се приписује Хамилтону (XIX век) који их је, након што их је открио, проучавао још 17 година. А пронашао их је тако што је тражио алгебру која би описивала изометрије простора као што комплексни бројеви описују изометрије равни (ротације).

Нотација коју овде користимо прилагођена је употреби у компјутерској графици и преузета из рада [16].

Дефиниција 7.1 **Кватерниони** су бројеви облика

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

где су i, j и k везани међу собом и са јединицом следећом таблицом множења

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Елемент којим се множи слева налази се у колони, а елемент којим се множи сдесна у врсти. Знак операције $\cdot$ се обично изоставља.

Кватерниони су асоцијативна алгебра (векторски простор са операцијом множења) над $\mathbb{R}$ са јединицом. Приметимо да кватерниони нису комутативна алгебра. **Стандардна база** векторског простора $\mathbb{H}$ је $(i, j, k, 1)$. Често идентификујемо просторе $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ релацијом

$$xi + yj + zk + w \cong (x, y, z, w).$$

Реални и имагинарни део кватерниона q су редом

$$\Re(q) = w, \quad \Im(q) = xi + yj + zk = \mathbf{v}.$$

Потпростор $\Im\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ генерисан са i, j и k називамо **простором имагинарних кватерниона**. Идентификацију $\mathbb{H} = \Im\mathbb{H} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$ обично записујемо

$$q = xi + yj + zk + w = [(x, y, z), w] = [\mathbf{v}, w].$$

Конјуговани кватернион кватерниона q, дефинишемо са

$$\bar{q} = -xi - yj - zk + w.$$

Подсћамо да се на простору $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ скаларни производ вектора, то јест, кватерниона $q = (x, y, z, w)$ и $q_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ дефинише релацијом

$$\langle q, q_1 \rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1 + ww_1,$$

одакле је

$$|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

Такође, на простору $\Im\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ је дефинисан стандардни векторски производ (који означавамо са $\times$).

Задатак 7.1 Реални бројеви и само они комутирају са свим кватернионима.

Задатак 7.2 (**Особине сабирања и множења**)

а) $q + q_1 = [\mathbf{v}, w] + [\mathbf{v_1}, w_1] = [\mathbf{v} + \mathbf{v_1}, w + w_1]$;

б) $qq_1 = [\mathbf{v}, w][\mathbf{v_1}, w_1] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v_1} + w\mathbf{v_1} + w_1\mathbf{v}, ww_1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v_1} \rangle]$;

в) $qq_1 = [\mathbf{v}, 0][\mathbf{v_1}, 0] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v_1}, -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v_1}\rangle], \ \ q, q_1 \in \Im\mathbb{H}$.

Задатак 7.3 (**Особине скаларног производа и конјуговања**)

а) $\overline{qq_1} = \bar{q}_1\bar{q}, \quad \overline{q+q_1} = \bar{q} + \bar{q}_1, \quad \bar{\bar{q}} = q$;

б) $\langle q, q_1\rangle = \Re(\bar{q}q_1), \quad \Re q = \dfrac{q+\bar{q}}{2}, \quad \Im q = \dfrac{q-\bar{q}}{2}$;

в) $|qq_1| = |q||q_1|$;

г) $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad (qq_1)^{-1} = q_1^{-1}q^{-1}$.

7.2 Кватерниони и изометрије простора $\mathbb{R}^3$

Хомогене координате тачке тродимензионог простора идентификујемо са кватернионом на следећи начин

$$(x:y:z:w) \leftrightarrow [(x,y,z), w] = [\mathbf{v}, w].$$

Дефиниција 7.2 Ма који кватернион q различит од нуле, одређује **конјугацију** $C_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ формулом

$$C_q(p) = qpq^{-1}.$$

Задатак 7.4 Нека је q кватернион различит од нуле и нека је $p \in \mathbb{R}^3$ тачка репрезентована као кватернион својим хомогеним координатама $p = (x:y:z:w) = [\mathbf{v}, w]$. Доказати:

а) конјугације C_q и C_h, $q, h \in \mathbb{H}$ су иста пресликавања ако и само ако важи $h = \lambda q, \lambda \in \mathbb{R}$;

б) конјугација C_q је изометрија простора $\mathbb{R}^3 \cong \Im\mathbb{H}$;

в) ако важи $q = [\mathbf{v}\sin\alpha, \cos\alpha]$ и $|\mathbf{v}| = 1$, пресликавање C_q је ротација за угао 2α око вектора $\mathbf{v}$ у позитивном смеру.

