S R P S K A   A K A D E M I J A   N A U K A

KLASIČNI NAUČNI SPISI
KNJIGA III
MATEMATIČKI INSTITUT
KNJIGA 3

GEOMETRISKA ISPITIVANJA IZ TEORIJE PARALELNIH LINIJA

OD

N. I. LOBAČEVSKOG

Preveo

BRANISLAV PETRONIJEVIĆ

DRUGO, PROŠIRENO IZDANJE

B E O G R A D
1951

Našao sam u geometriji izvesne nesavršenosti, koje držim za razlog što ova nauka, ukoliko nije analiza, da sada nije mogla učiniti ni koraka napred iz onog stanja u kom nam ju je Euklid ostavio. U ta nesavršenstva računam nejasnost prvih pojmova o geometriskim količinama, način na koji se zamišlja merenje njihovo, i naposletku važnu prazninu u teoriji paralelnih, koji nisu bili u stanju do sada da ispune napori matematičara. Pokušaji Ležandrovi nisu ničega dodali ovoj teoriji, pošto je on bio primoran, da ostavi jedan strogi put, da skrene jednim sporednim putem i da pribegne pomoćnim stavovima, čiju nužnu aksiomatičnost bezrazložno hoće da utvrdi.

Prvi moj pokušaj o osnovama geometrije objavio sam u *„Kazanskom Vesniku"* za 1829 god. U nadi da sam odgovorio svim zahtevima, zanimao sam se dalje izradom te nauke u celini, i objavio sam moj rad u pojedinim deovima u *„Učenim zapiscima kazanskog Univerziteta"* za god 1836, 1837, 1838 pod naslovom *„Novi osnovi geometrije sa potpunom teorijom paralelnih"*. Možda obim ovog poslednjeg rada smeta mojim zemljacima da se bave jednim takvim predmetom koji je izgubio svoj interes posle Ležandra. Ali držim, da ta teorija paralelnih nije smela izgubiti pažnju geometara, i stoga sam nameran da ovde izložim ono što je bitno u mojim istraživanjima, primećujući unapred, da nasuprot mišljenju Ležandrovom sve ostale nesavršenosti, na pr. definicija prave linije, ovde nemaju mesta, i bez ikakvog su uticaja na teoriju paralelnih.

Da ne bih zamarao čitaoce množinom takvih stavova, čiji dokazi ne pričinjavaju nikakve teškoće, ja ću ovde unapred izložiti samo one, čije je znanje potrbno za ono šta sleduje.

1. *Prava linija poklapa se sama sa sobom u svima položajima.* Pod ovim podrazumevam, da prava linija pri obrtanju površine ne menja svoje mesto, ako prolazi kroz dve nepokretne tačke u površini.

2. Dve prave linije mogu se seći u dvema tačkama.

3. Kad se prava linija dovoljno produži u oba pravca, ona mora preći svaku granicu, i deli, prema tome, jednu ograničenu ravan na dva dela.

4. Dve prave linije, koje su upravne na istoj trećoj, ne seku se, pa makoliko se produžile.

5. Jedna prava linija uvek seče drugu, ako s jedne strane njene prelazi na drugu.

6. Unakrsni uglovi, kod kojih su strane jednoga produženja strana drugoga, jednaki su. Ovo važi kako za ravne pravoliniske uglove, tako i za ravne površinske uglove.

7. Dve prave linije ne mogu se seći, ako ih treća preseca pod istim uglovima.

8. U pravoliniskom trouglu leže naspram jednakih uglova jednake strane i obratno.

9. U pravoliniskom touglu leži prema većoj strani i veći ugao. U pravouglom trouglu hipotenuza je veća od svake katete i uglovi, koji leže na njoj, oštri su.

10. Pravoliniski trougli su kongruentni, ako imaju jednake jednu stranu i dva ugla, ili dve strane i zahvaćeni ugao, ili dve strane i ugao prema najvećoj strani ili ako su sve tri strane jednake.

11. Ako je jedna prava linija upravna na drugim dvema koje nisu s njom u istoj ravni, onda je ona upravna na svima pravim linijama, koje se mogu povući kroz zajedničku tačku preseka u ravni drugih dveju.

12. Presek kugle i ravni je krug.

13. Prava linija, koja je upravna na preseku dveju upravnih ravni a leži u jednoj od njih, upravna je na drugoj ravni.

14. U sfernom trouglu leže naspram jednakih strana jednaki uglovi i obrnuto.

15. Sferni trouglovi su kongruentni, ako imaju jednake dve strane i njima zahvaćeni ugao, ili jednu stranu i uglove na njoj.

    Odavde ostali stavovi sleduju sa njihovim objašnjenjima i dokazima.

16. Sve prave linije, koje polaze u jednoj ravni iz jedne tačke, mogu se u odnosu na jednu datu pravu liniju u istoj ravni podeliti u dve klase, i to u linije koje se *seku* i linije koje se *ne seku. Granična linija* između jedne i druge klase tih linija naziva se *paralelnom datoj liniji.*

Neka je iz tačke A(fig. 1) na liniju BC spuštena upravna AD, na koju je opet povučena upravna AE. U pravom uglu EAD ili će se sve prave linije, koje polaze iz tačke A, seći sa linijom DC, kao, na pr., AF,ili se neke od njih slično upravnoj AE, neće seći sa linijom DC. U neizvesnosti, da li je upravna AE jedina linija, koja se ne seče sa CD, mi ćemo pretpostaviti, da je mogućno da ima još drugih linija, na pr. AG, koje se ne seku sa DC, ma koliko bile produžene. Pri prelazu od linija AF, koje se seku, ka linijama AG, koje se ne seku, moramo naići na jednu liniju AH, koja je paralelna sa DC, na jednu graničnu liniju, na čijoj se jednoj strani nijedna od linija AG ne seče sa DC, dok se na drugoj strani svaka prava linija AF seče sa linijom DC.

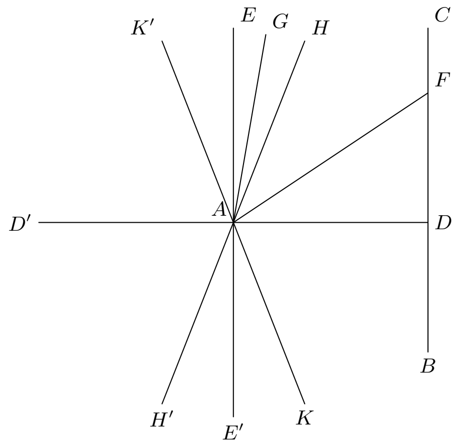


Fig. 1

Ugao HAD između paralelne HA i upravne AD naziva se *paralelnim uglom* (ugao paralelizma) i njega ćemo ovde obeležavati $\Pi(p)$ za $AD = p$. Ako je $\Pi(p)$ prav ugao, onda će produženje AE' upravne AE biti takođe paralelno produženju DB linije DC. Uz to ćemo još primetiti, da u odnosu na četiri prava ugla, koja u tački A čine upravne AE i AD i njihova produženja AE' i AD', svaka prava linija, koja polazi iz tačke A, ili sama, ili bar u svome produženju, leži u jednome od dva prava ugla, što se nalaze naspram BC, tako da osim paralelne EE' sve ostale, ako se s obe strane dovoljno produže, moraju seći liniju BC.

Ako je $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ onda će na drugoj strani upravne AD a pod istim uglom $DAK = \Pi(p)$ ležati još jedna linija AK paralelna sa produženjem DB linije DC, tako da kod ove pretpostavke moramo razlikovati još *stranu paralelizma*. Sve ostale linije ili njihova produženja, u okviru dva prava ugla što leže naspram BC, spadaju u linije koje se seku, ako u okviru ugla $HAK = 2\Pi(p)$ leže između paralelnih; naprotiv one spadaju u linije AG koje se ne seku, ako se nalaze na drugoj strani paralelnih AH i AK u otvoru uglova $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ između paralelnih i upravne EE' na AD. Na drugoj strani upravne EE' biće na sličan način produženja AH' i AK' takođe paralelna sa BC; ostale linije spadaju u uglu $K'AH'$ u linije koje se seku, a u uglovima $K'AE, H'AE$ u linije koje se ne seku.

Prema tome pri pretpostavci $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ linije mogu samo ili linije koje se seku ili paralelne; ako se pak pretpostavi da je $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ onda se moraju dopustiti dve paralelne, jedna na jednoj druga na drugoj strani; osim toga moraju se ostale linije razlikovati u linije koje se ne seku i u linije koje se seku. U obema pretpostavkama oznaka paralelizma je u tome, što linija pri najmanjem odstupanju na onoj strani, na kojoj se nalazi paralelna, postaje linijom koja se seče, tako da, ako ja AH paralelno sa DC svaka linija AF seče DC ma kako mali bio ugao HAF.

17. *Prava linija zadržava oznaku paralelizma u svim svojim tačkama.*

Neka je AB paralelna sa CD, na kojoj ja AC upravna. Mi ćemo posmatrati dve tačke, koje su uzete proizvoljno na liniji AB i njenom produženju na drugoj strani upravne. Neka tačka E leži na onoj strani uprane, na kojoj se smatra da je AB paralelno sa CD. Neka se iz tačke E spusti upravna EK na CD, zatim neka se povuče EF tak da pada u okvir ugla BEK. Neka se tačke A i F spoje jednom pravom linijom, čije prouženje mora seći CD po drugi put (stav 2.), to ce ona morati seći CD negde u H (stav 3.).

