5. Афине трансформације

Прво ћемо се подсетити појмова *афиног простора и потпростора, афиног репера и афиних координата тачака*

Дефиниција

Нека је V n-димензиони, векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и $\mathcal{A}$ скуп, чије елементе називамо **тачкама**. Нека је, даље, $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ пресликавање за које важи:

1) $A + \overrightarrow{0} = A$, за сваку тачку $A \in \mathcal{A}$;
2) $(A + u) + v = A + (u + v)$, за сваку тачку $A \in \mathcal{A}$ и произвољне $u, v \in V$;
3) за произвољне две тачке $A, B \in \mathcal{A}$ постоји тачно један вектор $u \in V$, такав да је $A + u = B$.

Тада уређену тројку $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ називамо n-димензионим **афиним простором**. Вектор u, такав да је $A + u = B$ означавамо још $u = \overrightarrow{AB}$. Векторски простор V називамо **директрисом** простора $\mathcal{A}$.

Нека је даље $O \in \mathcal{A}$ произвољна тачка, и $e = (e_1, \dots, e_n)$ једна база векторског простора V.
Ако је $X \in \mathcal{A}$ произвољна тачка, тада постоје јединствени $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\overrightarrow{OX} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Тада су $(x_1, \dots, x_n)$ координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у бази e и идентификујемо их.

Дефиниција

Уређени пар (O, e) називамо **афиним репером**, а n-торку $(x_1, \dots, x_n)$ **координатама** тачке X у реперу Oe.

Ако су $[A], [B], [u]$ координате тачака A и B у датом реперу и вектора u у датој бази, онда је $[u] = [B] - [A]$.

Нека је (O', f) неки други репер афиног простора.
Нека је M матрица преласка са базе e на базу f директрисе V, тј. нека је $f = Ae$ и означимо са $[O']$ и колону координата те тачке у реперу (O, e).
Ако су $[X]$ и $[X']$ колоне координата произвољне тачке X у реперима (O, e) и (O, f), тада је $\overrightarrow{OX} = [X]^t e, \overrightarrow{O'X} = [X']^t f$.
Зато је

$$[X]^t e = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = [O']^t e + [X']^t f = ([O']^t + [X']^t M) e,$$

те су формуле промене координата дате на следећи начин

$$X = M^t X' + O'.$$

Ако је $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и при том, постоји векторски потпростор $U \subset V$ такав да пресликавање $+$ слика $\mathcal{P} \times U$ на $\mathcal{P}$, онда је $(\mathcal{P}, U, +)$ **афини потпростор** простора $\mathcal{A}$.
При том је $(\mathcal{P}, U, +)$, по дефиницији, афини простор димензије $\dim U$. Ако је $P \in \mathcal{P}$ произвољна тачка означавамо овај потпростор и са $P + U$.

Пример *Уочимо да су еуклидска права, раван и простор, уједно и реални афини простори димензија* $1, 2$ *и* 3. *При том су стандардне координате заправо афине координате у односу на репер* Oe, *где је* O *координатни почетак, а база* e *ортонормирана база* $\vec{i}, (\vec{i}, \vec{j}), (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Права p *у еуклидској равни или простору* $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$ *је афини потпростор димензије* 1. *Ако је* P *произвољна тачка те праве и* v *вектор који је одређује, можемо писати да је* $p = P + \mathcal{L}\{v\}$.

Пример *...Раван π у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ је афини потпростор димензије 2. Ако је $P \in \pi$ и ако су v_1, v_2 два неколинерна вектора те равни онда је $\pi = P + \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$.*

Дефиниција

Нека је $\mathcal{A}$ n-димензиони афини простор и $\mathcal{P}$ његов потпростор димензије $(n-1)$. Тада је $\mathcal{P}$ **хиперраван** простора $\mathcal{A}$.

Нека је $\mathcal{P} = P + \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ и Oe дати репер простора $\mathcal{A}$ у коме тачка P има координате $(p_1, \dots, p_n)$. Тада је и $v_i = \sum_j \alpha_i^j e_j$ за неке $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$. Тачка X са координатама $(x_1, \dots, x_n)$ припада тој равни ако и само ако $\overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, односно ако је детерминанта

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

једнака нули. Зато је хиперраван описана линеарном једначином

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0. \tag{1}$$

Обрнуто, ако координате тачака P и X задовољавају једначину (1), координате вектора $\overrightarrow{PX}$ задовољавају хомогену једначину $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, те $\overrightarrow{PX} \in U$, где је U један $(n-1)$-димензиони векторски простор решења ове хомогене једначине.

Афине трансформације.

Нека је $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, +)$ реални афини простор.
Нека је $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ бијективно пресликавање такво да за $B = A + u$ и $D = C + u$ важи $\sigma(B) - \sigma(A) = \sigma(D) - \sigma(C)$. Тада пресликавање σ индукује пресликавање $\overline{\sigma} : V \to V$ дато са

$$\overline{\sigma}(\overrightarrow{AB}) = \sigma(B) - \sigma(A).$$

Ако је пресликавање $\overline{\sigma}$ линеарно, онда је σ **афина трансформација** простора $\mathcal{A}$, а $\overline{\sigma}$ њен **линеарни део**.

