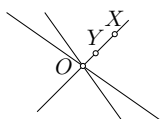


8. Пројективни простор

У овој лекцији упознаћемо се са пројективном геометријом, неким од начина њеног увођења као и са неким од њених основних особина.

Прво ћемо увести појам пројективног простора. Постоји неколико различитих (међусобно еквивалентних) приступа увођењу овог појма, а ми ћемо сада представити један од њих.

Нека је O тачка афиног простора \mathbb{R}^{n+1} . Посматрајмо координатни систем у \mathbb{R}^{n+1} у ком је тачка O координатни почетак. Нека је p произвољна права која садржи тачку O .



Ако су X и Y две тачке те праве различите од O тада су вектори \vec{OX} и \vec{OY} колинеарни. Зато, ако су (x_1, \dots, x_{n+1}) и (y_1, \dots, y_{n+1}) , редом, афине координате тачака X и Y онда постоји $\lambda \in \mathbb{R}$, различито од нуле, такво да је $\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$.

При том, бар једна координата тачке X (односно тачке Y) је различита од нуле, а права p је једнозначно одређена једном својом тачком различитом од O .

Дефиниција

Нека је \sim релација на скупу $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ дата на следећи начин. Нека је $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1})$ ако постоји $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, такво да је

$$\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Тада је \sim релација еквиваленције. Количнички скуп $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ називамо **реалним пројективним простором** димензије n и означавамо $\mathbb{R}P^n$.

Елементи пројективног простора су класе еквиваленције $(n+1)$ -торки $(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ и називамо их **тачкама**.

С обзиром да су $(n+1)$ -торке из једне класе међусобно сразмерне, тачки пројективног простора придружујемо $(n+1)$ -торку $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ и називамо је **хомогеним координатама** дате тачке.

Уочили смо да све $(n+1)$ -торке (x_1, \dots, x_{n+1}) из исте класе еквиваленције припадају истој афиној правој кроз O . Зато и пројективни простор $\mathbb{R}P^n$ можемо сматрати и скупом свих правих у \mathbb{R}^{n+1} које садрже дату фиксирану тачку O .

Ако је $X(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ тачка пројективног простора, можемо јој придружити и вектор одговарајуће афине праве $\vec{X} = \lambda(x_1, \dots, x_{n+1})$, за неко фиксирано $\lambda \neq 0$.

У аналогiji са овом конструкцијом, нека је π произвољни афини потпростор димензије $(k+1)$ који садржи тачку O . Скуп свих афиних правих које садрже O и припадају π чине пројективни простор димензије k који је при том, подскуп простора $\mathbb{R}P^n$.

Називамо га k -димезионим **пројективним потпростором** простора $\mathbb{R}P^n$. Специјално, ако је $k=1$ тај потпростор називамо **пројективном правом**, а ако је $k=n-1$, за такав потпростор кажемо да је **пројективна хиперраван** простора $\mathbb{R}P^n$.

Дефиниција

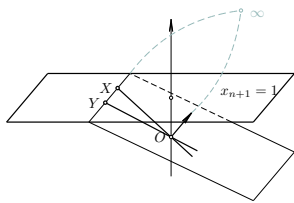
Тачке $A_1(1:0:\dots:0)$, $A_2(0:1:0:\dots:0)$, \dots , $A_{n+1}(0:\dots:0:1)$ и $B(1:1:\dots:1)$ називамо **базним тачкама**.

Дефиниција

За неких $k \leq n+1$ тачака M_1, \dots, M_k пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ кажемо да су у **општем положају** ако су вектори $\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_k$ линеарно независни.

Проширена афина раван. Посматрајући пројективни простор као скуп правих кроз O можемо доћи и до друге интерпретације овог појма.

Нека је \mathbb{R}^n афина хиперраван у \mathbb{R}^{n+1} која не садржи тачку O .



Постоји афини координатни систем у \mathbb{R}^{n+1} такав да дата хиперраван има једначину $x_{n+1} = 1$.

Нека је, даље, σ дводимензиона афина раван која сече \mathbb{R}^n по афиној правој.

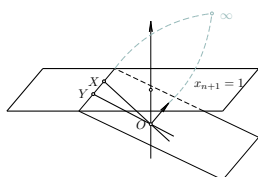
Нека су $X(x_1, \dots, x_n, 1)$ и $Y(y_1, \dots, y_n, 1)$ две тачке те праве. Оне одговарају пројективним тачкама $(x_1 : \dots : x_n : 1)$ и $(y_1 : \dots : y_n : 1)$. Ако је $Z(z_1, \dots, z_n, 1)$ још једна тачка афине равни \mathbb{R}^n , тада су Y, Y, Z колинеране ако и само ако су вектори $(x_1, \dots, x_n, 1)$, $(y_1, \dots, y_n, 1)$ и $(z_1, \dots, z_n, 1)$ зависни.