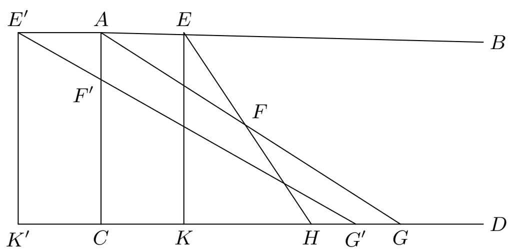


Fig. 2

Neka je sada E' tačka na produženju linije AB i $E'K'$ upravna na produženju linije CD, neka se povuče linija $E'F'$ pod tako malim uglom $AE'F'$ da seče AC negde u F', zatim, neka se pod istim ugom sa AB povuče iz A još linija AF, cije će produženje seći CD u G (16. stav). Na taj način dobija se trougao ACG u koji ulazi poduženje linije $E'F'$; pošto ova linija ne seče po drugi put AE, ali ne može seći ni AG jer je ugao $BAG = BE'G'$ (7. stav), to će ona morati seći CD negde u G'. Ma od kojih tačaka, dakle, polazile linije EF i $E'F'$ i ma kako malo odstupale od linije AB, one će ipak seći CD, sa kojom je AB paralelna.

18. *Dve su linije uvek uzajamno paralelne.*

Neka je AG upravna na CD (fig. 3), sa kojom je AB paralelna, neka se iz C povuče linija CE pod ma kakvim oštrim uglom ECD sa CD, i neka se iz A spusti upravna AF na CE, pa će se dobiti pravougli trougao ACF, u kome je hipotenuza AC veća od katete AF (9-ti stav). Načinimo $AF = AG$, pa će linije AB i FE doći u položaj linija AK i GH, tako da je ugao $BAK = FAC$, prema tome mora AK seći liniju DC negde u K (16-ti stav), čim postaje trougao AKC, u kome se upravna GH seče sa linijom AK u L (3-ći stav) i time određuje daljinu AL tačke preseka linija AB i CE na liniji AB od tačke A.

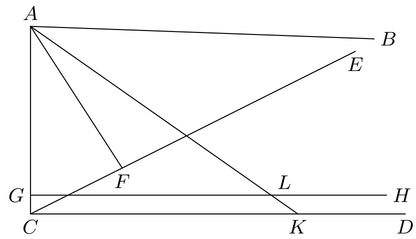


Fig. 3

Odavde sleduje, da će CE uvek seći AB, ma kako mali bio ugao ECD, prema tome je CD paralelno sa AB (16-ti stav).

19. *U pravolinijskom trouglu suma njegova tri ugla ne može biti veća od dva prava.*

Pretpostavimo da je u trouglu ABC (fig. 4) suma njegova tri ugla $\pi + \alpha$, izaberimo u slučaju nejednakosti strana najmanju BC, prepolovimo je u D, povucimo iz A kroz D liniju AD, i načinimo produženje njeno DE jednakim sa AD, zatim sopojimo tačku E pravom linijom EC sa tačkom C. U kongruentnim je trouglima ADB i CDE ugao $ABD = DCE$ i $BAD = DEC$ (6-ti i 10-ti stav);

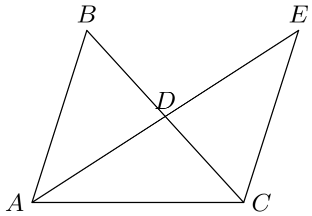


Fig. 4

odavde sleduje, da i u trouglu ACE suma njegova tri ugla mora biti jednaka $\pi+\alpha$, osim toga najmanji ugao BAC (9-ti stav) trougla ABC prešao je u novi trougao ACE, pri čemu je razlomljen u dva dela EAC i AEC. Produžujući na ovaj način, time što ćemo uvek prepolovljavati stranu koja leži naspram najmanjeg ugla, na posletku moramo doći do jednog trougla, u kome je zbir njegova tri ugla $\pi + \alpha$, ali u kome se nalaze dva ugla, od kojih je svaki po svojoj apsolutnoj veličini manji od $\frac{1}{2}\alpha$; pošto pak treći ugao ne može biti veći od π, to α mora biti ili nula ili negativno.

20. *Ako je ma u kome pravoliniskom trouglu suma njegova tri ugla jednaka dva prava, onda je to slučaj i u svakom drugom truglu.*

Neka je u pravoliniskom trouglu ABC (fig. 5) suma njegova tri ugla $= \pi$, tada moraju bar dva njegova ugla A i C biti oštri.

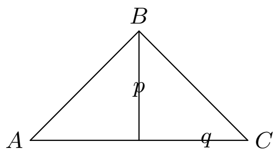


Fig. 5

Spustimo li iz temena trećeg ugla B na suprotnu stranu upravnu p, ta će upravna rastaviti trougao ABC u dva pravougla, u kojima će suma tri morati takođe iznositi π, da nebi u jednome od njih bila veća od π a u drugom manja od π. Na taj način dobija se jedan pravougli trougao, čije su katete p i q, a odatle jedan četvorougao, čije su suprotne strane jednake a strane p i q, koje su jedna pored druge, upravne (fig. 6).

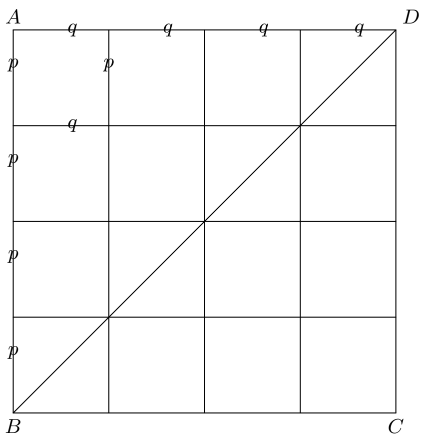


Fig. 6

Ponavljanjem ovoga četvorougla može se sastaviti sličan četvorougao sa stranama np i q, i naposletku četvorougao $ABCD$ sa stranama, koje su upavne jedna na drugoj, tako da je $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, gde su m i n proizvoljni celi brojevi. Takav četvorougao podeljen je dijegonalom BD u dva kongruentna pravougla trougla BAD i BCD, u kojima je suma njihova tri ugla $= \pi$. Brojevi n i m mogu se uzeti tako veliki, da pravougli trougao ABC (fig. 7), čije su katete $AB = np$, $BC = mq$, sadrži u sebi jedan drugi dati trougao BDE, čim se pravi uglovi poklope.

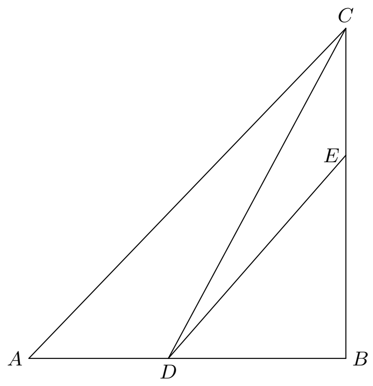


Fig. 7

Ako se povuče linija DC, dobiće se uz to pravougli trougli, od kojih sve po dva što sleduju jedan za drugim imju jednu zajednicku stranu. Trougao ABC postaje spajanjem trouglova ACD i DCB, u kojima suma tri ugla ne može biti veća od π; ona prema tome mora bit jednaka π, da bi ova suma mogla u složenom trouglu iznositi π. Na isti način sastoji se trougao DBC iz trouglova DCE i DBE, prema tome mora u DBE suma njegova tri ugla iznosit π, i to mora uopšte biti slučaj u svakom trouglu, pošto se svaki da rastaviti u dva pravougla trougla.

Odavde sleduje, da su dopuštene samo dve pretpostavke: ili je suma tri ugla u svim pravolinskim trouglima jednaka π, ili je ova suma u svima manja od π.

21. *Iz jedne date tačke može se uvek povući jedna pava linija tako, da ona sa datom pravom zaklapa neodređeno mali ugao.*

Neka se iz date tačke A (fig. 8) spusti upravna AB na datu pravu BC, neka se uzme na BC prizvoljna tačka D, povuče linija AD, načini $DE = AD$ i povuče AE. Ako je u pravouglom trouglu ABD ugao $ADB = \alpha$, onda mora u ravnokrakom trouglu ADE ugao AED bit ili jednak ili manji od $\frac{1}{2}\alpha$ (stav 8,20).

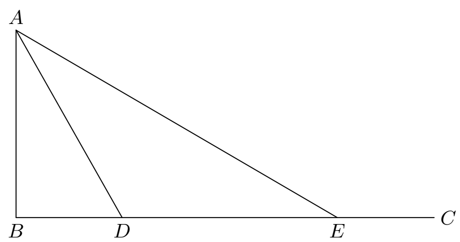


Fig. 8

Produžujući na taj način doćiće se naposletku do jednog takvog ugla AEB, koji je manji nego ma koji dati.

22. *Ako su dve upravne na istoj pravoj liniji među sobom paralelne, onda je suma triju uglova u pravoliniskim trouglima jdnaka* π

Neka su linije AB i CD (fig. 9) paralelne među sobom i upravne na AC. Povucimo iz A linije AE i AF prema tačkama E i F, koje su uzete na liniji CD u prizvoljnim odstojanjima $FC > EC$ od tačke C.