Решење: *а*) Нека важи $C_q = C_h$, то јест, нека је $qpq^{-1} = hph^{-1}$ за свако $p \in \mathbb{H}$. Ово је еквивалентно релацији $(h^{-1}q)p = p(h^{-1}q)$, то јест, томе да кватернион $h^{-1}q$ комутира са сваким кватернионом p. На основу

Задатака 7.1, претходно важи ако и само ако важи $h^{-1}q = \lambda \in \mathbb{R}$, односно $q = \lambda h,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

б) На основу тврђења *а*), за конјугацију C_q можемо претпоставити да је испуњено $|q| = 1$, то јест, $q^{-1} = \bar{q}$. За ма који кватернион p важи

$$|C_q(p)| = |qp\bar{q}| = |q||p||\bar{q}| = |p|,$$

па је конјугација изометрија простора $\mathbb{H}$. Користећи Задатак 7.3 *б*), имамо

$$2\Re(C_q(p)) = C_q(p) + \overline{C_q(p)} = qp\bar{q} + q\bar{p}\bar{q} = q(p+\bar{p})\bar{q} = p + \bar{p} = 2\Re p.$$

Дакле, важи $\Re(C_q(p)) = \Re p$, па конјугација чува реалан део кватерниона. Коначно добијамо

$$|\Im p|^2 + |\Re p|^2 = |p|^2 = |C_q(p)|^2 = |\Im(C_q(p))|^2 + |\Re(C_q(p))|^2,$$

одакле је $|\Im C_q(p)| = |\Im p|$. Закључујемо да је конјугација изометрија на $\mathbb{R}^3 \cong \Im\mathbb{H}$, што је и требало доказати.

в) Приметимо да важи $|q| = 1$, па је стога $\bar{q} = -\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha$. Докажимо да је вектор $\mathbf{v}$ инваријантан при пресликавању C_q (користимо да за имагинарне кватернионе важи $qq_1 = q \times q_1 - \langle q, q_1\rangle$):

$$\begin{aligned} C_q(\mathbf{v}) &= (\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha)\mathbf{v}(-\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha) = \\ &= (-\sin\alpha + \mathbf{v}\cos\alpha)(-\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha) = \mathbf{v}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Нека је $\mathbf{x}$ јединични вектор нормалан на вектор $\mathbf{v}$, то јест, такав да важи $\mathbf{vx} = \mathbf{v}\times\mathbf{x}$. Користећи формулу за двоструки векторски производ

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z} = \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle\mathbf{y} - \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle\mathbf{x},$$

добијамо:

$$\begin{aligned} C_q(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha)\mathbf{x}(-\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha) = \\ &= (\mathbf{v}\times\mathbf{x}\sin\alpha + \mathbf{x}\cos\alpha)(-\mathbf{v}\sin\alpha + \cos\alpha) = \\ &= -(\mathbf{v}\times\mathbf{x})\times\mathbf{v}\sin^2\alpha + \mathbf{x}\cos^2\alpha + 2(\mathbf{v}\times\mathbf{x})\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \mathbf{x}\cos 2\alpha + (\mathbf{v}\times\mathbf{x})\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Како је $(\mathbf{x}, \mathbf{v}\times\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ортонормирана база позитивне оријентације, из претходне формуле закључујемо да је C_q ротација око вектора $\mathbf{v}$ за угао за 2α у позитивном смеру. $\square$