Пример *Уочимо да су све сличности (дакле и изометрије) простора $\mathbb{R}^n$ његове афине трансформације.*

Тврђење

Нека је σ афина трансформација простора $\mathcal{A}$. Тада је $\overline{\sigma}$ аутоморфизам векторског простора V.

Доказ. С обзиром да је $\overline{\sigma} : V \to V$ линеарно пресликавање, да би био аутоморфизам довољно је показати да је инјективно. Ако постоји $v \neq 0$ вектор такав да је $\overline{\sigma}(v) = 0$, тада за произвољни пар тачака A, B такав да је $A + v = B$ важи $\sigma(A) = \sigma(B)$, те тада σ није бијекција. □

Нађимо координатни запис формула једне афине трансформације. Нека је O координатни почетак, и нека је X произвољна тачка, а $\sigma(X) = X'$. Означаваћемо колону координата произвољне тачке истом ознаком као и тачку. Тада је $\overline{\sigma}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{O'X'}$, па постоји квадратна матрица A таква да је $X' - O' = A(X - O)$, те је

$$X' = AX + O'.$$

При том, како је $\overline{\sigma}$ бијективно пресликавање, матрица A је недегенерисана, односно $\det A \neq 0$. Видимо да формуле афине трансформације имају исти облик као формуле промене координата приликом промене афиног репера.
Нека су $\sigma_i : X' = A_i X + B_i, i = 1, 2$ две афине трансформације једног простора. Тада њихова композиција $\sigma_2 \circ \sigma_1$ има формуле $X' = A_2(A_1 X + B_1) + B_2$, односно

$$X' = A_2 A_1 X + (A_2 B_1 + B_2),$$

а како је $\det A_2 A_1 = \det A_2 \det A_1 \neq 0$, поново представља једну афину трансформацију.
Одавде следи и да је $\sigma : X' = A_1^{-1} X + (-A_1^{-1} B_1)$ афина трансформација инверзна трансформацији σ_1.

Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Скуп афиних трансформација простора $\mathcal{A}$ је група у односу на композицију трансформација.

Дефиниција

Групу афиних трансформација афиног простора $\mathcal{A}$ означавамо са $Aff(\mathcal{A})$.

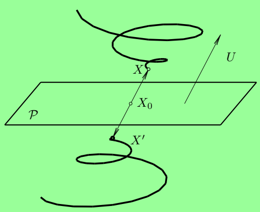
Примедба *Уочимо да су групе изометрија еуклидске равни $Iso(\mathbb{R}^n)$ и сличности $Sim(\mathbb{R}^n)$ подгрупе групе $Aff(\mathbb{R}^n)$.*

Тврђење

Афина трансформација σ:
а) слика колинеарне тачке у колинеарне. При том, чува размеру дужи њима одређених.
б) слика афини потпростор у афини потпростор исте димензије.
в) слика паралелне афине потпросторе у паралелне афине потпросторе.

Доказ. Нека су A, B, C три разне колинеарне тачке и A_1, B_1, C_1 њихове слике у трансформацији σ. Тада постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. При том је $\overline{\sigma}(\overrightarrow{AC}) = \lambda\overline{\sigma}(\overrightarrow{AB})$, односно $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$. Зато су A_1, B_1 и C_1 колинеарне и при том је размера дужи њима одређених иста.
Тврђења под б) и в) сада директно следе. $\square$

Пример *Нека је $\mathcal{P} = P + W$ потпростор афиног простора $\mathcal{A}$ са директрисом V. Нека је U векторски потпростор простора V, такав да је $W \oplus U = V$.*



Посматрајмо пресликавање σ чије су инваријантне тачке тачке потпростора $\mathcal{P}$, па тиме и $\overline{\sigma}(w) = w$, за $w \in W$. Нека је при том, $\overline{\sigma}(u) = -u$, за $u \in U$.

Пример ... *Ако је $w_1, \ldots, w_k$ једна база простора W и $u_1, \ldots, u_l$ база простора U тада у бази $w_1, \ldots, u_l$ пресликавање $\overline{\sigma}$ има матрицу*

$$\begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_l \end{bmatrix}, \tag{2}$$

те је у питању афина трансформација. Називамо је **афином симетријом** *у односу на потпростор $\mathcal{P}$ паралелно U (или* **рефлексијом** *за $k = n-1$) и означавамо $\mathcal{S}_{\mathcal{P},U}$.*

У случају еуклидског простора, уз додатни услов да су простори W и U ортогонални, ова трансформација је еуклидска симетрија у односу на $\mathcal{P}$. Очигледно је и да уколико нека трансформација σ има бар једну инваријантну тачку и у некој бази матрицу (2), онда је σ афина симетрија.