Раван σ садржи афину праву кроз O (односно пројективну тачку) која је у афином смислу паралелна \mathbb{R}^n . Та афина права је одређена не-нула вектором $(v_1, \dots, v_n, 0)$. Уочимо да су, при том, вектори $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, 0)$ и $(v_1, \dots, v_n, 0)$ колинеарни.

Сада можемо дати још једну интерпретацију пројективног простора $\mathbb{R}P^n$.

Ако пројективна тачка \tilde{X} има последњу координату различиту од нуле, односно ако одговарајућа афина права сече афину хиперраван \mathbb{R}^n у некој афиној тачки X , тада тој пројективној тачки \tilde{X} придружимо афину тачку X . Ако су $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ пројективне координате тачке \tilde{X} , онда тачка X има афине координате $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$ (и обрнуто).

Ако афини потпростор димензије $(k + 1)$, који одређује k -димензиони пројективни потпростор $\tilde{\pi}$, сече \mathbb{R}^n по афином потпростору π онда k -димензионом пројективном потпростору $\tilde{\pi}$ придружимо π . При том важи да је $\tilde{X} \in \tilde{\pi}$ ако и само ако је $X \in \pi$.



Ако пројективна тачка за своју последњу хомогену координату има 0, односно, ако је одговарајућа права одређена вектором $(v_1, \dots, v_n, 0)$ тада она (афино) не сече хиперраван \mathbb{R}^{n+1} .

Зато морамо формално допунити \mathbb{R}^n тачкама које одговарају пројективним тачкама $(v_1 : \dots : v_n : 0)$ и које ћемо звати **бесконечно далеки**.

При том, пројективна тачка $(v_1 : \dots : v_n : 0)$, односно одговарајућа афина права кроз O , припада свим афиним равнима σ чија директриса садржи вектор $(v_1, \dots, v_n, 0)$. Све ове равни секу \mathbb{R}^n по (афино) паралелним правима. Дакле, две (афино) паралелне праве у \mathbb{R}^n имају (пројективно) заједничку бесконачно далеку тачку.

Све бесконачно далеке тачке припадају (афино) хиперравни $\tilde{\alpha} : x_{n+1} = 0$, која је афино паралелна \mathbb{R}^n . Зато, у пројективном смислу, све бесконачно далеке тачке припадају једној пројективној хиперравни α , одређеној са $\tilde{\alpha}$, коју називамо **бесконачно далеком**.

Сада можемо рећи и да је $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \alpha$.

При том, ако су (x_1, \dots, x_n) афине координате тачке из \mathbb{R}^n онда су њене пројективне $(x_1 : \dots : x_n : 1)$. Бесконачно далеке тачке имају последњу хомогену координату 0.

При том су тачке $(x_1 : \dots : x_n : 1)$, $(y_1 : \dots : y_n : 1)$ и $(v_1 : \dots : v_n : 0)$ колинеарне ако и само ако су вектори $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n, 0)$ и $(v_1, \dots, v_n, 0)$ сразмерни.

Примедба *Приметимо да појам бесконачно далеких тачака зависи од избора хиперравни која не садржи тачку O . Са пројективног становишта "коначне" и бесконачно далеке тачке се не разликују.*

Променом координатног система (афиних или хомогених координата, свеједно) тачке коју су биле бесконачне могу постати коначне и обрнуто, као што ћемо видети.

Уочимо да неке од претходних дефиниција, рецимо базних тачака, зависе од избора афиног координатног система, у којем је дата тачка O координатни почетак, а дата хиперраван \mathbb{R}^n има једначину $x_{n+1} = 1$.

Једна афина промена координата простора \mathbb{R}^{n+1} за коју је O инваријантна тачка дата је формулама $X' = AX$, где је A реална квадратна матрица димензије $(n+1)$ и $\det A \neq 0$.

Ова промена координата индукује и промену пројективних координата тачака. С обзиром да су хомогене координате одређене до на коефицијент сразмерности λ , добијамо да је тада промена пројективних координата простора $\mathbb{R}P^n$ дата са

$$\lambda X' = AX, \quad \det A \neq 0.$$

Пројективни потпростор простора $\mathbb{R}P^n$ димензије $(n - 1)$ је одређен одговарајућом афином хиперравни π простора \mathbb{R}^{n+1} која садржи тачку O . Зато π има афину једначину $u_1x_1 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$.

Тачка $X(x_1, \dots, x_{n+1})$ припада тој хиперравни ако и само ако вектор $\vec{OX} = (x_1, \dots, x_{n+1})$ припада директриси те хиперравни, односно ако и само ако тачка $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ припада одговарајућем пројективном потпростору. Зато је уједно и једначина пројективне хиперравни

$$u_1x_1 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

где за бар једно i важи да је $u_i \neq 0$.