Задатак 7.5 Нека је $q = xi+yj+zk+w$ јединични кватернион. Одредити матрицу $[C_q]$ конјугације кватернионом q у канонској бази простора $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Решење: Означимо са R_q десно, а са L_q лево множење кватернионом q, то јест,

$$R_q(p) = pq, \quad L_q(p) = qp,$$

за ма које $p \in \mathbb{H}$. Пресликавања $R_q, L_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ су линеарна. Важи

$$C_q(p) = qp\bar{q} = L_q(R_{\bar{q}}(p)) = R_{\bar{q}}(L_q(p)),$$

па је довољно одредити матрични запис пресликавања $R_{\bar{q}}$ и L_q и матрица која представља C_q ће бити производ тих двеју матрица. Приметимо да је комутирање левог и десног множења $L_q \circ R_h = R_h \circ L_q$ последица асоцијативности кватернионског множења. Како је

$$\begin{aligned} L_q(1) &= q = xi + yj + zk + w, & L_q(i) &= qi = wi + zj - yk - x, \\ L_q(j) &= qj = -zi + wj + xk - y, & L_q(k) &= qk = yi - xj + wk - z, \end{aligned}$$

то је матрица левог множења кватернионом q репрезентована са

$$[L_q] = \begin{pmatrix} w & -z & y & x \\ z & w & -x & y \\ -y & x & w & z \\ -x & -y & -z & w \end{pmatrix}.$$

На сличан начин добијамо матрицу десног множења кватернионом $\bar{q}$:

$$[R_{\bar{q}}] = \begin{pmatrix} w & -z & y & -x \\ z & w & -x & -y \\ -y & x & w & -z \\ x & y & z & w \end{pmatrix}.$$

Матрицу $[C_q] = [L_q][R_{\bar{q}}]$ конјугације C_q добијамо множењем одговарајућих матрица $[L_q]$ и $[R_{\bar{q}}]$ (због комутативности редослед множења је небитан):

$$[C_q] = \begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-wz) & 2(xz+yw) & 0 \\ 2(xy+zw) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-xw) & 0 \\ 2(xz-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

при чему смо користили услов $1 = |q|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. □

Задатак 7.6 *а*) Свака оријентабилна изометрија простора $\mathbb{R}^3$ се може представити као конјугација C_q неким јединичним кватернионом.

б) $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$.

Решење: *а*) Пошто је, на основу Задатка 5.19, свака оријентабилна изометрија ротација око неке осе тврђење је већ доказано у Задатку 7.4 *в*).

б) Како су конјугације C_q и C_h, $q, h \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, иста пресликавања ако и само ако важи $h = \lambda q$, $\lambda \in \mathbb{R}$, скуп свих конјугација можемо идентификовати са простором $\mathbb{R}P^3$. На основу тврђења *а*) је јасно да важи $SO(3) \subset \mathbb{R}P^3$. Обратно, нека је $C_q \in \mathbb{R}P^3$ конјугација кватернионом q за који можемо претпоставити да је јединични. Зато је q облика $q = [\mathbf{v}, w]$ и како је $|\mathbf{v}|^2 + |w|^2 = 1$, он је и облика $q = [\mathbf{v} \sin\alpha, \cos\alpha]$, за неки јединични вектор $\mathbf{v}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Зато је конјугација ма којим кватернионом ротација (Задатак 7.4 (*в*)), па важи и $\mathbb{R}P^3 \subset SO(3)$. Дакле, важи $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, при чему смо са $\mathbb{R}P^3$ означили скуп свих конјугација. □

Задатак 7.7 Одредити матрицу ротације око осе чији је јединични вектор $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$ за угао α у позитивном смеру.

Решење: У Задатку 7.4 *в*) показано је да се тражена ротација реализује као конјугација C_q кватернионом

$$q = [\mathbf{v} \sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}] = \sin\frac{\alpha}{2}(a_1 i + a_2 j + a_3 k) + \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Да би добили одговарајућу матрицу, довољно је да у матрици (7.1) заменимо $x = a_1 \sin\frac{\alpha}{2}$, $y = a_2 \sin\frac{\alpha}{2}$, $z = a_3 \sin\frac{\alpha}{2}$, $w = \cos\frac{\alpha}{2}$. (Упоредити добијену матрицу са матрицом из Задатка 5.23). □

Напомена 7.1 Из Задатка 7.6 је јасно да конјугације C_q и $C{-q}$, $|q| = 1$, представљају исту изометрију, то јест, дају исту матрицу. Обратно тврђење је дато у следећем задатку.

