15. Класификација h-изометрија

До сада смо закључили да је група h-изометрија хиперболичке равни подгрупа групе инверзивних трансформација. При том, свака директна h-изометрија може се представити као композиција две h-рефлексије, а свака индиректна је композиција до три h-рефлексије.

Тврђење

Нека је A h-тачка различита од центра апсолуте O. Тада постоји јединствена h-рефлексија S_l која слика A у O.

Доказ. Нека је l h-права која не садржи тачку O, одређена кругом $\widetilde{l}$ са центром у C и координатом $c = a + \imath b$. Тада је $S_l(O) = \frac{1}{\bar{c}}$. Ако је $A \neq O$ h-тачка и w њена комплексна координата, следи да је $c = \frac{1}{\bar{w}}$, центар еуклидског круга $\widetilde{l}$ који одређује h-праву l такву да је $S_l(A) = O$. □

Дефиниција

h-права l такву да се h-рефлексијом S_l тачка A слика у B је h-симетрала дужи AB.

Дакле, ако је једна од тачака A и B центар апсолуте показали смо да постоји јединствена h-симетрала те дужи. Ако је S_q рефлексија којом се A слика у O а B у B_1 и l_1 h-симетрала дужи OB_1, тада је h-права $S_q(l)$ симетрала дужи AB. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Нека су A и B две разне h-тачке. Тада постоји јединствена h-симетрала дужи AB.

Примедба *Ако је w комплексна координата тачке $A \neq O$ тада је формула h-рефлексије којом се A слика у O дата са $S_l(z) = \frac{\frac{1}{w}\overline{z}-1}{\overline{z}-\frac{1}{\overline{w}}} = \frac{\frac{1}{w}\overline{z}-1}{\overline{z}-\frac{1}{w}}$ односно*

$$S_l(z) = \frac{w}{\overline{w}}\frac{\overline{z}-\overline{w}}{w\overline{z}-1}. \tag{1}$$

Нека је $\mathcal{I}$ h-изометрија. Тада је $\mathcal{I}$ рестрикција хомографије $\widetilde{\mathcal{I}}$, односно антихомографије проширене еуклидске равни. Свака директна (односно индиректна) трансформација $\widetilde{\mathcal{I}}$ је одређена на јединствен начин сликама три тачке проширене еуклидске равни. Ако је тачка A са координатом z инваријантна за $\widetilde{\mathcal{I}}$, директно добијамо и да је $\psi_k(A) = A'$ са координатом $\frac{1}{\overline{z}}$ инваријантна за $\widetilde{\mathcal{I}}$.

Индиректне h-изометрије.

Потражимо инваријантне тачке индиректне h-изометрије $\mathcal{I}$ и одговарајуће антихомографије. Нагласимо да уколико $\widetilde{\mathcal{I}}$ има бар једну инваријантну тачку A која не припада апсолути, тада је и $\psi_k(A) \neq A$ такође инваријантна тачка.

Ако је $z \in \mathbb{C}$ координата инваријантне тачке, тада је за $a = |a|e^{\imath\alpha}, z = |z|e^{\imath\phi}$ и $b = b_1 + \imath b_2$

$$a\overline{z} - \overline{a}z = \overline{b}|z|^2 - b,$$
$$2Im\ a\overline{z} = b_1(|z|^2 - 1) - \imath b_2(|z|^2 + 1),$$
$$b_1(|z|^2 - 1) = 0, \quad 2|z|\sin(\phi - \alpha) = \frac{b_2}{|a|}(|z|^2 + 1). \tag{2}$$

1. Претпоставимо, прво да је $b_1 = 0$ и покажимо да је тада дата трансформација h-рефлексија.

Наиме, ако је $b = 0$, онда је $\mathcal{I}$ очигледно рефлексија у односу на праву кроз O.

Ако претпоставимо да је $b \neq 0$ онда је трансформација $\mathcal{I}$ дата са

$$z \mapsto \frac{-a/b\overline{z} - 1}{-\overline{b}/b\overline{z} - \overline{a}/b}, \tag{3}$$

па како је $Re\ \ b = 0$, следи да је у питању h-рефлексија у односу на h-праву која припада еуклидском кругу са центром $C(-\frac{a}{b})$.

Обратно, ако је трансформација h-рефлексија, онда она има инваријантне h-тачке, за које важи да је $|z| < 1$, па из прве једнакости (2) следи да је $b_1 = 0$.

