1. Координате у $R^n = 1, 2, 3$

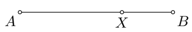
На курсу Г2 смо видели како се аксиоматски заснива еуклидска геометрија.

Крећемо од тако засноване геометрије. С обзиром да желимо да користимо алгебарски приступ (као што је то било током курса Г1), треба да уведемо појам координата.

Подсетићемо се поново и појединих дефиниција из еуклидске геометрије.

Дефиниција

Отворена дуж AB у еуклидском простору је скуп свих тачака X које су између тачака A и B. Унија отворене дужи AB и $\{A, B\}$ је затворена дуж AB.



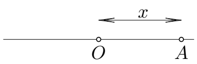
Специјално, ако се тачке A и B поклапају, одговарајућа отворена дуж је празан скуп, а затворена садржи тачно једну тачку $A = B$.

Дефиниција

Пресликавање $\ell : D \to R^+$, где јеD скуп свих затворених дужи, а R^+ скуп ненегативних реалних бројева, са особинама:
1) ако је $d_1, d_2 \in D$ $d_1 \cong d_2 \Rightarrow \ell(d_1) = \ell(d_2)$,
2) ако је $d_3 = d_1 + d_2 \Rightarrow \ell(d_3) = \ell(d_1) + \ell(d_2)$,
3) постоји дуж d таква да је $\ell(d) = 1$,
назива се **мером дужи**.

У еуклидском простору постоји мера дужи. То је једна од најбитнијих последица аксиома непрекидности.Сваке две мере дужи су сразмерне, тј. постоји позитиван реалан коефицијент k такав да је $\ell_1 = k\ell_2$. Тада је k коефицијент којим ми *рескалирамо* меру, односно одређујемо која је дуж јединична.

Нека је p еуклидска права и ℓ мера дуж. и дефинишимо пресликавање $x : p \to R$ на следећи начин.



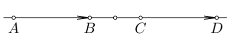
Нека је $O \in p$ једна произвољно одабрана тачка, сада фиксирана. Нека је $x(O) = 0$. Тада тачку O називамо **координатним почетком**. Тачка O разлаже праву p на две полуправе p_1 и p_2. Ако је $A \in p_1$ нека је $x(A) = \ell(OA)$, а ако је $A \in p_2$ нека је $x(A) = -\ell(OA)$.

Овако дефинисано пресликавање x је бијекција.
При том, x је усаглашено са уређењем поља R, односно, важи да је $x(B)$ између $x(A)$ и $x(C)$ у смислу уређења поља R, онда и само онда када је тачка B еуклидске праве p између тачака A и C. Зато се поље R често визуелизује еуклидском правом и назива **реална права**.
Одабиром одговарајуће мере ℓ бирамо и (међусобно подударне) дужи те праве које су у датој мери **јединичне**.
Реалан број $x(A)$ називамо тада **координатом тачке** A, а функцију x **координатном функцијом**. Еуклидску праву означавамо и са $\mathbb{R}$.

Дефиниција

Функција растојања еуклидске праве $\mathbb{R}$, $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R_0^+$ дата је са $\rho(A, B) = \ell(AB) = |x(A) - x(B)|$, где $A, B \in \mathbb{R}$.

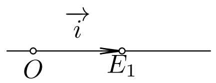
Нека су A, B, C и D произвољне тачке еуклидске праве.



Функција мера дужи је усаглашена са пропорцијом дужи па лако можемо видети да је

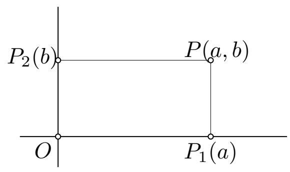
$x(B) - x(A) = x(D) - x(C)$ онда и само онда када се средишта дужи AD и BC поклапају.
Тада сматрамо да су уређени парови (A, B) и (C, D) у релацији $\sim$. При том, уколико се две тачке поклапају, формално сматрамо и да се одговарајуће средиште поклапа са њима. Очигледно је $\sim$ релација еквиваленције, а њене класе називамо векторима и означавамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Скуп R, заједно са операцијом сабирања и множења реалног броја реалним бројем (скаларом) јесте једнодимензиони векторски простор.
Пресликавање из R у скуп вектора праве које $x \in R$ слика у класу уређеног пара (O, A) где је $x(A) = x$ је бијекција која чини скуп вектора праве реалним векторским простором.
Тада вектор $\overrightarrow{BC}$ идентификујемо са реалним бројем x ако и само ако је је $x(C) - x(B) = x$. Овде је $x = x - 0 = x(A) - x(0)$ где је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.



Ако је E_1 јединична тачка те праве, означимо $\overrightarrow{OE_1} = \imath$. Тада је $\overrightarrow{OA} = x(A)\imath$.

Посматрајмо сада еуклидску раван.



Можемо уочити у њој две ортогоналне праве p и q које се секу у тачки O. Можемо те праве, интерпретирати као две реалне праве, помоћ у координатних функција x_1 и x_2 и то тако да за тачку O важи $x_1(O) = x_2(O) = 0$.