Задатак 7.8 На основу матрице $\mathbf{A}$ дате изометрије, одредити јединични кватернион qтакав да важи $[C_q] = \mathbf{A}$.

Литература

–општа–

[1] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Calarendon Press, Oxford (1986).

[2] Н. Блажић, Н. Бокан, З. Лучић, З. Ракић, *Аналитичка геометрија*, Математички факултет, Београд (2002).

[3] М. Ђорић, О. Миленковић, *Збирка задатака из аналитичке геометрије*, Математички факултет, Београд (2002).

[4] П. Јаничић, *Збирка задатака из геометрије*, Математички факултет, Београд (2003).

[5] Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, Математички факултет, Београд (2003).

[6] Д. Лопандић, *Еуклидска геометрија: задаци са решењима*, Београд (1967).

[7] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Математички факултет, Београд (1967).

[8] Ж. Мијајловић, *Алгебра 1*, Милгор, Београд, Москва (1993).

–ужа–

[9] Б. Алимпић, Н. Бокан, З. Шнајдер, *Збирка задатака из пројективне и нацртне геометрије*, Научна књига, Београд (1992).

Поред нацртне геометрије у овој се збирци обрађује пројективна геометрија са искључиво синтетичке тачке гледишта. Криве другог реда и друге класе су дефинисане преко пројективних пресликавања. Паскаловој и Брианшоновој теореми за криве другог реда је такође посвећена пажња.

[10] Н. Бокан, С. Вукмировић, *Пројективна геометрија*, скрипта, Математички факултет, Београд (2000).

Скрипта покрива део предавања из предмета Нацртна геометрија. Координатно третира n–димензиони реални пројективни простор, а синтетички реалну пројективну раван и криве другог реда.

[11] H. S. M. Coxeter, *Projective geometry*, A Division of Ginn Company, New York–London–Toronto (1964).

У књизи су изложене основне идеје (синтетичке и аналитичке) пројективне геометрије. Упркос времену и даље представља незаобилазну литературу из поменуте области.

[12] А. М. Комиссарук, *Проективная геометријя в задачах*, Вышэйшая школа, Минск (1971).a

Ова збирка се бави реалном пројективном равни, али разоткрива и везе са афином, Еуклидском и геометријом Лобачевски–Бољаја. Обимна и комплетна збирка руских мајстора која гарантује потпуно и дубоко разумевање материје.

[13] П.С. Моденов, А.С. Парахоменко, *Сборник задач по аналитической геометрии*, Наука, Москва.

Огромна и комплетна збирка која је писана у геометријско–алгебарском духу. Покрива аналитичку геометрију Еуклидских простора и хомогене координате у пројективним просторима.

[14] Д. Палман, *Пројективна геометрија*, Школска књига, Загреб (1984).

Одлична и комплетна, али обимна књига о реалној пројективној равни и n–димензионом пројективном простору. Комбиновани су синтетички и аналитички приступ.

[15] М. Првановић, *Пројективна геометрија*, Научна књига, Београд (1968).

Комплетан уџбеник у ком су темељно обрађени основи пројективне геометрије. Синтетички приступ и значајан број (нерешених) задатака.

[16] K. Shoemake, *Quaternions*, www.cse.unsw.edu.au/ cs9018/lectnotes/quatut.pdf.

Ово је кратак непубликован чланак о употреби кватерниона и Хопфовог раслојења у компјутерској графици.

[17] Ј. Улчар, *Пројективна и диференцијална геометрија – збирка проблема*, Научна књига, Београд (1969).

Збирка врло разноврсног садржаја. Први део посвећен је (аналитичкој и синтетичкој) пројективној геометрији, а други диференцијалној геометрији. Једна од ретких збирки на нашем језику која покрива поменуте области.