Као и у случају изометрија, сопствене вредности и постојање инваријантних тачака су неопходне информације за класификовање афиних трансформација.
Нека је $X' = AX + B$. Матрица A има n сопствених вредности над пољем комплексних бројева. При том, ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност тада је то и $\overline{\lambda}$. За разлику од ортогоналних матрица, ипак није нужно и да постоји база простора састављена од сопствених вектора. Ипак, постоји база у којој је матрица пресликавања дата у **Жордановој нормалној форми**

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_l \end{bmatrix} \text{ где су } J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ & & \ddots & 1 \\ & & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Жорданови блокови.

Означаваћемо са $V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ декомпозицију простора V где је V_k простор који одговара Жордановим блоковима за вредност λ_k.

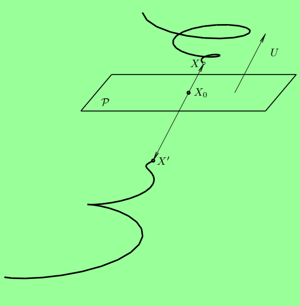
Пример *Одредимо афине трансформације σ простора $\mathcal{A}$ чије су инваријантне тачке, тачке једне хиперравни $\mathcal{P} = P + W$.*
Ако су $w_1, \dots, w_{n-1}$ вектори базе простора W, важи да је $\overline{\sigma}(w_i) = w_i$. Зато матрица пресликавања има сопствену вредност $\lambda_1 = 1$ степена бар $(n-1)$ и бар $(n-1)$ независних сопствених вектора за ту вредност. Преостала сопствена вредност λ_2 мора бити реална.

Претпоставимо прво да је $\lambda_2 \neq 1$. Тада постоји и сопствени вектор и те вредности. У бази $w_1, \dots, w_{n-1}$, и матрица пресликавања има облик

Пример ...

$$\begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Овакву трансформацију називамо **дилатацијом простора** *са основом $\mathcal{P}$, паралелно u, са коефицијентом λ_2 и означавамо са $\mathcal{D}_{\mathcal{P},u,\lambda_2}$.*



Нека је X тачка простора која не припада хиперравни $\mathcal{P}$, и $s = X + \mathcal{L}\{u\}$ права. Права s продире хиперраван у тачки X_0 и при том је $\overrightarrow{X_0X}$ колинеаран са u, те се слика у $\lambda_2\overrightarrow{X_0X} = \overrightarrow{X_0X'}$. Приметимо да је за $\lambda_2 = -1$ ова трансформација рефлексија у односу на хиперраван $\mathcal{P}$ паралелно вектору u.

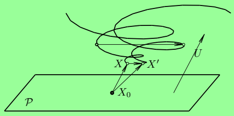
Пример *Претпоставимо сада да је $\lambda_2 = 1$. Уколико постоји база простора састављена од сопствених вектора матрица пресликавања је $A = E$, а како постоје и инваријантне тачке у питању је коинциденција ε.*

Пример *Претпоставимо стога, да $\sigma \neq \varepsilon$. Тада постоји база простора, означимо је $w_1, \dots, w_n$ у којој је матрица пресликавања има Жорданову форму*

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектори $w_1, \dots, w_{n-1}$ разапињу раван $\mathcal{P}$. Нека је X произвољна тачка која не припада хиперравни $\mathcal{P}$, и X' њена слика. Нека је $s = X + \mathcal{L}\{w_n\}$.

Пример ...



Права s продире хиперраван $\mathcal{P}$ у инваријантној тачки X_0. При том је вектор $\overrightarrow{X_0X} = k \cdot w_n$ те се слика у $k \cdot w_{n-1} + k \cdot w_n = \overrightarrow{X_0X'}$. Зато је $\overrightarrow{XX'} = k \cdot w_{n-1}$. Ову трансформацију називамо **трансвекцијом** *простора са основом $\mathcal{P}$ у правцу вектора w_{n-1}.*

Трансвекција је на јединствен начин одређена ако је при том, познат вектор w_n. Означавамо је са $\mathcal{T}_{\mathcal{P}, w_{n-1}, w_n}$. Ако уместо вектора w_{n-1} посматрамо неки други вектор са њим паралелан, матрица трансвекције у тој бази је дата са

$$\begin{bmatrix} E_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Примедба *Дакле, једине неидентичке трансформације афиног простора чији је скуп инваријантних тачака једна хиперраван су дилатације и трансвекције.*

Нека је афина трансформација дата формулом $\sigma : X' = AX + B$. Сетимо се да уколико $\lambda = 1$ није сопствена вредност матрице A, тада σ има тачно једну инваријантну тачку.
Ако је $\lambda = 1$ сопствена вредност, тада је $V_1 \oplus V_k$ декомпозиција простора V, где је V_1 потпростор који одговара Жордановим блоковима за $\lambda = 1$.

Слично као у случају изометрија, афина трансформација без инваријантних тачака може се записати као композиција транслације и трансформације са инваријантним тачкама.

Теорема

Нека афина трансформација $\sigma : X' = AX + B$ нема инваријантних тачака. Тада постоји афина трансформација ω са бар једном инваријантном тачком и транслација τ_v такви да је $\sigma = \tau_v \circ \omega$ и $v \in V_1$. При том, A је уједно и матрица пресликавања ω.