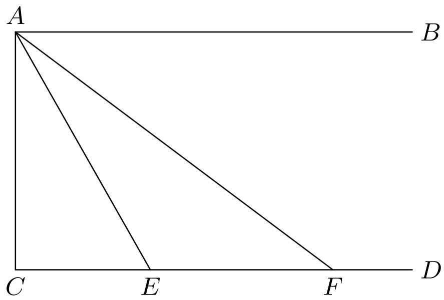


Fig. 9

Ako pretpostavimo, da je u pravouglome trouglu ACE suma njegova tri ugla jednaka $\pi - \alpha$, u trouglu AEF jdnaka $\pi - \beta$, onda će ona u trouglu ACF morati biti jednaka $\pi - \alpha - \beta$, gde α i β ne mogu biti negativni. Ako je dakle ugao $BAF = a$, $AFC = b$, onda je $\alpha + \beta = a - b$; ako učinimo da se linija AF udaljava sve više od upravne AC, može se ugao a između AF i paralelne AB učiniti proizvoljno malim, tako isto da se ugao b smanjiti, prema tome, uglovi α i β ne mogu imati drugu veličinu do $\alpha = 0$ i $\beta = 0$.

Prema tome, ili je u svim pravoliniskim trouglima suma njihova tri ugla π i u isto doba paralelan ugao $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ za svaku liniju p, ili je ova suma za sve trougle $< \pi$ pa prema tome i $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Prva pretpostavka služi za podlogu *obične geometrije i ravne geometrije*. Druga se pretpostavka može takođe dopustiti a da se ne dođe u rezultatima ni do kakve protivrečnosti, i čini osnov jedne nove geometriske doktrine, koju sam nazvao *„imaginarnom geometrijom"*, i koju nameravam ovde da izložim do izvođenja jednačina, koje postoje između strana i uglova kod pravoliniskih i sfernih touglova.

23. *Za svaki dati ugao* α *može se naći jedna linija* p, *tako da je* $\Pi(p) = \alpha$.

Neka su AB i AC (fig. 10) dve prave linije, koje u tački preseka A sklapaju ošta ugao α; uzimamo na AB proizvoljno tačku B', iz ove spustimo upravnu $B'A'$ na AC,

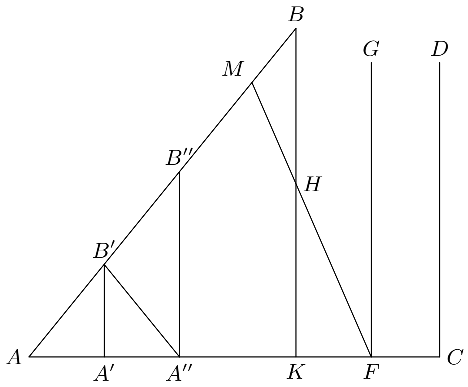


Fig. 10

načinimo $A'A'' = AA'$, podignimo u A'' upravnu $A''B''$ i produžim tako dok ne dođemo do jedne upravne CD, koja se više ne seče sa AB. Ovo mora nužnim načinom jednom biti, jer ako je u trouglu $AA'B'$ suma sva tri ugla jednaka $\pi - \alpha$, onda će ona u trouglu $AB'A''$ biti jednaka $\pi - 2\alpha$, u trouglu $AA''B''$ manja od $\pi - 2\alpha$, u trouglu $AA''B''$ manja od $\pi - 2\alpha$ (2. stav), i tako dalje, dok naposeltku ne postane negativnom i time ne pokaže nemogućnost obrazovanja trougla. Upravna CD može biti identična sa upravnom, od koje počev sve linije bliže tački A seku AB; u svakom slučaju mora egzistirati jedna takva upravna pri prelazu od linija koje seku linijama koje ne seku. Povucmo sada iz tačke F liniju FH, koja sa FG zaklapa oštri ugao HFG, i to na onoj strani na kojoj se nalazi tačka A. Iz ma koje tačke H linije FH spustimo na AC upravnu HK, čije će produženje, prema tome, morati seći AB negde u B, i na taj način postaće trougao AKB, u koji ulazi produženje linije FH, koji stoga mora seći hipotenuzu AB negde u M. Pošto je ugao GFH proizvoljan i može se učiniti proizvoljno malim, tp je FG paralelno sa AB i $AF = p$ (16-ti i 18-ti stav).

Lako se uviđa, da sa smanjivanjem linije p raste ugao α i da se za $p = 0$ približuje vrednosti $\frac{1}{2}\pi$; sa rašćenjem linije p smanuje se ugao α i približuje se sve više 0 za $p = \infty$. Pošto je sasvim svejedno, koji će se ugao podrazumevati pod znakom $\Pi(p)$, ako se linija p izrazi sa negativnim brojem, to ćemo uzeti da je

$$\Pi(p) + \Pi(p) = \pi$$

jednačina, koja treba da važi za sve vrednosti od p, kako pozitivne tako i negativne i za $p = 0$.

24. *što se paralelne linije više produžuju na strani njihovog paralelizma, tim se više približavaju jedna drugoj.*

Neka su na liniji AB (fig. 11) podignute dve upravne $AC = BD$ i njihove krajnje tačke C i D spojene jednom pravom linijom;

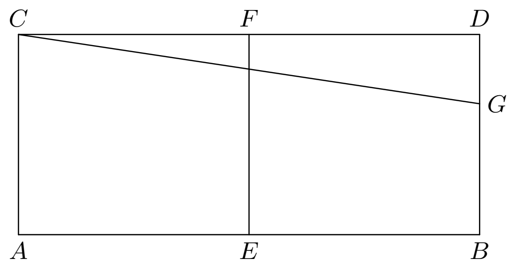


Fig. 11

tada će četvorougao $CABD$ u A i B imati dva prava, u C i D pak dva oštra ugla (22. stav), koji su međusobno jednaki, o čemu se lako možemo uveriti ako četvorougao položimo tako na samog sebe, da linija BD padne na AC a linija AC na BD. Prepolovimo AB i podignimo u tački polovljenja E upravnu EF na AB, koja mora u isto doba biti upravna i na CD, pošto su četvorougli $CAEF$ i $FEBD$ poklapaju kada se tako polože jedan na drugi, da linija EF ostane u itom položaju. Prema tome, linija CD ne može biti paralelna sa AB, već će paralelna sa ovom poslednjom za tačku C, naime linija CG, skrenuti na onu stranu na kojoj je AB (16. stav) i otseći od upravne BD deo $BG < CA$. Pošto je tačka C proizvoljna u liniji CG, to iz toga sleduje, da se linija CG, što više produžuje, tim više približuje liniji AB.

25. *Dve prave linije, koje su paralelne sa trećom, paralelne su i među sobom.*

Najpre ćemo uzeti, da tri linije AB, CD, EF (fig.12) leže u jednoj ravni. Ako su dve od njih, po redu AB i CD, paralelne sa krajnjom EF, onda su i AB i CD paralelne među sobom. Da bi ovo dokazali, spustimo iz ma koje tačke A krajnje linije AB na drugu liniju EF upravnu AE, koja će srednju liniju CD seći negde u tački C (3-ći stav) pod uglom $DCE < \frac{1}{2}\pi$ na strani linije EF paralelne sa linijom CD (22-ti stav). Upravna AG spuštena iz iste tačke A na CD mora se nalaziti u otvoru oštrog ugla ACG (9-ti stav), a svaka druga linija AH povučena iz A u okviru ugla BAC mora seći liniju EF paralelnu sa AB negde u H, ma kako mali bio ugao BAH, prema tome će CD u trouglu AEH seći liniju AH negde u K, pošto je nemogućno da se seče sa EF. Ako bi AH polazilo iz tačke A u okviru ugla CAG, ona bi morala seći produženje linije CD između tačaka C i G u trouglu CAG. Odavde slduje, da su AB i CD paralelne (16. i 18. stav).

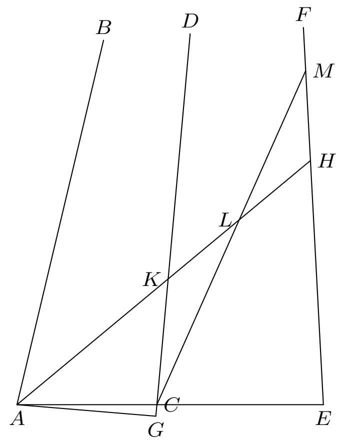


Fig. 12

Ako se uzme, da su obe krajnje linije AB i EF paralelne srednjoj CD, onda će svaka linija AK povučena iz tačke A u okviru ugla BAE seći liniju CD nege u tacki K, makako mali bio ugao BAK. Uzmio na prduženju od AK ma koju tačku L i spojimo je linijom CL sa tačkom C, koja mora seći EF negde u M, čime postaje trougao MCE. Produženje linije AL u okviru trougla MCE ne može seći ni AC ni CM po drugi put, prema tome su AB i EF uzajamno paralelne.

Neka sada paralelne AB i CD (fig. 13) leže u dve ravni, ciji je presek linija EF. Spustimo iz makoje tačke E na ovoj poslednjoj upravnu EA na jednu od paralelnih, na pr. na AB, zatim spustimo iz A, podnožje tačke upravne EA, jdnu novu upravnu AC na drugu paralelnu CD i spojimo krajnje tačke E i C tih upravnih linijom EC.

