ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА ГЕОМЕТРИЈЕ А

— задаци за вежбе —

1 Еуклидска геометрија - изометрије и сличности

1. Доказати да је следећа трансформација изометрија и одредити основне компоненте $x' = x - 2, y' = y + 1$.
2. Доказати да је следећа трансформација изометрија и одредити основне компоненте $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4, y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$.
3. Доказати да је следећа трансформација изометрија и одредити основне компоненте $x' = -y + 1, y' = -x + 2$.
4. Доказати да је следећа трансформација изометрија и одредити основне компоненте $x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{1}{3}, y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{1}{2}$.
5. Испитати трансформацију $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{14}{13},\ y' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{47}{13}$.
6. Испитати трансформацију $x' = -x + 2, y' = -y + 2$.
7. Испитати трансформацију $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1$.
8. Испитати трансформацију $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1, y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2$.
9. Одредити формуле осне рефлексије у односу на праву $x + 2y - 3 = 0$.
10. Одредити формуле ротације равни око тачке $S(3, 2)$ за угао $\pi/6$.
11. Одредити формуле ротације која слика $A(1, 2)$ и $B(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{3}{2})$ у $A'(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$ и $B'(2, 1)$ редом.
12. Одредити формуле клизајуће рефлексије равни са осом $y = x + 3$ која слика тачку $A(1, 6)$ у тачку са оординатом 6.
13. Одредити формуле клизајуће рефлексије која слика $A(0, 0)$ и $B(0, 1)$ у $A'(1, 1)$ и $B'(2, 1)$ редом.
14. Одредити формуле хомотетије равни са центром у $S(1, -2)$ која слика тачку $A(-1, 2)$ у $A'(2, -4)$.
15. Одредити формуле хомотетије која слика тачке $A(3, 2)$ и $B(-1, 0)$, редом у тачке у тачке $A'(0, -1)$ и $B'(8, 3)$
16. Испитати трансформацију $x' = -3x + 4y - 4, y' = 4x + 3y - 8$.
17. Испитати трансформацију $x' = 5x - 12y + 8, y' = 12x + 5y - 16$.
18. Ако је α реалан број одредити све изометрије простора које су облика $x' = px + qy + \alpha, y' = rx + sy + \alpha, z' = ux + vy + wz + \alpha$.
19. Доказати теорему о трансмутацији: Ако су S_π и $\mathcal{I}$ редом, рефлексија и изометрија простора $R^n, n = 1, 2, 3$, тада је $\mathcal{I} \circ S_\pi \circ \mathcal{I}^{-1} = S_{\pi'}$ рефлексија простора R^n где је $\pi' = \mathcal{I}(\pi)$.
20. Дати су кругови $S_1 : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $S_2 : (x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$. Одредити формуле хомотетија које сликају S_1 у S_2.

2 Афина геометрија - афина пресликавања

1. Одредити формуле афине трансформације која слика $A(1, 1)$, $p : x - y = 2$, $q : x + y = 0$ редом у $A'(2, 3)$, $p' : x' - y' = 3$, $q' : 7x' - 3y' = -3$.
2. Испитати шта је композиција две хомотетије.
3. Доказати да скуп свих транслација и хомотетија чини групу.
4. Нека су $\mathcal{H}_S$ и $\mathcal{A}$ редом, хомотетија са центром у S и афина трансформација афиног простора $\mathbb{A}^n$, показати да је $\mathcal{A} \circ \mathcal{H}_S \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{H}_{S'}$ хомотетија простора са центром у $S' = \mathcal{A}(S)$.
5. Одредити када две хомотетије комутирају.
6. Доказати да је трансформација $M \mapsto \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)M$ транслација или хомотетија.

7. Одредити формуле дилатације равни са:
   а) коефицијентом $\alpha = -2$, основом $y = 0$ и правцем дилатације паралелним правој $x = 0$.
   б) коефицијентом $\alpha = -4$, основом $y = x$ и правцем дилатације паралелним правој $y = -x$.

8. Одредити формуле дилатације равни са основом $p : x - 2y = 0$, која тачку $A(1, 1)$ слика у $A'(2, 2)$.

9. Одредити формуле трансвекције равни са:
   б) основом $x - y = 0$ у правцу вектора $(3, 3)$,
   а) основом $x + 2y = 3$ која слика $A(2, 3)$ у $A'(4, 2)$.

