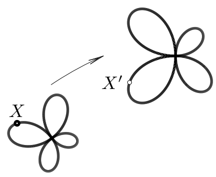
# 4. Сличност

## Дефиниција

Нека је $k > 0$ позитиван реалан број. Бијективно пресликавање $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ је *сличност* простора $\mathbb{R}^n$ *са коефицијентом* $k$, ако за произвољне две тачке $A, B \in \mathbb{R}^n$ важи $\rho(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)) = k \cdot \rho(A, B)$. Скуп свих сличности простора $\mathbb{R}^n$ означавамо са $Sim(\mathbb{R}^n)$.




**Пример** *Свака изометрија простора $\mathbb{R}^n$ је уједно и сличност са коефицијентом* $1$.

## Теорема

Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ сличности простора $\mathbb{R}^n$ са коефицијентима $k_1$ и $k_2$. Тада је $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ такође сличност $\mathbb{R}^n$, са коефицијентом $k_1 \cdot k_2$.

**Доказ.** Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ редом, сличности простора $\mathbb{R}^n$ са коефицијентима $k_1$ и $k_2$ и $A, B \in \mathbb{R}^n$ произвољне тачке. Тада је

$$\rho(\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1(A), \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1(B)) = k_2 \cdot \rho(\mathcal{P}_1(A), \mathcal{P}_1(B)) = k_2 k_1 \cdot \rho(A, B),$$

одакле следи тврђење. $\square$

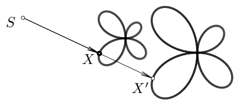
## Последица

Скуп $Sim(\mathbb{R}^n)$ са операцијом композиције пресликавања чини групу.

*Група $Iso(\mathbb{R}^n)$ изометрија простора $\mathbb{R}^n$ је подгрупа групе $Sim(\mathbb{R}^n)$.*

**Дефиниција**

Нека је $S \in \mathbb{R}^n$ тачка и $k \neq 0$ реалан број. За произвољну тачку $P$ простора $\mathbb{R}^n$ нека је $P_1$ тачка таква да је $\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$. Пресликавање $\mathcal{H}_{S,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дато са $\mathcal{H}_{S,k}(P) = P'$ назива се **хомотетијом** простора $\mathbb{R}^n$ и коефицијентом $k$.

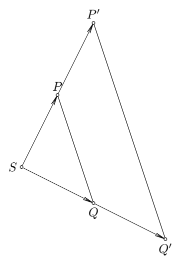



Ако $\mathcal{H}_{S,k}(P) = P', \mathcal{H}_{S,k}(Q) = Q'$ тада је

$$\overrightarrow{P'Q'} = k \cdot \overrightarrow{PQ}, \tag{1}$$

па је $\rho(P', Q') = |k| \cdot \rho(P, Q)$.

Зато је хомотетија $\mathcal{H}_{S,k}$ сличност са коефицијентом $|k|$.




Уочимо, при том, да је за $k \neq 1$ једина инваријантна тачка хомотетије $\mathcal{H}_{S,k}$ тачка $S$, док је $\mathcal{H}_{S,1} = \varepsilon$. При том, ако је $k > 0$ тачке $P$ и $P'$ се налазе са исте стране тачке $S$, док је за $k < 0$ тачка $S$ између $P$ и $P'$. Специјално, ако је $k = -1$ важи да је $\mathcal{H}_{S,-1}$ централна рефлексија праве, за $n = 1$, односно централна симетрија равни (простора), за $n = 2$ $(n = 3)$.

Ако је $\overline{\mathcal{H}_{S,k}}$ пресликавање векторског простора $\mathbb{R}^n$ индуковано хомотетијом $\mathcal{H}_{S,k}$, $\overline{\mathcal{H}_{S,k}}$ је линеарно пресликавање које произвољан вектор $v$ слика у $k \cdot v$. Зато је одговарајућа матрица тог пресликавања $k \cdot E$. Онда можемо писати да је $X' - S = kE(X - S)$, односно да је хомотетија дата формулама

$$X' = kX + (1 - k)S.$$

При том, инверзно пресликавање $\mathcal{H}_{S,k}^{-1}$ је хомотетија $\mathcal{H}_{S,1/k}$.

**Тврђење**

Хомотетијом $\mathcal{H}_{S,k}$ се:

а) колинеарне тачке $A, B, C$ такве да је $B$ између $A$ и $C$ сликају у колинеарне тачке $A', B', C'$ такве да је $B'$ између $A'$ и $C'$;

б) праве сликају у себи паралелне праве;

в) равни сликају у себи паралелне равни;

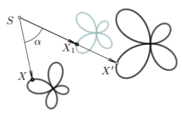
г) углови се сликају у себи једнаке углове.

**Доказ.** Ако је $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AC}, \lambda > 0$, тада је, због (1) и $\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{BC} = \lambda k \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$, па тврђење а) следи. Тврђења б) и в) се директно добијају из (1). С обзиром да се краци конвексног угла $\angle POQ$ сликају у себи паралелне краке $O'P'$ и $O'Q'$, а дуж $PQ$ у $P'Q'$ следи да се $\angle POQ$ слика у конвексан угао $\angle P'O'Q'$ односно себи једнак угао. Тада се и одговарајући неконвексни угао слика у себи једнак, неконвексни угао. □

**Теорема**

Свака сличност може се записати као композиција хомотетије са произвољним центром и изометрије.