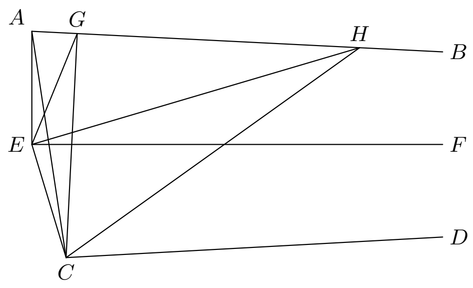


Fig. 13

Ugao BAC mora biti oštar (22-gi stav), prema tome pašće upravna CG, spuštena iz C na AB, u tačku G na onu stranu od CA, na kojoj se smatra da su linije AB i CD paralelne. Svaka linija EH, ma kako odstupala od EF, pripada sa linijom EC jednoj ravni, koja ravan paralelnih AB i CD mora seći duž neke linije . Ova poslednja linija seče negde AB i to u istoj tački H, zajedničkoj svim trima ravnima, kroz koju nužnim načinom prolazi i linija EH: prema tome je EF paralelno sa AB. Na sličan način dâ se dokazati i paralelizam linija EF i CD.

Prema tome, pretpostavka, da je linija EF paralelna sa jednom od druge dve AB i CD, koje su među sobom paralelne, ne znači ništa drugo do to, da se EF ima smatrati kao presek onih ravni, u kojima leže dve paralelne AB,CD. Prema tome, dve su linije paralelne među sobom kad su paralelne sa trećom i onda kad leže u različitim ravnima. Poslednji stav može se i ovako izraziti: *tri se ravni seku u linijama, koje su sve međusobom paralelne,čim se petpostavi paralelizam dveju od ovih.*

26. *Trougli, koji na površini kugle leže naspram drugog, jednaki su po površini.*

Pod suprotnim trouglima ovde podrazumevamo trougle, koje slaaju preseci kugline površine sa tri ravni na obe strane središta; stoga u takvim trouglima strane i uglovi imaju suprotan pravac.

U suprotnom su trouglovi ABC i $A'B'C'$ (fig. 14), (gde se jedan od njih ima da smatra da je predstavljen u obrnutom položaju), strane $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, tako isto jednaki su i odgovarajući uglovi u tačkama A, B, C uglovima u drugome trouglu u tačkama A', B', C'.Zamislimo jednu ravan položenu kroz tačke A, B, C i upravnu spuštenu na nju iz središta kugle, čija će produženja na obe strane seći suprotne trougle u tačkama D i D' kugline površine.

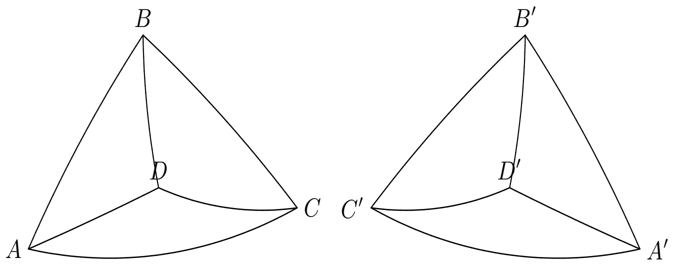


Fig. 14

Otstojanje tačke D od tačaka A, B, C merena na sferi lucima najvećih krugova, moraju biti jednaka (12. stav) kako među sobom tako i sa otstojanjima $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ u drugom trouglu (6. stav), prema tome su ravnokraki trougli oko tačaka D i D' u oba sferna trougla ABC i $A'B'C'$ kongruentni.

Da bismo uopšte mogli suditi o jednakosti dveju površina, sledeći stav uzimam za osnovu toga suđenja: *dve su površine jednake, ako postaju spajanjem ili odvajanjem jednakih delova.*

27. *Trostrani rogalj jednak je polovini sume površinskih uglova manje jednom pravom.*

U sfenom trouglu ABC(fig 15.), u kome je svaka strana $< \pi$, označimo uglove sa A, B, C, produžimo stranu AB tako da postane jedan ceo krug $ABA'B'A$, koji će kuglu podeliti na dva jednaka dela.

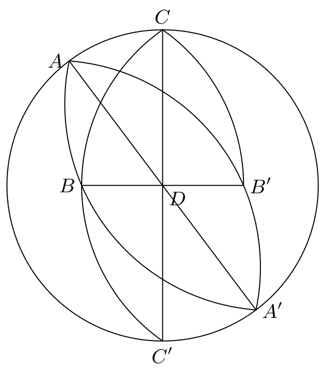


Fig. 15

Produžimo u onoj polovini, u kojoj se nalazi trougao ABC, i druge dve strane njegove kroz njihovu zajedničku tačku preseka C toliko, da se one seku sa krugom u A' i B'. Na taj način biće ta polovina kugle podeljena u četiri trougla ABC, ACB', $B'CA'$, $A'BC$, čije veličine neka su P, X, Y, Z.Jasno je da su ovde

$$P + X = B,$$
$$P + Z = A.$$

Veličina sfernog trougla Y jednaka je veličini suprotnog ugla ABC', koji ima zajedničku stranu AB sa trouglom P i čiji treći ugao C' leži na krajnjoj tački onog prečnika kugle koji polazi od C i prolazi kroz središte njeno D (26-ti stav). Odavde sleduje, da je $P + Y = C$ i, pošto je $P + X + Y + Z = \pi$, imamo takođe:

$$P = \tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi).$$

Do istog zaključka može se doći i drugim putem, oslanjajući se samo na gornji stav o jednakosti površina (26. stav).

U sfernom trouglu ABC (fig. 16) prepolovimo strane AB i BC, položimo kroz središnje tačke D i E jedan najveći krug i spustimo na ovaj iz tačaka A, B, C upravne AF, BH i CG. Ako upravna iz B i H pada između D i E, onda će trougao BDH biti jednak AFD i BHE jdnak EGC (6. i 15. stav), iz čega sleduje da je površina četvorougla $AFGC$ (26. stav).

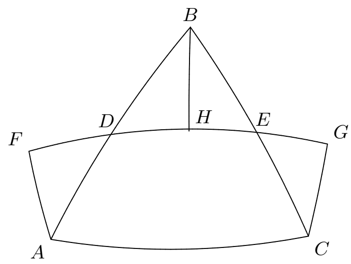


Fig. 16

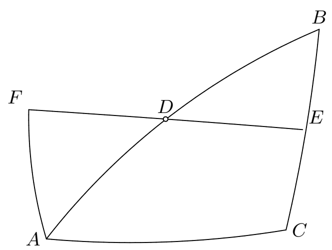


Fig. 17

Ako se tačka H poklapa sa središnjom tačkom E strane BC (fig. 17), onda će postojati samo dva jednaka pravougla trougla AFD i BDE, čijom se izmenom mesta dokazuje jednakost površina trougla ABC i četvorougla $AFEC$. Ako naposletku tačka H pada van trougla ABC (fig. 18) i upravna CG ide kroz trougao, onda ćemo preći od trougla ABC četvorouglu $AFGC$ ako dodamo trougao $FAD = DBH$, pa zatim oduzmemo trougao $CGE = EBH$. Ako u četvorouglu $AFGC$ zamislimo kroz tačke A i G, kao i kroz tačke F i C položene najveće krugove, luci njihovi između AG i FC biće jednaki (15. stav), prema tome, biće kongruentni trougli FAC i ACG (15. stav) i ugao FAC jednak uglu ACG.

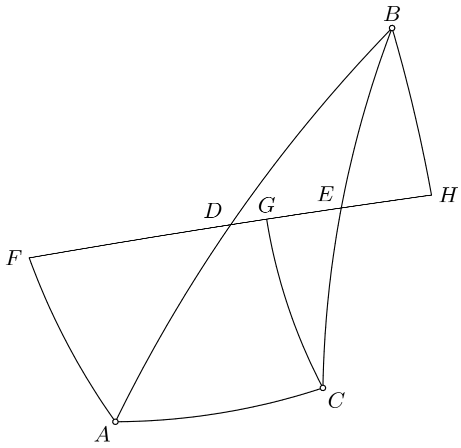


Fig. 18

Odavde sleduje, da je u svima prethodnim slučaevima suma sva tri ugla u sfernom trouglu jednaka sumi oba jednaka ugla u četvorouglu koji nisu pravi. Prema tome, može se svakom sfernom trouglu, u kome je suma njegova tri ugla S, naći četvorougao s istom površinom, u kome se nalaze dva prava ugla i dve jednake upravne strane i u kome je svaka od druga dva ugla jednaka $\frac{1}{2}S$

Neka je sada $ABCD$ (fig. 19) sferni četvorougao, u kome su strane $AB = DC$ upravne na BC i uglovi u A i D svaki $\frac{1}{2}S$.

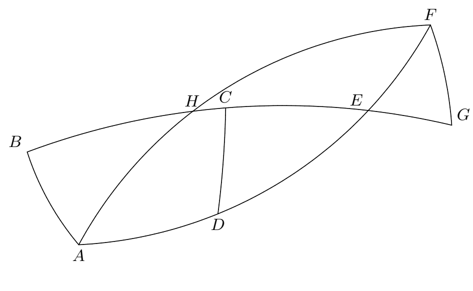


Fig. 19

Produžimo strane AD i BC tako da se one seku u E i produžimo ih dalje od E, načinimo $DE = EF$ i spustimo na produženje linije BC upravnu FG. Ceo luk BG prepolovmo i spojimo sredisnju tacku H lucima najvećeg kruga sa A i F. Trougli EFG i DCE kongruentni su (15. stav), prema tome je $FG = DC = AB$. Trougli ABH i HGF takođe su kongruentni, jer su pravougli i imaju jednake katete, prema tome, AH i HF pripadaju *jednom* krugu, luk AHF jednak je π, $ADEF$ takođe je $= \pi$, ugao $HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2} - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$. Prema tome je: ugao $HFE = \frac{1}{2}(S - \pi)$, ili, što je isto: jednak veličini isečka

$AHFDA$. Veličina ovog jednaka je opet četvorouglu $ABCD$, što se lako vidi ako se od jednog pređe na drugi dodajući najpre trougao EFG i BAH a zatim oduzimajući trougle DCE i HFG, koji su im jednaki. Prema tome je $\frac{1}{2}(S-\pi)$ veličina četvorougla $ABCD$ i u isto doba veličina sfernog trougla, u kome je suma sva tri ugla jednaka S.