Тачка O је тада **координатни почетак**. Можемо тражити и да су јединичне дужи правих p и q и међусобно подударне, односно да су x_1 и x_2 индуковане истом мером ℓ.
Нека је P произвољна тачка те равни. Праве кроз P, паралелне редом, правама q и p секу p и q у тачкама P_1 и P_2.
Означимо координате тачака P_1 и P_2 на одговарајућим правама са $a = x_1(P_1), b = x_2(P_2)$.

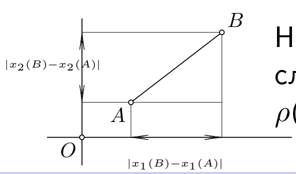
Тачки P придружујемо уређен пар $x(P) = (a, b)$, пишемо да је $x_1(P) = a$, $x_2(P) = b$ и називамо га **координатама тачке** P у равни. Ово придруживање x је бијекција између еуклидске равни и скупа R^2, уређених реалних парова. Означаваћемо еуклидску раван и са $\mathbb{R}^2$.

Дефиниција

Функција растојања у равни $\mathbb{R}^2$, $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to R_0^+$ дата је са

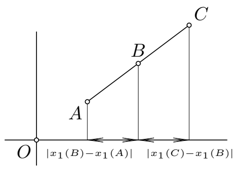
$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1(A) - x_1(B))^2 + (x_2(A) - x_2(B))^2},$$

за $A, B \in \mathbb{R}^2$.



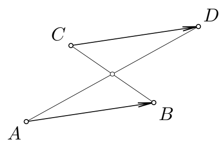
На основу Питагорине теореме, слично као и у случају еуклидске праве, важи да је $\rho(A, B) = \ell(AB)$.

Нека су A, B две разне тачке и C тачка еуклидске праве одређене тачкама A и B у еуклидској равни. Претпоставимо, прво, да се C не поклапа ни са A ни са B.



Тада, на основу Талесове теореме знамо да се разлика координата $|x_i(A) - x_i(C)| : |x_i(A) - x_i(B)|, i = 1, 2$ односи као размера дужи $AC : AB$. Зато је и уређен пар

$(x_1(A) - x_1(C), x_2(A) - x_2(C))$ сразмеран $(x_1(A) - x_1(B), x_2(A) - x_2(B))$. Исто важи када се тачка C поклапа са A или B. Зато се средишта дужи AD и BC поклапају ако и само ако важи $x_i(B) - x_i(A) = x_i(D) - x_i(C), i = 1, 2$.

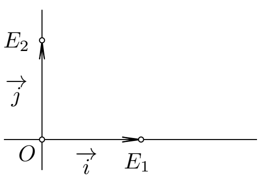


Два уређена пара тачака (A, B) и (C, D) су у релацији $\sim$ ако се средишта дужи AD и BC поклапају. Релација $\sim$ је релација еквиваленције, а класе називамо векторима и означавамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Скуп R^2 са операцијама сабирања уређених парова и множења уређеног пара реалним скаларом јесте векторски простор. Пресликавање из R^2 у скуп вектора једне равни које пар (x_1, x_2) слика у класу уређеног пара (O, A) где је $(x_1(A), x_2(A)) = (x_1, x_2)$ је бијекција којом скуп вектора равни добија структуру реалног векторског простора.
Тада је вектор $\overrightarrow{BC}$ слика пара (x_1, x_2) ако је $x_i(C) - x_i(B) = x_i, i = 1, 2$. Векторе $\overrightarrow{BC}$ и (x_1, x_2) идентификујемо.

Уочимо да тада важи и да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ за произвољне тачке A, B, C еуклидске равни, јер је

$$(x_i(B) - x_i(A)) + (x_i(C) - x_i(B)) = x_i(C) - x_i(A), i = 1, 2.$$



Нека су E_1 и E_2 јединичне тачке правих p и q. Тада су праве p и q одређене тачком O и векторима $\imath = \overrightarrow{E_1}$ и $\vec{j} = \overrightarrow{E_2}$. Ако је P произвољна тачка равни тада је $\overrightarrow{OP} = x_1(P)\imath + x_2(P)\vec{j}$.

Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ онда је $\ell(AB) = \ell(CD)$, а самим тим и $\rho(A, B) = \rho(C, D)$. Посматрајмо скаларни производ

$$(v_1, v_2) \circ (u_1, u_2) = v_1 u_1 + v_2 u_2,$$

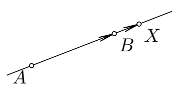
Овде су вектори идентификовани са паровима одговарајућих координата. Уочимо да важи $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \rho^2(A, B)$, за произвољне тачке A, B. Зато, дати скаларни производ у векторском простору R^2 одговара мери дужи у одговарајућој еуклидској равни. Самим тим, за два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ важи и

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \rho(A, B) \cdot \rho(A, C) \cos \angle BAC.$$

Уочимо да тада $\imath, \overrightarrow{j}$ чине једну ортонормирану базу простора R^2.

