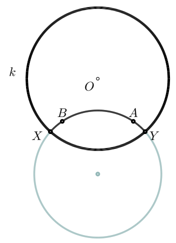
## 16. Метрика у Поенкареовом диск моделу




**Дефиниција**

Нека су $A, B$ $h$-тачке и $X$ и $Y$ бесконачно далеке тачке праве која садржи тачке $A$ и $B$, такве да тачка $B$ припада $h$-полуправој $AX$. Растојање у Поенкареовом диск моделу је дато са $d_h(A,B) = \ln(\frac{AX}{AY} : \frac{BX}{BY})$.

Следеће тврђење остављамо без доказа.

**Тврђење**

Пресликавање $d_h$ јесте функција растојања.

Нека је $\widetilde{I}$ уопштени круг ортогоналан на апсолуту. С обзиром да уопштена инверзија $\psi_{\widetilde{I}}$ слика $h$-праву у $h$-праву, чува $h$-распоред тачака и дворазмеру, директно следи и наредно тврђење.

**Тврђење**

Нека је $\mathcal{I}$ $h$-изометрија, $A$ и $B$ две $h$-тачке и $\mathcal{I}(A) = A', \mathcal{I}(B) = B'$. Тада је $d_h(A,B) = d_h(A',B')$.

**Пример** *Нека је $A$ $h$-тачка чија је комплексна координата $z$ и $O$ центар апсолуте. Нека су $X$ и $Y$ бесконачно далеке тачке $h$-праве $OA$ такве да тачка $A$ припада полуправој $OY$. Тада је $AX = 1 + |z|$, $AY = 1 - |z|$, $OX = OY = 1$. Веза између хиперболичког растојања $d$ и еуклидског $|z|$ тачака $O$ и $A$ дата са $d = d_h(O,A) = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$.*

**Пример** *…Тада је и*

$$|z| = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}, \tag{1}$$

*односно* $|z| = \tanh\frac{d}{2}$, *тј.* $d = 2\,\mathrm{arctanh}\,|z|$.

**Теорема**

Нека су $z_1$ и $z_2$ координате $h$-тачака $A$ и $B$. Тада је

$$d_h(A,B) = 2\,\mathrm{arctanh}\,\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|.$$

**Доказ.** Нека је $S_l$ $h$-рефлексија којом се тачка $A$ слика у центар апсолуте $O$. Дата је формулом $S_l(z) = \frac{z_1}{\overline{z_1}}\frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{z_1\overline{z}-1}$, а тачка $S_l(B) = B'$ има координату $b' = \frac{z_1}{\overline{z_1}}\frac{\overline{z_2}-\overline{z_1}}{z_1\overline{z_2}-1}$.

Тада је $|b'| = \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_1\overline{z_2}|}$, па је

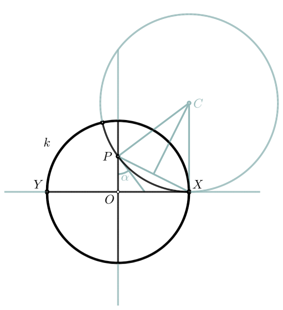
$$d_h(A,B) = d_h(O,B') = 2\,\mathrm{arctanh}\,|b'| = 2\,\mathrm{arctanh}\,\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z_2}|}.$$

$\square$

**Пример** *Нека је $M \neq O$ $h$-тачка са комплексном координатом $z$ и $M_1$ $h$-средиште дужи $OM_1$, са координатом $z_1$. С обзиром да је $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ важи да је $|z| = \frac{2|z_1|}{1+|z_1|^2}$, односно $|z_1| = \frac{1-\sqrt{1-|z|^2}}{|z|}$.*

## Угао паралелности.

Нека су $p$ и $q$ две $h$-праве међусобно ортогоналне у центру апсолуте $O$.




Тада су и уопштени кругови $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ (еуклидски) праве нормалне у $O$. Нека је $P \in q$ $h$-тачка. Нађимо $h$-праве које садрже тачку $P$ и паралелне су $p$. Нека су $X$ и $Y$ бесконачно далеке тачке $h$-праве $p$. Ако је $h$-права $r$ паралелна $p$ тако што $X \in \widetilde{r}$, тада је $\widetilde{r}$ или права која садржи $O$, односно $r = p$ или круг чији центар $C$ припада правој кроз $X$ параленој $\widetilde{q}$.

С обзиром да $P \neq p$, $\widetilde{r}$ је еуклидски круг. При том, тачка $C$ припада и симетрали дужи $PX$, па постоји јединствен круг $\widetilde{r}$ који испуњава тражене услове.

