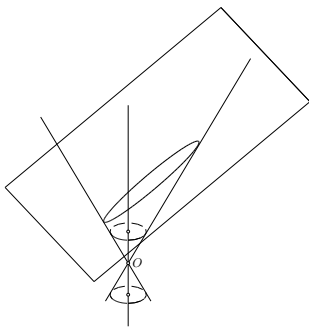


7. Конусни пресеци у еуклидској и афиној равни

Нека су s и p две праве у еуклидском простору \mathbb{R}^3 које се секу у тачки O . Скуп свих слика тачака праве p у ротацијама око праве s је **кружни конус**.



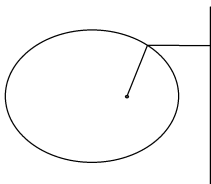
Правна s је његова **оса**, а слике праве p су његове **изводнице**. Нека је π раван простора. Ако раван π садржи тачку O , њен пресек са конусом је или сама та тачка, или се раван и конус додирују по изводници, или раван сече конус по две изводнице.

Ове скупове (тачку, праву или две праве које се секу) називамо **дегенерисаним конусним пресецима**.

Остали конусни пресеци су **недегенерисани** или **конике**. Ако је раван управна на оси s и не садржи тачку O , пресек конуса и равни је круг.

Теорема

Нека је \mathcal{K} коника у равни π који није круг. Тада постоје права d и тачка F те равни такве да је однос одстојања произвољне тачке конике \mathcal{K} од тачке F и праве d константан. **БД**

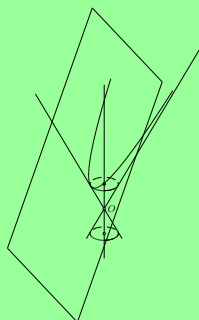


Дефиниција

Тачку F називамо **жижом** или **фокусом** конике, а праву d **директрисом**. Однос растојања тачке X конике од жиже и директрисе је **ексцентрицитет** конике.

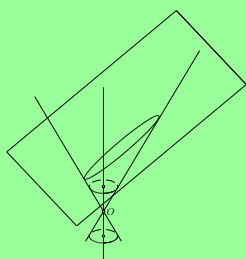
Примедба Важи и обрнуто. Ако су d и F права и тачка у равни која јој не припада и \mathcal{K} скуп тачака те равни таквих да је однос њихових одстојања од F и d константан, онда постоји кружни конус који сече дату раван по скупу \mathcal{K} .

Пример



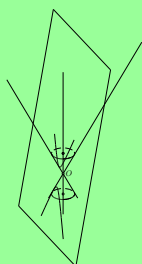
Може се показати да је ексцентрицитет конике 1 ако и само ако је раван π паралелна једној изводници конуса. Ту конику називамо **параболом**.

Пример



За ексцентрицитет важи $e < 1$ ако и само ако раван π сече све изводнице конуса са исте стране равни α , а одговарајућу конику \mathcal{K} називамо **елипсом**.

Пример



Важи да је $e > 1$ ако и само ако раван π сече изводнице у тачкама које се налазе са разних страна α , а дату конику зовемо **хиперболом**.

Примедба Кад се угао између π и осе s приближава правом, односно када је елипса тежи кругу, директриса елипсе се све више, неограничено, удаљава. Зато можемо сматрати да је директриса круга бесконачно далека права, да је ексцентрицитет круга $e = 0$, а сам круг специјалан случај елипсе.

Примедба У случају елипсе и хиперболе постоје два пара (F, d) где је F жижа, а d одговарајућа директриса. У случају параболе постоји само један такав пар (F, d) .

Тврђење

Недегенерисани конусни пресек \mathcal{K} је у ортонормираном Декартовом систему дат квадратном једначином.

БД

Примедба Скуп тачака равни чије координате задовољавају једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$, где је $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ је **крива другог реда**. Може се показати да је произвољна крива другог реда или конусни пресек, или унија две паралелне праве или празан скуп.