С обзиром да је са $\lambda u_1x_1 + \dots + \lambda u_{n+1}x_{n+1} = 0$ дата иста хиперраван, можемо јој доделити хомогене координате $u^t = [u_1 : \dots : u_{n+1}]$. Матрично једначину хиперравни записујемо

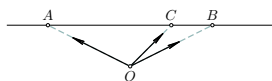
$$u^t X = 0.$$

С обзиром да је свака хиперраван представљена хомогеном $(n + 1)$ -торком, као што је и свака пројективна тачка то значи да и свако тврђење које важи за тачке можемо преформулисати мењајући реч тачка речју хиперраван, припада речју садржи, ... и добити поново тврђење пројективне геометрије. Овај принцип називамо **принципом дуалности**. Такође и следеће тврђење следи директно из дефиниције пројективног потпростора.

Теорема

Сваке две хиперравни се секу по пројективном потпростору димензије $(n - 2)$.

Дворамера. Нека су A и B две пројективне тачке и p права њима одређена. Тада произвољна пројективна тачка C припада правој p ако и само ако је вектор \vec{C} линеарна комбинација вектора \vec{A} и \vec{B} , односно,



ако постоје α и β такви да је $\vec{C} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$. При том, важи да је $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Уочимо и да је $k\alpha \vec{A} + k\beta \vec{B}$ такође вектор који одговара тачки C , односно да су α и β одређени до на коефицијент сразмерности.

Ако је $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ тада је $B = C$ односно $A = C$. Ако $\alpha \neq 0$ онда за $k = \frac{1}{\alpha}$ добијамо да је један од вектора колинеарних са \vec{C} једнак $\vec{A} + \frac{\beta}{\alpha}\vec{B}$.

Ако су A, B, C коначне разне тачке, тада постоји $\lambda \in R$ такво да је $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$, па важи да је $\vec{OC} = (1 - \lambda)\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$, те је

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}. \quad (1)$$

Нека су сада $C \neq D$ тачке праве p различите од A и B и нека је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$. Тада је сваки од коефицијената $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различит од нуле, а с обзиром да је $C \neq D$ важи и да је $\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{\delta}{\gamma}$.

Дефиниција

Број $(A, B; C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$ називамо **дворазмером** тачака A, B, C, D .

Уочимо да дефиниција дворазмере не зависи од избора вектора $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$, односно, да се за векторе $k_1\vec{A}, k_2\vec{B}, k_3\vec{C}, k_4\vec{D}$, $k_1k_2k_3k_4 \neq 0$ добија исти резултат. Такође, како су тачке C и D различите следи и да је $(A, B; C, D) \neq 1$.

Нека су A, B, C, D коначне тачке. Тада директно следи из (1) да је

$$(A, B; C, D) = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}},$$

те видимо и афини смисао дворазмере.

Следећа тврђења директно следе из дефиниције дворазмере.

Тврђење

Нека су A, B, C, D четири разне, колинеарне тачке. Тада важи:

а) $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$

б) $(A, B; C, D) = \frac{1}{(A, B; D, C)}$.

Тврђење

Нека су A, B и C три разне колинеарне тачке и $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0, 1$. Тада постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B; C, D) = \lambda$.

Доказ. Ако је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ тада је тачка D одређена са $\vec{D} = \vec{A} + \frac{\beta}{\alpha\lambda}\vec{B}$. □

Дефиниција

Четири разне колинеарне тачке A, B, C и D су **хармонијски спрегнуте** или **хармонијски конјуговане** ако је $(A, B; C, D) = -1$. Тада пишемо $H(A, B; C, D)$.

Нека су A, B, C, D разне колинеарне тачке. Тада постоје коефицијенти β и δ такви да је

$$\vec{C} = \vec{A} + \beta \vec{B}, \quad \vec{D} = \vec{A} + \delta \vec{B}.$$

Тада је дворазмера $(A, B; C, D) = \beta : \delta$. Зато су тачке A, B, C, D хармонијски спрегнуте ако и само ако је $\beta + \delta = 0$.

Пример Нека су дате тачке $A(x_1 : 1)$ и $B(x_2 : 1)$ једне пројективне праве, и нека је $C(\frac{x_1+x_2}{2} : 1)$ еуклидско средиште дужи AB . Пронађимо тачку D такву да је $H(A, B; C, D)$. Важи да је $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Нека је $\vec{D} = \vec{A} + \delta \vec{B}$. Тада су тачке хармонијски спрегнуте ако и само ако је $1 + \delta = 0$, односно $\delta = -1$. Дакле тачка D је одређена вектором $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (x_1 - x_2, 0)$, односно има хомогене координате $(x_1 - x_2 : 0) = (1 : 0)$, те је D бесконачно далека тачка те праве.