10. Одредити формуле трансвекције равни $\mathbb{A}^2$ којом се тачке $A(1, -1), B(2, 3)$ редом сликају у тачке $A'(2, 0), B'(4, 5)$.

11. Одредити формуле паралелног пројектовања на праву $s : x + 2y - 3 = 0$ у правцу паралелном правој $p : y = x$.

12. Одредити формуле паралелног пројектовања на праву $s : 2x - y + 1 = 0$ којим се тачка $A(3, 1)$ слика у $A'(1, 3)$.

13. На ивицама BC, CA, AB троугла ABC, дате су редом тачке P, Q, R тако да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \lambda$. Тачке X, Y, Z су редом пресечне тачке правих AP и CR, BQ и CR, односно BQ и AP. Одредити односе површина троуглова XYZ и ABC.

3 Конике

1. Доказати да су све елипсе афино подударне јединичном кругу.

2. Показати да су све параболе сличне.

3. Показати да је произвољна хипербола афино еквивалентна равностраној.

4. (*Ојлеров круг*) Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA и AB троугла ABC, A', B', C' подножја нормала редом из A, B, C на BC, CA, AB, H ортоцентар троугла, а A_2, B_2, C_2 средишта дужи AH, BH, CH. Користећи хомотетију показати да тачке A_1, B_1, C_1, A', B', C', A_2, B_2, C_2 припадају једном кругу.

5. Елипса сече странице BC, CA и AB троугла ABC редом у A_1 и X, B_1 и Y и C_1 и Z, где су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB. Доказати да се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки S. Одредити положај тачке S у односу на центар елипсе O и тежиште троугла T.

6. Ако ивице BC, CA, AB троугла ABC додирују елипсу у тачкама P, Q, R доказати да се праве AP, BQ, CR секу у једној тачки.

7. Стране $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$ многоугла $P_1P_2 \ldots P_n$ додирују елипсу у тачкама $A_1, \ldots A_n$. Доказати да је $A_1P_1 \cdot A_2P_2 \ldots A_nP_n = P_2A_1 \cdot P_3A_2 \cdots P_1A_n$.

4 Пројективна геометрија

1. а) Наћи формуле пројективног пресликавања које редом слика тачке $A(-1 : 0 : 0)$, $B(-3 : 2 : 0)$, $C(2 : 0 : 1)$, $D(1 : 2 : -5)$ у тачке $A_1(2 : 1 : 0)$, $B_1(1 : 0 : -1)$, $C_1(0 : 3 : -1)$, $D_1(3 : -1 : 2)$.
   б) Одредити инваријантне тачке и инваријантне праве пресликавања.
   в) Како гласе формуле пресликавања у одговарајућим афиним координатама?

2. Дато је пресликавање формулама $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Доказати да је трансформација хиперболичка хомологија.

3. У проширеној афиној равни дато је пресликавање формулама $\lambda x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити бар један круг који се овом трансформацијом слика у параболу.

4. У проширеној афиној равни дат је круг $k : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Одредити бар једно пројективно пресликавање равни којом се овај круг слика у хиперболу са асимптотама $x = y$, $x = -y$.

5. У проширеној еуклидској равни дат је круг $x^2 + y^2 = 1$. Нека је C бесконачно далека тачка y-осе. Одредити једно пројективно пресликавање равни, којим се дати круг пресликава у хиперболу чији је центар $S(1, 1)$, асимптоте су паралелне кооординатним осама, а $f(C) = S$.

6. Наћи формуле пројективне трансформације равни f која редом слика тачке $A(4 : 1 : 1)$, $B(-2 : 2 : 1)$, $C(-3 : 1 : -1)$ у тачке $A_1(-1 : -1 : 1)$, $B_1(-3 : 1 : -2)$ и $C_1(5 : 2 : -1)$, а праву $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ у бесконачно далеку праву. Наћи слику круга описаног око троугла ABC у овој трансформацији. Који је (еуклидски) тип те криве?

7. Наћи пројективно пресликавање проширене афине равни које слика праве $a : x = 0$, $b : y = 0$, $c : y = 1 - x$ редом у праве b, c, a, а тежиште троугла чије странице припадају тим правама у пресек правих $x - y = 0$, $x - y = 2$. Која права се слика у бесконачно далеку овим пресликавањем? Шта је слика круга описаног око тог троугла?

8. Произвољна коника додирује ивице BC, CA, AB троугла ABC у тачкама P, Q, R. Нека су A', B', C' пресечне тачке парова правих QR и BC, RP и AC, PQ и AB. Доказати да су AP, BQ, CR конкурентне праве и да су A', B', C' колинеарне тачке.