28. *Ako se tri ravni seku u paralelnim linijama, suma njihova tri površinska ugla iznosi dva prava.*

Neka su AA', BB', CC' (fig. 20) tri paralelne linije koje postaju presecanjem triju ravni (25. stav). Uzmimo na njima tri proizvoljne tačke A, B, C i zamislimo kroz njih položenu jednu ravan, koja će prema tome seći ravni paralelnih u pravim linijama AB, AC, BC. Dalje položimo kroz liniju AC i ma koju tačku D na liniji BB' još jednu ravan, čiji će preseci sa ravnima paralelnih AA', BB', i CC', BB' biti linije AD i DC, i čiji ćemo nagib prema trećoj ravni paralelnih AA' i CC' označiti sa w (u fig. 2' sa $w1$ i $w2$).

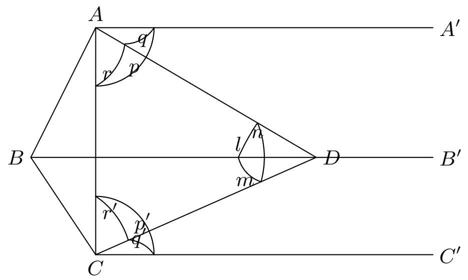


Fig. 20

Uglove između ravni, u kojima se nalaze paralelne linije, označićemo sa X, Y Z na linijama AA', BB' i CC' (fig. 2'); naposletku neka su linearni uglovi $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Zamislimo oko A kao središta opisanu jednu kuglinu površinu, na kojoj prseci njeni sa pravama AC, AD i AA' određuju sferni trougao, čije strane neka su p, q, r a površina α, a čiji su uglovi: w naspram srane q, X naspram strane r i prema tome $\pi + 2\alpha - w - X$ naspram strane p (27. stav). Na isti način seku CA, CD, CC' kuglinu površinu oko središta C i određuju trougao veličine β sa stranama p', q', r' i uglovima: w naspram q', Z naspram r' i prema tome $pi + 2\beta - w - Z$ naspram p'. Naposletku preseci kugline površine oko D sa linijama DA, DB, DC određuju sferni trougao, čije su strane l, m, n a suprotni uglovi $w + Z - 2\beta, w + X - 2\alpha$ i Y, čija je površina, prema tome, $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$.

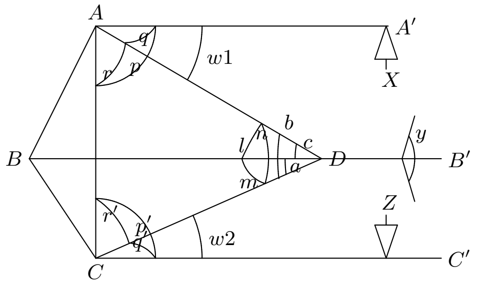


Fig. 2'

Kad w opada opadaju i površine trouglova α i β tako, da uglu δ mogu se strane l i m smanjiti takođe do u beskonačnost (21. stav), prema tome može se trougao δ jednom od svojih strana l ili m položiti na najveći krug kugle koliko se hoće puta a da time polovina kugle ne bude ispunjena, prema tome δ iščezava u isto doba sa w; iz čega sleduje da je nužnim načinom $X + Y + Z = \pi$.

29. *U pravolinijskom trouglu ili se upravne podignute u sredinama strana ne seku ili se sve tri seku u jednoj tački.*

Pretpostavimo da se u trouglu ABC (fig. 21) dve upravne ED i DF, podignute na stranama AB i BC u njihovim središnim tačkama E i F, seku u tački D, i povucimo u okviru uglova trouglovih linije DA, DB, DC.

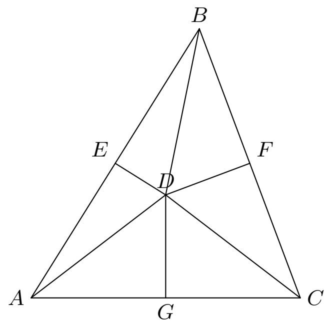


Fig. 21

U kongruentnim je trouglima ADE i BDE (10. stav) $AD = BD$, tako isto sleduje da je i $BD = CD$; trougao ADC je, prema tome, ravnokrak i upravna spuštena iz temena D na osnovicu AC pašće u njenu središnu tačku G.

Dokaz ostaje isti i kada tačka preseka upravnih ED i FD leži u liniji AC ili kad pada van trougla. U slučaju, dakle, kad se pretpostavi da se dve od ovih upravnih ne seku, ne može se ni treća sa njima seći.

30. *Upravne podignute u sredinama strana pravoliniskog trougla moraju sve tri biti paralelne, ako se pretpostavi paralelizam dveju od njih.*

Neka su u trouglu ABC (fig 22.) linije DE, FG, HK upravne na stranama u njihovim središnjim tačkama D, F, H.

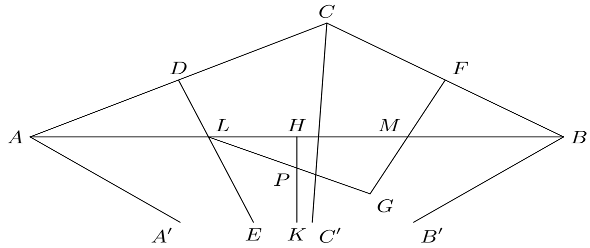


Fig. 22

Mi ćemo najpre pretpostaviti, da su upravne DE i FG paralelne, da one liniju AB seku u LM, i da se upravna HK nalazi između njih. U okviru ugla BLE povucimo proizvoljno pravu liniju LG, koja će morati FG seći negde u G ma kako mali bio ugao otstupanja GLE (16. stav). Pošto se u trouglu LGM upravna HK ne može seći sa MG (29. stav), ona mora seći LG negde u P, odakle sleduje, da HK mora biti paralelna sa DE (16. stav) i MG (18. i 25. stav).

Ako se stavi strana $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$ i uglovi suprotni ovim stranama označe sa A, B, C onda imamo u gornjem slučaju

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) - \Pi(b),$$

o čemu se lako uveravamo pomoću linija AA', BB', CC', koje su iz tačaka A, B, C povučene paralelno upravnoj HK i koje su, prema tome, paralelne i sa druge dve upravne DE i FG (23. i 25. stav).

Neka su sada upravne HK i FG među sobom paralelne, treća upravna DE tada ih neće seći (29. stav), prema tome, ona je ili paralelna sa njima ili seče AA'. Poslednja pretpostavka ne znači drugo do da je ugao $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Smanji li se ovaj ugao tako, da postane jednak $\Pi(a) + \Pi(b)$, što će biti ako se liniji AC dâ nov položaj CQ (fig. 23),

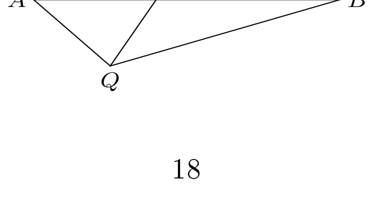


Fig. 23

i dužina treće strane BQ označi sa $2c'$, onda mora ugao CBQ u tački B, koji je postao veći, prema onome što je gore dokazano, biti jednak $\Pi(a)-\Pi(c') > \Pi(a)-\Pi(c)$ odakle sleduju $c' > c$ (23. stav). Ali u trouglu ACQ uglovi u A i Q su jednaki, prema tome mora u trouglu ABQ ugao kod Q biti veći od ugla u tački A, prema tome je $AB > BQ$ (9. stav); što znači da je $c > c'$.

31. *Graničnom linijom (oriciklom) nazivamo onu krivu liniju u ravni, kod koje su sve upravne podignute u središnjim tačkama tetiva međusobno paralelne.*

U saglasnosti sa ovom definicijom možemo proizvođenje granične linije zamisliti na taj način, što ćemo na datoj pravi AB iz jedne od njenih tačaka A povlačiti pod raznim uglovima $CAB = \Pi(a)$ tetive $AC = 2a$;

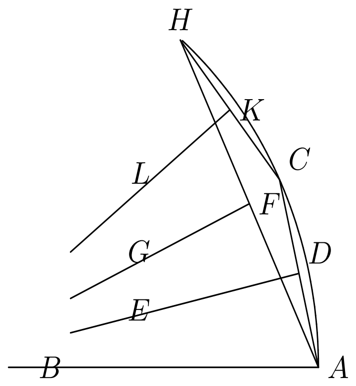


Fig. 24

kraj C jedne takve tetive ležaće na graničnoj liniji, čije tačke možemo postpeno odrediti na taj način. Upravna DE na tetivi AC u njenoj sredini D biće paralelna sa linijom AB, koju ćemo nazvati *osom granične linije.*Isto tako biće i svaka druga upravna podignuta u središnjoj tački ma koje tetive AH paralelna sa AB, prema tome, ova osobina mora pripadati i svakoj drugoj upravnoj KL uopšte, koja je podignuta u središnjoj tački K ma koje tetive , koja je povučena između makojih tačaka C i H na graničnoj liniji (30. stav). Takve upravne moraju se dakle takođe bez razlike kao i AB nazvati *osama granične linije.*

32. Krug, čiji poluprečnik raste, prelazi u graničnu liniju.

Neka je AB (fig. 25) tetiva granične linije, povucimo iz njenih krajnjih tačaka: A i B dve ose AC i BD, koje će, prema tome, sklapati sa tetivom dva jednaka ugla $BAC = ABD = \alpha$ (31. stav).