Криву другог реда можемо записати и у следећем облику

$$X^t A X + X^t B + C = 0, \quad (1)$$

где су A и B редом квадратна, симетрична матрица и колона дате са

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

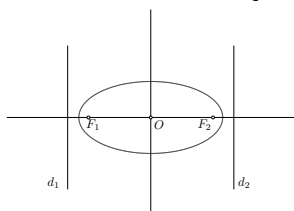
Изометријска трансформација слика конику \mathcal{K} , жижу и директрису у другу конику и одговарајуће жижу и директрису. При том, \mathcal{K} и њена слика имају исти ексцентрицитет.

Постоји изометријска трансформација која слика \mathcal{K} у неку конику \mathcal{K}' чија једначина има, у извесном смислу, најједноставнији облик. То подразумева да једначина нема "мешовити" члан $x \cdot y$ и да је линеарни део једначине сведен на најкраћи облик.

Једначина конике \mathcal{K}' назива се **канонском једначином** конике \mathcal{K} . Може се показати да за сваку конику постоји **тачно једна канонска једначина**. Све конике које имају **исти канонски облик** су изометричне истој коници \mathcal{K}' , па су и **међусобно изометричне**.

Елипса.

За $e < 1$, канонска једначина елипсе је



$$\frac{x_1''^2}{a^2} + \frac{x_2''^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$$

a и b су **полуосе**. Тачка $(0, 0)$ је **центар**.

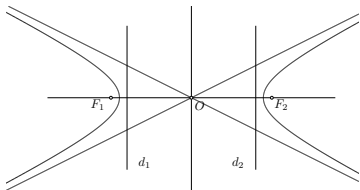
Видимо да трансформације $x_1'' \mapsto -x_1''$, $x_2'' \mapsto x_2''$ и $x_1'' \mapsto x_1''$, $x_2'' \mapsto -x_2''$ сликају \mathcal{K}' у себе, па је \mathcal{K}' симетрична у односу на осе $x_1'' = 0$ и $x_2'' = 0$. Зато је \mathcal{K}' и

централносиметрична у односу на $(0, 0)$, односно **центар**.

Ако означимо $a^2 - b^2 = c^2$, парови жижа и директриса дати су са $(c, 0)$ и $x_1'' = a^2/c$, односно $(-c, 0)$ и $x_1'' = -a^2/c$.

Хипербола.

За $e > 1$, канонска једначина хиперболе је



$$\frac{x_1''^2}{a^2} - \frac{x_2''^2}{b^2} = 1, a, b > 0.$$

a и b су **полуосе**. Тачка $(0, 0)$ је **центар**.

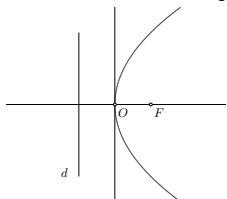
И ова коника је симетрична у односу на осе, па и централносиметрична у односу на **центар**.

Ако означимо $a^2 + b^2 = c^2$, жиже су $F_{1,2}(\pm c, 0)$, док су њима одговарајуће директрисе дате једначинама $x_1'' = \pm \frac{a^2}{c}$.

Праве дате једначинама $\frac{x_1''}{a} \pm \frac{x_2''}{b} = 0$ су **асимптоте** хиперболе.

Парабола.

За $e = 1$, канонска једначина параболе је



$$x_2''^2 = 2px_1'', p > 0.$$

а права $x_2'' = 0$ је **оса**.

Видимо да трансформација $x_1'' \mapsto x_1''$, $x_2'' \mapsto -x_2''$ слика \mathcal{K}' у себе, па је \mathcal{K}' симетрична у односу на x_1'' -осу, тј. праву $x_2'' = 0$.

При том су жижа и њена директриса дате са $(p/2, 0)$ и $x_1'' + p/2 = 0$.

Примедба Недегенерисани конусни пресек је елипса или круг уколико матрица A има сопствене вредности истог знака, тј. $\det A > 0$, хипербола уколико су различитог знака, тј. $\det A < 0$ и парабола уколико је једна сопствена вредност 0, тј. $\det A = 0$.

Дакле, закључили смо и

Теорема

Две недегенерисане конике међусобно су изометричне ако и само ако имају исти канонски облик.

Важи и следеће тврђење.

Тврђење

- а) Постоји сличност која пресликава једну елипсу (хиперболу) у другу ако и само ако имају исти ексцентрицитет.
б) Сваке две параболе су сличне.