Како се $h$ праве $p$ и $q$ $h$-рефлексијом $S_q$, односно еуклидском рефлексијом $S_{\widetilde{q}}$ сликају у себе, а $h$-полуправа $OX$ у $h$-полуправу $OY$, следи да постоји и јединствена $h$-права $r_1$ кроз $P$ паралелна $p$ тако што је $Y$ њена бесконачно далека тачка.

Нека су $A$ и $a$ редом $h$-тачка и $h$-права и $A'$ подножје $h$-нормале која садржи тачку $A$ на $h$-праву $a$. Како постоји $h$-рефлексија $S_l$ којом се тачка $A'$ слика у центар апсолуте $O$, а особине као колинеарност, ортогоналност и паралелност су инваријантне за $h$-рефлексије, праве које садрже тачку $A$ и паралелне су $a$ сликају се у праве које садрже $S_l(A)$ и паралелне су $p$.

Такође, уочимо да праве $r$ и $r_1$ одређују оштре углове са правом $q$ који су међусобно $h$-симетрични у односу на $q$, односно једнаки и при том, на јединствен начин одређени са $d_h(P, O)$. Ова особина је очувана $h$-рефлексијом $S_l$.

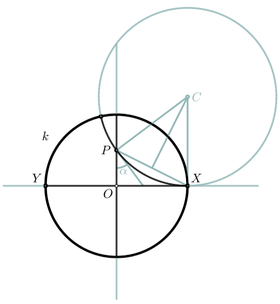
Зато важи следећа теорема.

**Теорема**

Нека су $A$ и $a$ $h$-тачка и $h$-права. Ако тачка $A$ не припада правој $a$, онда постоје тачно две $h$ праве које садрже $A$ и паралелне су $a$. При том је симетрала угла којег $r$ и $r_1$ одређују, а који садржи праву $a$ уједно нормална на $a$. Ако тачка $A$ припада правој $a$, права $a$ је јединствена права инцидентна са $A$ и паралелна $a$.

**Дефиниција**

Нека тачка $A$ не припада $h$-правој $a$, и нека су $A$ и $r$ подножје нормале из $A$ на $a$ и $h$-права која садржи $A$ и паралелна је $a$. Оштар угао који одређују праве $AA'$ и $r$ назива се **углом паралелности** за растојање $d = d_h(A, A')$. Пресликавање $\Pi : R^+ \to (0, \frac{\pi}{2})$ којом се $d$ слика у одговарајући угао паралелности је функција **Лобачевског**.




Нека је $p$ $h$-права кроз центар апсолуте са бесконачном тачком $X$, $P$ $h$-тачка таква да је $h$-права $PO$ нормална на $p$ и $C$ центар еуклидског круга $\widetilde{r}$ таквог да $r$ садржи $P$ и припада параболичком прамену са центром у $X$. Еуклидски троугао $CPX$ је једнакокраки. Нека је угао при врху једнак $2\phi$.

Он је у кругу $\widetilde{r}$ централни над тетивом $PX$, па је угао $\angle OXP$, као угао између тетиве и тангенте једнак $\phi$. Тангента у тачки $P$ на $\widetilde{r}$ разлаже угао $\angle OPX$ на два угла. Један је угао између $h$-правих $OP$ и $r$, означимо га са $\alpha$, а други је такође угао између тетиве и тангенте круга $\widetilde{r}$, па је једнак $\phi$. Зато је $2\phi + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

При том, из правоуглог еуклидског троугла $OPX$ видимо да важи $PO = \tan\phi = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$. Ако је $d = d_h(O, P)$, тада је $OP = \frac{e^d-1}{e^d+1}$, одакле је $e^d \tan\frac{\alpha}{2} = 1$. С обзиром да је $\alpha = \Pi(d)$ добијамо да важи $e^{-d} = \tan\frac{\Pi(d)}{2}$, односно

$$\Pi(d) = 2\arctan(e^{-d}). \tag{2}$$

**Примедба** *Уочимо да за* $d \to 0^+$ *важи* $\Pi(d) \to \frac{\pi}{2}^-$, *угао паралелности у хиперболичком смислу тежи углу паралелности у еуклидском смислу. Зато можемо сматрати да се у хиперболичкој равни на врло малим растојањима реализује еуклидска геометрија.*

На основу формуле (2) директно следи тврђење.

**Тврђење**

Функција Лобачевског је монотоно опадајућа, односно важи:

$$d_1 > d_2 \Leftrightarrow \Pi(d_1) < \Pi(d_2).$$