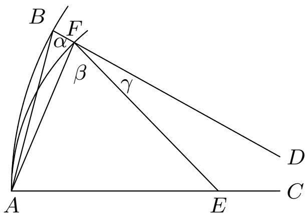


Fig. 25

Na jednoj od ovih osa AC uzmimo ma gde tačku E za središte jednog kuga i povucimo luk AF od početne tačke A ose AC do njegove tačke preseka F sa drugom osom BD. Poluprečnik FE kruga, koji odgovara tački F, sklapaće na jednoj strani sa tetivom AF ugao $AFB = \beta$ a na drugoj strani sa osom BD ugao $EFD = \gamma$. Izlazi da je ugao između obe tetive $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (22. stav), odakle sleduje: $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Pošto se pak ugao γ smanjuje do nule kako kretanjem središta E u pravcu AC, pri čemu F ostaje nepromenjeno (21. stav), tako i približavanjem tačke F tački B, pri čemu središte E koje ostaje u svome položaju (22. stav), to sleduje, da takvim smanjivanjem ugla γ iščezava i ugao $\alpha - \beta$, odnosno uzajamni nagib tetiva AB i AF, pa prema tome i odstojanje tačke B na graničnoj liniji od tačke F na krugu. Prema tome može se granična linija nazvati *krugom sa beskonačno velikim poluprečnikom.*

33. Neka su $AA' = BB' = x$ (fig. 26), dve linije paralelne među sobom na strani idući od A ka A', ose graničnih lukova (lukova na dvema graničnim linijama) $AB = s$, $A'B' = s'$, tada je

$$s' = se^{-x},$$

gde je e nezavisno od lukova s, s' i prave x, koja predstavlja odstojanje luka s od s'.

Da bismo ovo dokazali pretpostavimo, da je odnos luka s prema luku s' jednak odnosu dva cela broja n i m. Između osa AA', BB' povucimo treću osu CC',koja će na taj način otsecati od luka AB deo $AC = t$ i od luka $A'B'$ na istoj strani deo $A'C' = t'$.

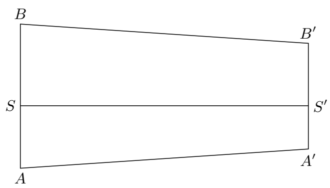


Fig. 26

Neka je odnos između t i s jednak odnosu dva cela broja p i q, tako da je

$$s = \frac{n}{m}s', \qquad t = \frac{p}{q}s.$$

Podelimo sada s osama u nq jednakih delova tako, da će takvih delova biti nq na s i np na t. Kako ovi jednaki delovi na s i t odgovaraju tako isto jednakim delovima na s' t' imamo:

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

Ma gde dakle uzeli luke t i t' između osa AA' i BB', uvek će njihov odnos ostati isti, dokle god otsojanje njihovo ostaje isto. Ako se stoga za $x = 1$ stavi $s = es'$ onda će za svako x morati biti

$$s' = se^{-x}.$$

Pošto je e nepoznat broj a podleži samo usovu $e > 1$ i pošto se dalje jedinica dužine za x može uzeti proizvoljno, to je možemo radi računskog uprošćavanja tako izabrati, da se pod e razume osnova Neperovih logaritama.

Još se ovde može primetiti, da je za $x = \infty$, $s' = 0$, prema tome, ne samo što se smanjuje otstojanje između dve paralelne (24. stav), nego ono naposletku sasvim iščezava pri produženju paralelnih na strani paralelizma. Paralelne linije imaju dakle karakter asimptota.

34. *Granična površina*(orisfera) *naziva se ona* površina koja postaje obrtanjem granične linije oko jedne od njenih osa, koja će zajedno sa svima ostalima osama granicne linije biti osa i granične površine.

    Tetiva sklapa jednake uglove sa osama povučenim kroz njene krajne tačke, pa ma gde da se uzmu na graničnoj površini ove dve krajne tačke.

Neka su A, B, C (fig. 27) tri tačke na graničnoj površini, AA' osa obrtanja, BB' i CC' dve druge ose, prema tome AB i AC tetive koje sa osama sklapaju jednake uglove $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (31. stav); ose BB', CC' povučene kroz krajne tačke treće tetive BC takođe su paralelne i leže u jednoj ravni (25. stav). Upravna DD' podignuta u sredini D tetive AB i u ravni paralelnih AA', BB' mora biti paralelna sa osama AA', BB', CC' i upravnom DD'. Ugao između ravni,u kojoj su paralelne AA' i BB, i ravni trougla ABC označićemo sa $\Pi(a)$, gde a može biti pozitivno, negativno ili nula. Ako je a pozitivno, povucimo $FD = a$, u trouglu ABC i ravni njegovoj, upravno na tetivu AB iz njene središnje tačke D; ako je a negativan broj, FD se mora povući van trougla na drugoj strani tetive AB; ako je $a = 0$, tačka F poklapa se sa tačkom D.

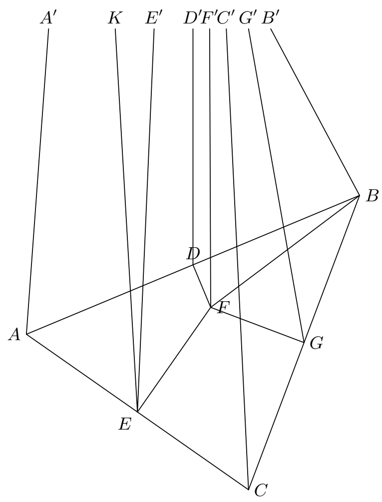


Fig. 27

U svim ovim slučajevima postaju dva kongruentna pravougla trougla AFD i DFB, prema tome je $FA = FB$. Podignimo sada u F liniju FF' upravno na ravan trougla ABC.

Pošto je ugao $D'DF = \Pi(a)$, $DF = a$, to je FF' paralelno sa DD' i linijom EE', sa kojom leži u jednoj istoj ravni, koja je upravna na ravni trougla ABC. Zamislimo sada da je u ravni paralelnih EE', FF' podignuta na EF upravna EK, ta će upravna stajati upravno i na ravni trougla ABC (13. stav) i na liniji koja leži u toj ravni (11. stav), prema tome mora AE, koja je upravna na EK i EE', biti u isto doba upravna i na FE (11. stav). Trougli AEF i FEC su kongruentni, pošto su pravougli i imaju jednake katete, prema tome je $AF = FC = FB$. Upravna spuštena iz temena F ravnokrakog trougla BFC na osnovicu BC prolazi kroz njenu središnju tačku G; ravan položena kroz ovu upravnu FG i liniju FF' mora biti upravna na ravni trougla ABC i seći ravan paralelnih BB', CC' (25. stav); pošto je pak CG upravno na FG, pa prema tome u isto doba i na CG', to je i ugao $C'CG = B'BG$ (23. stav).

Odavde sleduje, da se svaka osa može smatrati za obrnutu osu granične površine.

Glavnom ravni nazivaćemo svaku ravan koja je položena kroz jednu osu granične površine. Prema tome, svaka *glavna ravan* seče graničnu površinu u graničnoj liniji, dok je za svaki drugi položaj presecajuće ravni ovaj presek krug. Tri glavne ravni, koje se uzajamno seku, sklapaju među sobom uglove čija je suma π (28. stav). Ove ćemo uglove smatrati za uglove graničnog trougla, čije su strane luci graničnih linja, koje su preseci granične površine sa onim trima glavnim ravnima. Kod graničnih trouglova postoji dakle ista zavisnost između uglova i strana, kava se dokazuje u običnoj geometriji za pravolinijske trougle.

35. U sledećem označavaćemo veličinu linije jednim pismenom sa dodatim akcentom, na pr. x', da bismo izrazili, da njena veličina stoji u jednom odnosu sa veličinom druge linije, koja je obeležena istim znakom x bez akcenata, koji je izražen jednačinom

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi.$$

Neka je sada ABC (fig. 28)jedan pravoliniski trougao, u kome je hipotenuza $AB = c$, katete $AC = b$, $BC = a$, a suprotni uglovi $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$. Podignimo u tački A upravnu AA',na ravan trougla ABC i iz tačaka B i C povucimo BB' i CC' paralelno sa AA'. Ravni, u kojima leže ove tri paralelne, sklapaju među sobom uglove: $\Pi(\alpha)$ na ivici AA', prav ugao na ivici CC' (11. i 13. stav), prema tome $\Pi(\alpha')$, na ivici BB' (28. stav).

Preseci linija BA, BC, BB' sa površinom kugle, koja je opisana oko tačke B kao središta, određuju sferni trougao, u kome je strana $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(\alpha)$ a suprotni uglovi $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$.