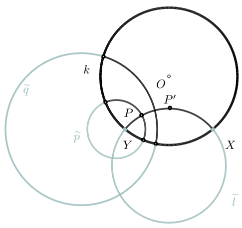
Дакле, показали смо да важи следеће тврђење.

Тврђење

Нека је $\mathcal{I}$ индиректна h-изометрија $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{\bar{b}\bar{z}+\bar{a}}$. Тада:
а) $\mathcal{I}$ је рефлексија ако и само ако је $Re\ \ b = 0$;
б) $\mathcal{I}$ је рефлексија ако и само ако има бар једну инваријантну тачку.

2. Ако индиректна h-изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних h-тачака, тада је $b_1 \neq 0$ и трансформација $\mathcal{I}$ може имати инваријантне тачке само на апсолути k. Дакле тада је $|z| = 1$, а $\sin(\phi - \alpha) = \frac{b_2}{|a|}$.
За аргумент ϕ имамо два решења $\phi_1 = \arcsin(\frac{b_2}{|a|}) + \alpha$ и $\phi_2 = \pi - \arcsin(\frac{b_2}{|a|}) + \alpha$, односно постоје две инваријантне бесконачно далеке тачке X и Y.

Тада се и h-права l (ортогонална на апсолуту) одређена тачкама X и Y слика у себе.



Нека је $P \in l$ h-тачка и $P' = \mathcal{I}(P)$. Нека је p h-права ортогонална на l у P и q h-симетрала дужи PP'. h-рефлексија S_p слика праву l у себе, а h-полуправу PX у h-полуправу PY, па одговарајућа антихомологија слика тачку X у Y и обрнуто. Зато је композиција $S_p \circ S_q \circ S_l$ рестрикција антихомологије која има инваријантне тачке X и Y, а при том слика тачку P у P' и даље је $\mathcal{I} = S_p \circ S_q \circ S_l$. Ову трансформацију зовемо **клизајућом рефлексијом** $\mathcal{G}_{l,\overrightarrow{PP'}}$ дуж праве l за вектор $\overrightarrow{PP'}$.

Директне h-изометрије. Нека је $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ директна h-изометрија. Ако је A инваријантна тачка хомологије $\widetilde{\mathcal{I}}$ онда је то и $\psi_k(A)$. Стога, ако трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних h-тачака, онда $\widetilde{\mathcal{I}}$ може имати инваријантне само тачке које припадају апсолути, при том не више од две.

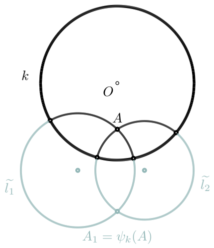
Ако се h-тачка A слика h-рефлексијом S_{l_1} у h-тачку $A_1 \neq A$, тада је l_1 h-симетрала дужи AA_1. Ако је $S_{l_2}(A_1) = A$ тада је и l_2 h-симетрала дужи AA_1 па је $l_1 = l_2$. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Ако су l_1 и l_2 разне h-праве тада је h-тачка A инваријантна за $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$ ако и само ако се l_1 и l_2 секу у A.

Сада ћемо, на основу међусобног положаја h-правих $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$, односно, на основу броја инваријантних тачака хомологије $\widetilde{\mathcal{I}}$ и њиховог положаја класификовати директне h-изометрије.

1. Ако је $l_1 = l_2$, онда је $\mathcal{I}$ **идентичко пресликавање** или **коинциденција** и означавамо је ε. Све h-тачке су инваријантне.



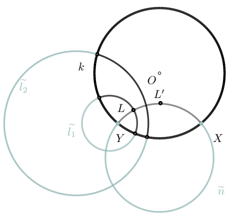
2. Ако неидентичка трансформација има бар једну инваријантну h-тачку A, онда се l_1 и l_2 секу у h-тачки A, а тачка $\psi_k(A) = A'$ је инваријантна и за $\widetilde{\mathcal{I}}$. Ако би $\widetilde{\mathcal{I}}$ поред ове две тачке имала још неку инваријантну тачку била би идентичко пресликавање. Зато не постоје ни бесконачно далеке инваријантне тачке.

Произвољна h-тачка X се трансформацијом $\mathcal{I}$ слика у тачку X' такву да је угао α између h правих AX и AX' једнак двоструком углу између h-правих l_1 и l_2. Трансформацију $\mathcal{I}$ називамо **централном ротацијом**, са центром A за угао α и означавамо са $\mathcal{R}_{A,\alpha}$. Значи важи тврђење.