5 Инверзивна геометрија

1. Нека тачка P не припада кругу k и нека је $P' = \psi_k(P)$. Ако круг l садржи тачке P п P' онда су кругови k и l ортогонални.

2. Нека су k и l два круга еуклидске равни. Тада је $\psi_k(l) = l$ ако и само ако су кругови k и l ортогонални.

3. Нека су A, B, P, Q четири разне колинеарне тачке и k круг са пречником PQ. Тада важи $\psi_k(A) = B$ ако и само ако је $H(A, B, P, Q)$.

4. Нека су $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$ два концентрична круга. Доказати да је композиција инверзија $\psi_{k_2} \circ \psi_{k_1}$ хомотетија са центром у O и коефицијентом $\frac{r_2^2}{r_1^2}$.

5. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија кругова који се међусобно додирују у тачки O. Шта је слика ове фамилије у инверзији са центром O?

6. Дата је трансформација равни $f(z) = i\bar{z} + 4 + 2i$. Показати да је у питању изометрија, одредити њен тип и основне компоненте.

7. Коришћењем комплексних координата наћи слике тачака $A(3, 1)$ и $B(2, 4)$ при инверзији у односу на круг $k : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

8. Одредити Мебијусову трансформацију којом се тачке $2i, \infty, 3$ сликају редом у $\infty, 1, i$.

9. Наћи Мебијусову трансформацију која представља ротацију око тачке w_0 за угао α.

10. Наћи линеарну Мебијусову трансформацију која слика јединични круг $k : x_1^2 + x_2^2 = 1$ у $k' : (x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 9$, а тачку i у тачку 2.

11. Наћи Мебијусову трансформацију која слика унутрашњост круга $k : x_1^2 + x_2^2 = 1$ у скуп $x_1 > 0$, а тачку $-i$ у 0.

12. Шта је слика другог квадранта при Мебијусовој трансформацији $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$?

13. Наћи све Мебијусове трансформације у којима је x_1-оса инваријантна.

14. Наћи све Мебијусове трансформације у којима је ∞ једина инваријантна тачка.

15. Наћи све Мебијусве трансформације у којима су инваријантне тачке 0 и ∞.

16. Дат је круг k у комплексној равни са центром $C(1 + 2i)$ и полупречником $r = 1$. Записати формуле инверзије у односу на круг k као конјуговану Мебијусову трансформацију.

17. Кругови k_1 и k_2 се додирују у тачки P тако да је k_2 унутар k_1. Доказати да за произвољни круг k_3 који додирује k_1 и k_2 постоји фамилија кругова $\{k_i\}$ таквих да k_n додирује k_{n-1}, k_1, k_2.