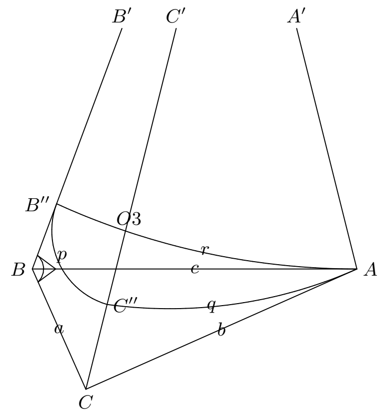


Fig. 28

Prema tome egzistencija jednog pravoliniskog trougla sa stranama a, b, c, i suprotnim uglovima $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ povlači sa sobom egzistenciju jednog sfernog trougla (fig. 29) sa stranama $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ i suprotnim uglovima $\Pi(\beta)$, $\Pi(a')$, $\frac{1}{2}\pi$. Ali i obrnuto, egzistencija datog sfernog trougla uslovljava egzistenciju jednog novog pravoliniskog trougla, čije su strane a, α', β a suprotni uglovi $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$.

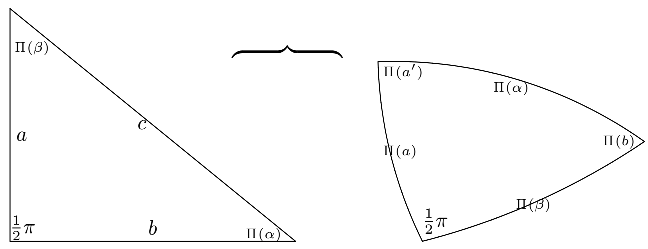


Fig. 29

Prema tome može se od a, b, c, α, β preći na b, a, c, β, α, kao i na a, α', β, b', c.

Zamisimo da je kroz tačku A (fig. 28) položena granična površina sa osom AA', površina koja druge dve ose BB', CC' seče u B'' i C'', i čiji preseci s ravnima paralelnih sklapaju granični trougao, čije su strane $B''C'' = p$, $C''A = q$, $B''A = r$, a suprotni ugovi $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$, i gde je prema tome (34. stav):

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \qquad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Ako sada spoj date tri ravni rasklopimo duž linije BB' (fig. 30) i te ravni razvijemo tako, da one sa svim svojim linijama dođu u jednu ravan, tada će se očevedno luci p, q, r spojiti u jedan luk jedne granične linije, koja će prolaziti kroz tačku A i imati AA' za osu. Osim toga nalaziće se na jednoj strani AA': luci q i p, strana b trougla, koja je u A upravna na AA', osa CC', koja polazi iz krajne tačke linije b paralelno sa AA' i ide kroz dodirnu tačku C' linija p i q, strana a upravno na CC' u tački C, i iz krajne tačke njene osa BB' paralelna s AA', koja prolazi kroz krajnu tacku B'' luka p. Na drugoj srani od AA' nalaziće se: strana c upravna na AA' u tački A, i osa BB' paralelna sa AA', koja polazi iz krajne tačke linije c i ide kroz krajnu tačku B'' luka r.

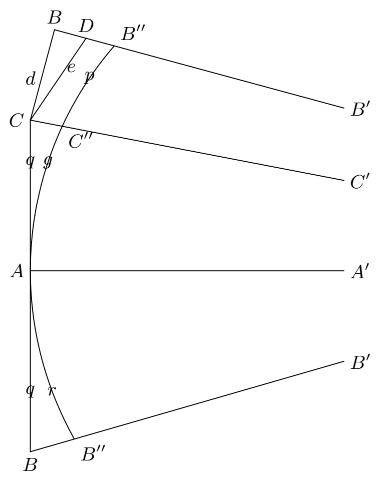


Fig. 30

Veličina linije CC' zavisi od b, i tu ćemo zavisnost označiti sa $CC'' = f(b)$. Na isti način biće $BB'' = f(c)$. Ako se sa CC' kao osom opiše jedna nova granična linija iz tačke C pa do preseka njenog D sa osom BB' i luk CD označi sa t, biće $BD = f(a)$; $BB'' = BD + DB = BD + CC''$, prema tome:

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Osim toga vidimo da je (33. stav)

$$t = pe^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha) \cdot e^{f(b)}.$$

Da je mesto u tački A podignuta upravna u tački B na ravan trougla ABC linije c i r ostale bi iste, ali luci q i t pretvorili bi se u t i q, prave a i b u b i a i ugao $\Pi(\alpha)$ u $\Pi(\beta)$, prema tome imali bismo

$$q = r \sin \Pi(\beta) \cdot e^{f(a)},$$

odakle sleduje, kad se mesto q stavi njegova vrednost,

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) \cdot e^{f(a)},$$

a kad se mesto α i β stave b' i c

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(a)},$$

i dalje množenjem sa $e^{f(b)}$

$$\sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)} = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(c)}.$$

Odavde sleduje da je i :

$$\sin \Pi(a) \cdot e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)}$$

Pošto su pak prave a i b nezavisne jedna od druge, i osim toga $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{\pi}{2}$ za $b = 0$, to je za svaku pravu liniju a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a),$$

prema tome:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$

$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

Odavde se još dobija izmenom pismena:

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$

$$\cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta).$$

Ako se u sfernom pravouglom trouglu (fig. 29) strane $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\alpha)$ označe pismenima a, b, c a suprotni ugovi $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ pismenima A, B, onda će nađene jednačine dobiti formu onih jednačina, koje se, kao što je poznato, izvode u sfernoj triginometriji za pravougle trougle, naime:

$$\sin \alpha = \sin c \sin A,$$

$$\sin b = \sin c \sin B,$$

$$\cos A = \cos a \sin B,$$

$$\cos B = \cos b \sin A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

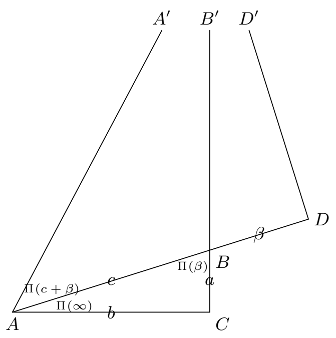
sa kojih se jednačina može preći na jednačine za sve sferne trougle uopšte.

Prema tome, sferna triginometrija ne zavisi od toga, da li je zbir ugova u pravoliniskome trouglu jednak dvama pravama ili ne.

36. Sada ćemo ponova posmatrati pravougli pravoliniski trougao ABC (fig. 31), u kome su strane a, b, c a suprotni uglovi $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Produžimo hipotenuzu c preko tačke B i načinimo $BD = \beta$; u tački D podignimo upravnu DD' na BD, koja će prema tome biti paralelna sa BB', tj. s produženjem strane a na drugu stranu od tačke B. Iz tačke A povucimo još paralelnu AA'sa DD', koja je u isto doba paralelna i sa CB' (25. stav), sa čega je ugao $A'AD = \Pi(c+\beta)$, $A'AC = \Pi(b)$ dakle:

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+b).$$

Ako prenesmo dužinu β na hipotenuzu c iz tačke B, zatim u krajnoj tački njenoj D (fig. 32) podignimo upravnu DD' na AB u okviru trougla, a iz tačke A povučemo paralelnu



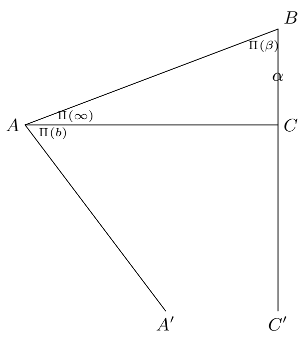
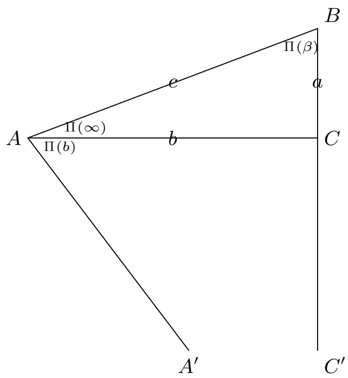


Fig. 31 Fig. 32

AA' sa DD', onda će BC biti sa svojim produženjem CC' treća paralelna



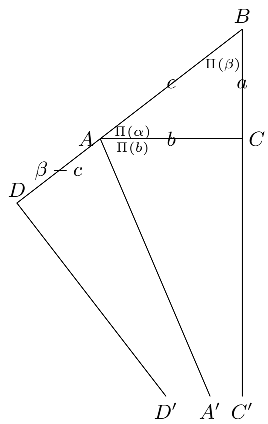


Fig. 33 Fig. 34

tada je: ugao $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c - \beta)$, prema tome,

$$\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(\beta).$$

Ova poslednja jednačina važi i onda kada je $c = \beta$ ili $c < \beta$. Ako je $c = \beta$ (fig. 33), onda je upravna AA' podignuta u tački A na AB paralelna strani $BC = a$ sa njenim produženjem CC', prema tome je $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, dok je takođe $\Pi(c - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ (23. stav).

Ako je $c < \beta$, kraj od β pada na drugu stranu tačke A u D (fig. 34) na produženje hipotenuze AB. Na AD podignuta upravna DD' iz A biće i ovde paralelna strani $BC = a$ sa njenim produženjem CC'. Ovde je ugao $DAA' = \Pi(\beta - c)$, prema tome, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (23. stav).