Тврђење

Неидентичка директна h-изометрија $\mathcal{I}$ је ротација ако и само ако $\mathcal{I}$ има инваријантну бар једну h-тачку. Тада је та h-тачка јединствена инваријантна за $\mathcal{I}$.

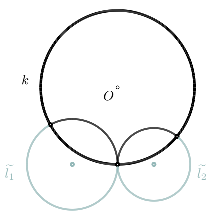
3. Ако су X и Y две бесконачно далеке инваријантне тачке и n h-права њима одређена, тада је n инваријантна за $\mathcal{I}$.



Нека је l_1 ортогонална на n у L и нека је $\mathcal{I}(L) = L_1$, а h-права l_2 h-симетрала h-дужи LL_1. Тада је композиција $S_{l_2} \circ S_{l_1}$ рестрикција хомографије којом се тачке X, Y, L сликају редом у X, Y и L_1, па је $\mathcal{I} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$. h-праве l_1 и l_2 су хиперпаралелне. Трансформацију $\mathcal{I}$ називамо **транслацијом** за вектор $\overrightarrow{LL_1}$ и означавамо $\tau_{\overrightarrow{LL_1}}$.

Обратно, ако су l_1 и l_2 хиперпаралелне праве, ортогоналне на n и X и Y бесконачно далеке тачке праве n, тада $\widetilde{\mathcal{I}}$ неидентичка трансформација која слика тачке X и Y у себе, те је у питању транслација.

4. Уколико су праве l_1 и l_2 паралелне са заједничком бесконачно далеком тачком X тада је X инваријантна за $\widetilde{\mathcal{I}}$. Дакле не постоји трансформација $\widetilde{\mathcal{I}}$ без инваријантних тачака.



Уопштени кругови $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_2}$ се додирују у тачки X, те њихови центри припадају еуклидској правој која у X додирује k. Ако би постојала још нека бесконачно далека инваријантна тачка Y, тада би важило $\psi_{\widetilde{l_1}}(Y) = \psi_{\widetilde{l_2}}(Y) = Y_1 \neq Y$, па би центри $\widetilde{l_1}$ и $\widetilde{l_1}$ припадали правој која сече k у тачкама Y и Y_1. Зато трансформација $\widetilde{\mathcal{I}}$ има само једну бесконачно далеку инваријантну тачку.

h-изометрија $\mathcal{I}$ је **орициклична ротација** односно **паралелно померање**. Означавамо га са $\mathcal{R}_{X,L,L_1}$ где је L произвољна тачка, а L_1 њена слика.

Покажимо да и у овом случају можемо $\mathcal{R}$ да представимо као композицију $S_{l_2} \circ S_{l_1}$, где је l_2 произвољна права са бесконачно далеком тачком X. Нека је L_1 произвољна h-тачка h-праве l_2 и $L = \mathcal{R}^{-1}(L_1)$, а l_1 h-симетрала дужи LL_1. Тада је композиција $\mathcal{R} \circ S_{l_1}$ индиректна трансформација са бар једном инваријантном h-тачком L_1, па је у питању осна рефлексија S_q, где $L_1 \in q$.

Тада је $\mathcal{R} = S_q \circ S_{l_1}$. С обзиром да $\widetilde{\mathcal{R}}$ има само једну инваријантну тачку, бесконачно далеку X, h-праве l_1 и q су такође паралелне, са истом бесконачно далеком тачком X. Зато је $q = l_2$ и $\mathcal{R} = S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

Пример *Нека су l_1 и l_2 две праве које се секу у O а редом одређују углове θ_1 и θ_2 са x_1-осом. Тада је $S_{l_2} \circ S_{l_1} : z \mapsto e^{2\imath\theta_2}\overline{(e^{2\imath\theta_1}\overline{z})} = e^{2\imath(\theta_2-\theta_1)}z$. Дакле, h-ротација око тачке O за дати угао је рестрикција еуклидске ротације за исти угао.*

h-изометрије хиперболичке равни:

изометрија	инв. h-тачке	инв. б.д. тачке	директност
ε	све	све	ѣ
$\tau_{\overrightarrow{LL_1}}$	$\varnothing$	$X, Y \in \widetilde{LL_1}$	ѣ
$R_{A,\alpha}$	A	$\varnothing$	ѣ
R_{X,L,L_1}	$\varnothing$	X	ѣ
S_p	тачке праве p	$X, Y \in \widetilde{p}$	–
$\mathcal{G}_{p,\overrightarrow{LL_1}}$	$\varnothing$	$X, Y \in \widetilde{p}$	–