6 Хиперболичка геометрија - Поенкареов диск модел

1. Нека је z_1 комплексна координата h-тачке M_1. Наћи комплексну координату h-тачке M такве да је M_1 h-средиште h-дужи OM, где је O центар апсолуте:
   а) $z_1 = \frac{1}{4} - \imath\frac{\sqrt{3}}{4}$, б) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{1}{2}$, в) $z_1 = \frac{1}{6} + \imath\frac{\sqrt{3}}{6}$.
2. Нека је z комплексна координата h-тачке M. Наћи комплексну координату h-тачке M_1 такве да је M_1 h-средиште h-дужи OM, где је O центар апсолуте:
   а) $z = \frac{3}{10} + \imath\frac{3\sqrt{3}}{10}$, б) $z = \frac{1}{5} + \imath\frac{2\sqrt{2}}{5}$, в) $z = \frac{\sqrt{7}}{5} - \imath\frac{3}{5}$.
3. Нека је z комплексна координата h-тачке M. Одредити једначину h-симетрале h-дужи OM ако је:
   а) $z = \frac{1}{4} + \imath\frac{\sqrt{3}}{4}$, б) $z = \frac{2}{5} - \imath\frac{1}{5}$, в) $z = \frac{1}{3} - \imath\frac{2}{5}$.
4. Дате су две h-тачке A и B са комплексним координатама z_1 и z_2. Одредити једначину h-праве која их садржи:
   а) $z_1 = \frac{1}{4} + \imath\frac{3}{4}$, $z_2 = \frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2}$; б) $z_1 = -\frac{4}{5} + \imath\frac{1}{5}$, $z_2 = \frac{2}{5} - \imath\frac{1}{5}$; в) $z_1 = \frac{2}{5} - \imath\frac{1}{5}$, $z_2 = -\frac{2}{3} + \imath\frac{1}{3}$.
5. Дата је h-тачка M својом комплексном координатом z. Одредити њено хиперболичко растојање од центра апсолуте:
   а) $z = \frac{1}{3} + \imath\frac{\sqrt{3}}{3}$, б) $z = -\frac{\sqrt{13}}{5} + \imath\frac{\sqrt{3}}{5}$.
6. Дате су две h тачке A и B својим комплексним координатама z_1 и z_2. Наћи њихово хиперболичко растојање, а затим одредити и једначину h-симетрале дужи AB:
   а) $z_1 = \frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1}{4} - \imath\frac{3}{4}$; б) $z_1 = \frac{2}{3} - \imath\frac{1}{3}$, $z_2 = \frac{1}{6} - \imath\frac{5}{6}$.
7. Нека су $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ два еуклидска круга, са центрима C_1 и C_2, који одређују две h-праве l_1 и l_2 у Поенкареовом диск моделу. Нека су c_1 и c_2, редом поларе тачака C_1 и C_2 у односу на апсолуту, а z_1 и z_2 комплексне координате тачака C_1 и C_2. Показати да важи:
   $$l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; C_2 \in c_1 \;\Leftrightarrow\; C_1 \in c_2 \;\Leftrightarrow\; Re\ z_1\overline{z_2} = 1.$$
8. Одредити једначину h-праве која садржи тачку A и нормална је на h-правој l.
   а) $A(\frac{1}{3} + \imath\frac{2}{3})$, а центар $\widetilde{l}$ је $C(1 - \imath)$, б) $A(\frac{1}{3} + \imath\frac{2}{3})$, $l_1 : x_2 = \frac{1}{2}x_1$.
9. Дате су две хиперпаралелне h-праве l_1 и l_2. Одредити једначину њихове h-нормале:
   а) Центри $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ су $C_1(\frac{1}{2} - i\frac{3}{2})$ и $C_2(\frac{1}{2} + i)$;
   б) $l_1 : x_2 = 0$, а центар $\widetilde{l_2}$ је $C_2(\frac{1}{2} + i)$.
10. Одредити једначину h-круга са центром у A који садржи тачку B:
    а) $A(\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2})$, $B(\frac{1}{4} - \imath\frac{3}{4})$; б) $A(\frac{1}{2} - \imath\frac{1}{2})$, $B(-\frac{1}{3} + \imath\frac{1}{3})$.
11. Одредити једначину орицикла који садржи тачку A а одређен је бесконачно далеким центром X:
    а) $A(-\frac{1}{4} + \imath\frac{1}{3}), X(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \imath\frac{1}{2})$; б) $A(-\frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2}), X(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2})$.
12. Одредити једначину еквидистанте која је одређена основицом l и садржи тачку A:
    а) $A(\frac{2}{3} + \imath\frac{1}{3})$, а центар $\widetilde{l}$ је $C(1 + 2\imath)$, б) $A(\frac{2}{3} + \imath\frac{1}{3}), l_1 : x_2 = x_1$.
13. Одредити формуле свих h-ротација око тачке A где је:
    а) $A = O$; б) $A(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})$.
14. Одредити формуле свих орицикличких ротација са центром у $X = 1$.
15. Показати да је индиректна h-изометрија $z \mapsto \frac{(3+\imath)\overline{z}+\imath}{-\imath\overline{z}+3-\imath}$ h-рефлексија и одредити њену основицу.
16. Одредити формуле орицикличке ротације са центром у бесконачно далекој тачки X којом се тачка A слика у A_1, ако је $X = \frac{3}{5} + \imath\frac{4}{5}$, $A(\frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2})$ и $A_1(\frac{17}{50} - \imath\frac{31}{50})$.
17. Одредити формуле две орицикличке ротације којима се тачка $A(\frac{2}{3}+\imath\frac{1}{3})$ слика у $A_1(-\frac{1}{4}+\imath\frac{1}{3})$.
18. Одредити формуле (хиперболичке) транслације за вектор $2\overrightarrow{AA_1}$:
    а) $A(-\frac{1}{3} + \imath\frac{1}{3})$, $A_1(\frac{1}{4} + \imath\frac{1}{2})$, б) $A(-\frac{1}{3} + \imath\frac{1}{3})$, $A_1(\frac{1}{2} + \imath\frac{1}{2})$.