Spajanjem obe jednačine dobija se

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

odakle sleduje

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)]}{\cos[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)]}.$$

Zamenili se ovde vrednost (35. stav)

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c),$$

onda se dobija,

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(c-\beta) \cdot \tan \frac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

Pošto je ovde β proizvoljan broj, jer se ugao $\Pi\beta$, koji se nalazi na jednoj strani od c može uzeti proizvoljno između granica 0 i $\frac{\pi}{2}$, prema tome β između granica 0 i ∞, to ćemo zaključiti, ako stavimo redom $\beta = c$, $2c$, $3c$ itd. , da je za svaki pozitivan broj n

$$\tan^n \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(nc).$$

Ako se n smatra odnos dveju linija x i c i ako se pretpostavi da je

$$\cot \frac{1}{2}\Pi(c) = e^c,$$

onda se nalazi za svaku liniju x opšte, pa bilo da je ona pozitivna ili negativna

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

gde e može biti svaki mogućni broj veći od jedan, pošto je za

$$x = \infty, \quad \Pi(x) = 0.$$

Pošto je proizvoljna linija kojom se mere linije , to se pod e može podrazumevati i osnova Naperovih lagaritama.

37. Od gore nađenjih jednačina (35. stav) dovoljno je poznavati sledeće dve

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b),$$
$$\sin\Pi(\alpha) = \sin\Pi(b)\cos\Pi(\beta),$$

ako se pri tome ova poslednja primeni na obe katete a i b, pa da se njihovim spajanjem izvedu ostale dve (35. stav) bez dvosmislenosti algebarskih znakova, pošto su ovde svi uglovi oštri. Na sličan način dolazi se do sledećih dveju jednačina

$$\tan\Pi(c) = sin\Pi(\alpha)\tan\Pi(\alpha), \tag{1}$$
$$\cos\Pi(\alpha) = \cos\Pi(c)\cos\Pi(\beta). \tag{2}$$

Sad ćemo posmatrati jedan pravoliniski trougao čije su strane a, b, c, (fig. 35) a suprotni uglovi A, B, C. Ako su A i B oštri uglovi, upravna p spuštena iz temena ugla C u trouglu pada na stranu c i deli je u dva dela, i to u deo x na strani ugla A i $c - x$ na strani ugla B.

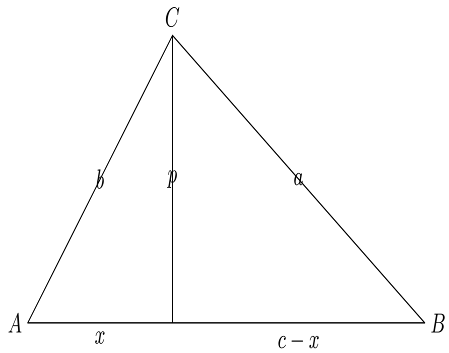


Fig. 35

Na taj način postaju dva pravougla trougla, za koje se primenom jednačine (1) dobija:

$$\tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(p),$$

$$\tan \Pi(b) = \sin A \tan \Pi(p),$$

jednačine koje ostaju nepromenjene i kad je jedan od uglova,

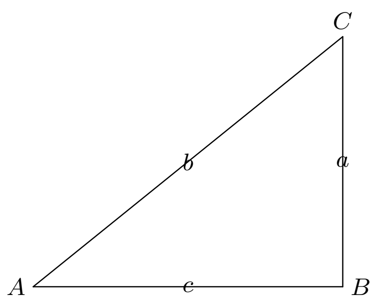


Fig. 36

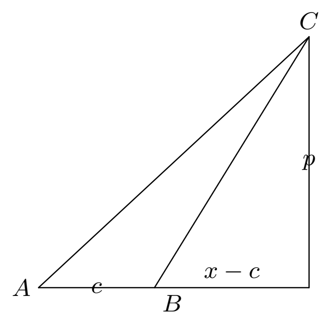


Fig. 37

na pr. B prav ili tup (fig. 37). Prema tome imamo uopšte za svaki ugao

$$\sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b). \tag{3}$$

Za trougao sa oštrim uglovima A, B, (fig. 35) imamo još i (2-ga jednačina):

$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b),$$

$$\cos \Pi(c - x) = \cos B \cos \Pi(a),$$

jednačine koje se odnose i na trougle u kojima je jedan od uglova A ili B prav ili tup. Na primer, mora se za $B = \frac{1}{2}\pi$ (fig. 36) uzeti da je $x = c$, tada prva jednačina prelazi u gore nađenu (2-gu jednačinu), a druga je sama sobm data. Za $B > \frac{1}{2}\pi$ (fig. 37) prva jednačina ostaje nepromenjena, a mesto druge moramo pisati odgovarajuću:

$$\cos\Pi(x-c) = \cos(\pi - B)\cos\Pi(a),$$

ali je $\cos\Pi(x-c) = -\cos\Pi(c-x)$ (23. stav) a i $\cos(\pi - B) = -\cos B$.

Ako je A prav ili tup ugao onda se mora mesto x i $c-x$ staviti $c-x$ i x, da bi se ovaj slučaj sveo na pređašnji.

Da bismo eliminisali x iz obe jednačine, primetićemo da je (36. stav)

$$\begin{aligned}\cos\Pi(c-x) &= \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1+\tan^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}\\ &= \frac{1-e^{2x-2c}}{1+e^{2x-2c}}\\ &= \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)}{1+\tan^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)}\\ &= \frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}.\end{aligned}$$

Ako se ovde zameni izraz za $\cos\Pi(x)$, $\cos\Pi(c-x)$ dobija se :

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\cos B + \cos\Pi(b)\cos A}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},$$

odakle sleduje

$$\cos\Pi(a)\cos\Pi(b) = \frac{\cos\Pi(c) = \cos A\cos B}{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

i naposletku:

$$\sin^2\Pi(c) = [1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)]\cdot[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)].$$

Na sličan način mora biti i:

$$\sin^2\Pi(a) = [1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)]\cdot[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)]. \quad (4)$$

$$sin^2\Pi(b) = [1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]\cdot[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)]$$

Iz ove tri jednačine nalazi se još:

$$\frac{\sin^2\Pi(b)\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)} = [1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)].$$

Odavde sleduje bez dvosmislenosti znakova:

$$\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1. \quad (5)$$

Ako se ovde zameni vrednost od $\sin\Pi(c)$ u saglasnosti sa jednačinom (3),

$$\sin\Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C}\tan\Pi(a)\cos\Pi(c)$$

dobija se

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\sin C}{\sin A\sin\Pi(b) + \cos A\sin C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)},$$

ili ako se ovaj izraz za $\cos\Pi(c)$ zameni u jednačini (4),

$$\cot A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}. \tag{6}$$

Eliminacijom $\sin\Pi(b)$ pomoću jednačine (3) izlazi:

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}\cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B}\sin C\sin\Pi(a),$$

Jednačina (6) daje, međutim, promenom pismena

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)} = \cot b\sin C\sin\Pi(a) + \cos C.$$

Iz poslednje dve jednačine sleduje:

$$\cos A + \cos B\cos C = \frac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)}. \tag{7}$$

Sve četiri jednačine za zavisnost strana a, b, c u pravoliniskom trouglu biće prema tome [identične sa (3), (5), (6), (7)]:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sin A\tan\Pi(a) = \sin B\tan\Pi(b), \\ \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1, \\ \cos A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B\cos C = \frac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)}. \end{cases}$$

Ako su srane a, b, c, trougla vrlo male, možemo se zadovoljiti približnim vrednostima (36. stav)

$$\cot\Pi(a) = a,$$

$$\sin\Pi(a) = a - \frac{1}{2}a^2,$$

$$\cos\Pi(a) = a,$$

i na sličan način i za druge strane b i c. Jednačine (8) prelaze za takve trougle u sledeće:

$$b\sin A = a\sin B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$a\sin(A+c) = b\sin A,$$

$$\cos A + \cos(B+c) = 0.$$

Prve dve od ovih jednačina pretpostavlja obična geometrija; iz druge dve sleduju, uzimajući u pomoć prve dve, zaključak:

$$A + B + C = \pi.$$

Prema tome, imaginarna geometrija prelazi u običnu kad se pretpostavi, da su strane pravolinisog trougla vrlo male.

O merenju krivih linija, ravnih figura, površina i zapremina tela, kao i o primeni imaginarne geometrije na analizu, objavio sam nekoliko ispitivanja u „Učenim zapisnicima Univerziteta kazanskog".

Jednačine (8) pružaju već same sobom dovoljnu podlogu, da se pretpostavka imaginarne geometrije može smatrati za mogućnu. Prema tome, astronomska posmatranja su jedino sredstvo, da bi se moglo suditi o tačnost proračuna obicne geometrije. Ova se tačnost prostire vrlo daleko, kao što sam to pokazao jednom od svojih rasprava, tako da, na pr. u trouglima, čije su strane još pristupačne našim merenjima, zbir njihova tri ugla nije različan od dva prava za stoti deo jedne sekunde.

Još je vredno istaći, da one četiri jednačine (8) ravne geometrije prelaze u jednačine za sferne trougle, ako se mesto strana a, b, c stavi: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, ali sa ovom promenom mora se očevidno staviti i da je:

$$\sin\Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$

$$\cos\Pi(a) = \sqrt{-1}\tan a,$$

$$\tan\Pi(a) = \frac{1}{\sin a\sqrt{-1}},$$

i na sličan način i za strane b i c. Na taj način prelazi se od jednačina (8) na sledeće:

$$\sin A\sin B = \sin B\sin a,$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

$$\cot A\sin C + \cos C\cos b = \sin b\cot a,$$

$$\cos A = \cos a\sin B\sin C - \cos B\cos C.$$