**Доказ.**



Нека је $\mathcal{P}$ сличност са коефицијентом $k > 0$ и нека је $\mathcal{H}_{S,k}$ хомотетија са произвољним центром $S$. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{H}_{S,1/k} \circ \mathcal{P}$. Како су $\mathcal{H}_{S,1/k}$ и $\mathcal{P}$, редом, сличности са коефицијентима $1/k$ и $k$ њихова композиција $\mathcal{I}$ је сличност са коефицијентом 1, односно изометрија. Зато је $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$. □

**Последица**

Пресликавање простора $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ је сличност са коефицијентом $k$ ако и само ако су његове формуле у ортонормираном координатном систему дате са $X' = AX + B$, где је $A^tA = k^2E$.

**Доказ.** Ако је $\mathcal{P}$ сличност са коефицијентном $k$ тада је $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$, за неку тачку $S$ и изометрију $\mathcal{I} : X' = A_1X + B_1$.
Формуле сличности $\mathcal{P}$ тада су дате са
$X' = k(A_1X + B_1) + (1-k)S$, односно
$X' = (kA_1)X + (kB_1 + (1-k)S)$.
Матрица $A_1$ изометрије $\mathcal{I}$ је таква да је $A_1^tA_1 = E$, те је матрица сличности $A = kA_1$ таква да важи $A^tA = k^2E$.

Обратно, нека је $\mathcal{P}$ пресликавање дато формулама $X' = AX + B$, где је $A^tA = k^2E$.
Нека је, даље $\mathcal{H}_{S,1/k}$ хомотетија са коефицијентом $1/k > 0$, дата формулама $X' = \frac{1}{k}X + (1 - \frac{1}{k})S$. Тада је композиција $\mathcal{H}_{S,1/k} \circ \mathcal{P}$ дата формулама $X' = \frac{1}{k}(AX + B) + (1 - \frac{1}{k})S$, а како је $(\frac{1}{k}A)^t(\frac{1}{k}A) = E$, у питању је нека изометрија $\mathcal{I}$. Зато је $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$ композиција две сличности са коефицијентима $1/k$ и 1, сличност. □

**Примедба** *Нека је сличност $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{S,k} \circ \mathcal{I}$, где је $\mathcal{I}$ изометрија. Уочимо да, уколико је $\lambda$ сопствена вредност матрице $A_1$ изометрије $\mathcal{I}$, тада је $k\lambda$ сопствена вредност матрице сличности $\mathcal{P}$. Претпоставимо да $\mathcal{P}$ није изометрија, односно да за коефицијент $k$ важи $|k| \neq 1$. Тада, за сопствене вредности, реалне или комплексне, матрице $A = kA_1$ важи да је $|k\lambda| = |k|$, па 1 није сопствена вредност матрице $A$...*

**Примедба...** *Зато сличност има тачно једну инваријантну тачку $T$. Ако, при том, тражимо да је $S = T$, тада је $T$ инваријантна и за изометрију $\mathcal{I}$.*

С обзиром да се свака сличност може представити као композиција хомотетије и изометрије, за које понаособ важи следећа последица, директно видимо да она важи и у општем случају.

### Последица

Сличност слика колинеарне тачке у колинеарне, паралелне праве у паралелне праве, паралелне равни у паралелне равни, углове у њима једнаке углове.

### Дефиниција

Сличност $\mathcal{P} : X' = AX + B$ је директна ако је $\det A > 0$, а индиректна уколико је $\det A < 0$.

Слично, као и у случају изометрија, скуп директних сличности простора $\mathbb{R}^n$ је подгрупа групе $Sim(\mathbb{R}^n)$.

**Пример** *Нађимо сада композицију две хомотетије $\mathcal{H}_{A,k_1} \circ \mathcal{H}_{B,k_2}$. Формуле ових пресликавања су*

$$\mathcal{H}_{A,k_1} : X' = k_1 X + (1 - k_1)A,$$
$$\mathcal{H}_{B,k_2} : X' = k_2 X + (1 - k_2)B.$$

*Тада су формуле композиције $\mathcal{H}_{A,k_1} \circ \mathcal{H}_{B,k_2}$ дате са*

$$X' = k_1 k_2 X + (k_1(1 - k_2)B + (1 - k_1)A).$$

**Пример** *...Уколико је $k_1 k_2 \neq 1$ овим формулама је дата хомотетија са коефицијентом $k_1 k_2$ и центром $C$ таквим да је $k_1(1 - k_2)B + (1 - k_1)A = (1 - k_1 k_2)C$. Ако је $k_1 k_2 = 1$, трансформација је дата са*

$$X' = X + (k_1 - 1)(B - A).$$

*Зато, уколико је $k_1 = 1 = k_2$ или $A = B$ композиција је коинциденција $\varepsilon$, а у супротном је транслација $\tau_v$ за вектор $v = (k_1 - 1)\overrightarrow{AB}$.*