Доказ. а) Ако су две конике \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 сличне тада имају и исти однос растојања својих тачака од жиже и директрисе, а самим тим и исти ексцентрицитет. Обратно, нека имају исти ексцентрицитет. Тада су, између осталог и истог типа (или су обе елипсе или обе хиперболе или обе параболе). Нека су, у прва два случаја, њима изометричне конике са канонским једначинама дате са $\mathcal{K}'_i : \frac{x_1^2}{a_i^2} \pm \frac{x_2^2}{b_i^2} = 1, i = 1, 2$.

С обзиром да имају исте ексцентрицитете, важи и да је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Тада хомотетија $\mathcal{H}_{0, a_2/a_1}$ слика \mathcal{K}'_2 у \mathcal{K}'_1 , те су оне сличне, а самим тим и \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 .

Уколико су конике параболе $\mathcal{K}'_i : x_2^2 = 2p_i x_1, i = 1, 2$, директно следи да хомотетија $\mathcal{H}_{0, p_2/p_1}$ слика \mathcal{K}'_2 у \mathcal{K}'_1 .

б) Ова тачка је директна последица претходне у случају $e = 1$. □

Видели смо да су еуклидска права, раван и простор уједно и афини реални простори димензија 1, 2 и 3.

Тиме су и конике еуклидске равни уједно и објекти у афиној равни, те је интересантно питање како их трансформише група афиних трансформација $\text{Aff}(\mathcal{A}^2)$.

Сетимо се да је коника, уједно крива другог реда, описана квадратном једначином

$$X^t A X + B X + C = 0, \text{ где је } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Нека је σ афина трансформација равни. Њен инверз σ^{-1} је дат формулама $X = QX' + D$. Тада се крива другог реда прсликава у скуп тачака дат једначином

$$\begin{aligned} 0 &= (X'^t Q^t + D)A(QX' + D) + B(QX' + D) + C \\ &= X'^t Q^t A Q X' + B_1 X' + C_1. \end{aligned}$$

Дакле, крива другог реда се прсликава у криву другог реда. При том, ако је крива \mathcal{K} дегенерисана, нпр. скуп тачака две праве које се секу, с обзиром да афине трансформације сликају колинеарне тачке у колинеарне, крива \mathcal{K} се слика у дегенерисану криву другог реда истог типа.

Самим тим се и конике сликају у конике. При том, сетимо се да је тип конике одређен знаком $\det A$. Слика конике има матрицу $A_1 = Q^t A Q$ која одговара квадратном делу једначине.

Тада је

$$\det A_1 = \det Q^t \det A \det Q = \det A (\det Q)^2,$$

те су $\det A_1$ и $\det A$ истог знака. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Афина трансформација равни слика елипсе, параболе и хиперболе, редом у елипсе, параболе и хиперболе.

Дакле, две конике различитог типа нису афино еквивалентне. Покажимо да су конике истог типа међусобно афино еквивалентне.

Теорема

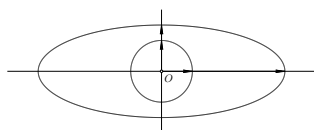
Сваке две елипсе (параболе, односно хиперболе) су афино еквивалентне.

Доказ. С обзиром да су сваке две параболе сличне директно следи и да су афино еквивалентне.

Покажимо да је свака елипса \mathcal{K} афино еквивалентна јединичном кругу.

С обзиром да је \mathcal{K} изометрична елипси \mathcal{K}' са канонском једначином $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, довољно је наћи афино прсликавање које елипсу \mathcal{K}' слика у круг $k : x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Уопштена хомотетија $\mathcal{H}_{O,1/a,1/b}$, по правцима редом, x_1 и x_2 -осе има формуле



$$\mathcal{H}_{O,1/a,1/b} : x_1' = \frac{x_1}{a}, \quad x_2' = \frac{x_2}{b}$$

и прсликава \mathcal{K}' у k .

Слично, иста хомотетија прсликава хиперболу дату једначином $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ у хиперболу $x_1^2 - x_2^2 = 1$, па можемо закључити и да су сваке две хиперболе афино еквивалентне. \square