Уочили смо да за колинеарне тачке A, B, C, где је $A \neq B$, једне еуклидске праве постоји $\lambda \in R$, тако да је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, односно да важи

$$x_i(C) = x_i(A) + \lambda(x_i(B) - x_i(A)), i = 1, 2.$$



Можемо рећи и да је права AB одређена тачком A и вектором $\overrightarrow{AB}$.

Сетимо се да су A и B произвољне тачке те праве, а да услов $A \neq B$ обезбеђује да је вектор $\overrightarrow{AB} = (v_1, v_2)$ различит од нуле. Зато су координате (x_1, x_2) произвољне тачке праве која садржи тачку A и одређена је вектором (v_1, v_2) дате следећим једначинама које називамо **параметарским једначинама праве**

$$x_1 = x_1(A) + \lambda v_1,$$
$$x_2 = x_2(A) + \lambda v_2, \quad \lambda \in R.$$

Елиминацијом параметра λ из њих добијамо једначину $(x_1 - x_1(A))v_2 = (x_2 - x_2(A))v_1$, односно $v_2x_1 - v_1x_2 + x_2(A)v_1 - x_1(A)v_2 = 0$ или ако означимо $a = v_2$, $b = -v_1$, $c = x_2(A)v_1 - x_1(A)v_2$ добијамо **општу једначину праве у равни**

$$ax_1 + bx_2 + c = 0.$$

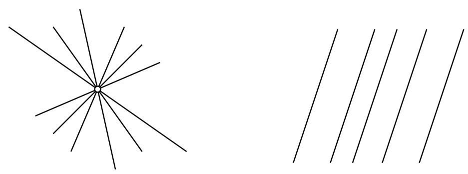
При том, пар $(a, b) = (v_2, -v_1)$ мора бити различит од нуле.

Нека су праве

$$l_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 = 0,$$
$$l_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 = 0.$$

одређене векторима $(v_1, v_2) = (-b_1, a_1)$ $(u_1, u_2) = (-b_2, a_2)$.
Праве l_1 и l_2 су паралелне ако и само ако су вектори (v_1, v_2) и (u_1, u_2) сразмерни, односно ако су сразмерни парови (a_1, b_1) и (a_2, b_2). При том, ако су сразмерне тројке (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2), одговарајуће једначине описују исти скуп тачака односно, праве се поклапају. Ако ове тројке нису сразмерне, праве l_1 и l_2 се не секу.
Праве l_1 и l_2 су ортогоналне ако и само ако су вектори (v_1, v_2) и (u_1, u_2) ортогонални, односно ако је $v_1u_1 + v_2u_2 = 0$, то јест ако је $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Све праве еуклидске равни које садрже дату тачку чине **прамен конкурентних правих.** Све праве еуклидске равни које су паралелне датој правој чине **прамен паралелних правих**.



Две разне праве еуклидске равни одређују тачно један прамен. Ако су њихове једначине дате са $l_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 = 0$ и $l_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 = 0$ тада је једначина произвољне праве тог прамена дата са $\lambda(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1) + \mu(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2) = 0$ где $\lambda, \mu \in R$ и $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Координате, појам вектора и функција растојања ρ у простору се уводе на сличан начин као у случају еуклидске равни. Слично се и показује да овај скуп са операцијама сабирања и множења скаларом има структуру векторског простора.
Слично као и у случају еуклидске равни, скаларни производ у еуклидском простору такав да је $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB} = \rho^2(A, B)$, за произвољне тачке A, B, дат је са

$$(v_1, v_2, v_3) \circ (u_1, u_2, u_2) = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3,$$

где смо два вектора идентификовали са одговарајућим уређеним паровима (v_1, v_2, v_3) и (u_1, u_2, u_3).

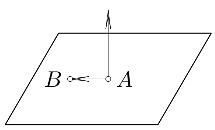
Ако су A и B две разне тачке, тада произвољна тачка C припада правој AB еуклидског простора ако постоји $\lambda \in R$, тако да је $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, односно да важи $x_i(C) = x_i(A) + \lambda(x_i(B) - x_i(A)), i = 1, 2, 3.$ Права AB одређена својом произвољном тачком A и вектором $\overrightarrow{AB} = (v_1, v_2, v_3)$ различитим од нуле.
Координате (x_1, x_2, x_3) произвољне тачке праве која садржи тачку A и одређена је вектором (v_1, v_2, v_3) дате следећим **параметарским једначинама праве**

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(A) + \lambda v_1, \\ x_2 &= x_2(A) + \lambda v_2, \\ x_3 &= x_2(A) + \lambda v_3, \quad \lambda \in R. \end{aligned}$$

Елиминацијом параметра λ добијамо **канонску једначину праве**

$$\frac{x_1 - x_1(A)}{v_1} = \frac{x_2 - x_2(A)}{v_2} = \frac{x_3 - x_3(A)}{v_3}.$$

Ако је нека од координата v_i вектора (v_1, v_2, v_3) једнака нули, можемо формално допустити овакав запис, подразумевајући тада да је и одговарајућа разлика $x_i - x_i(A) = 0$. Праве l_1 и l_2 су паралелне ако и само ако су њихови вектори (v_1, v_2, v_3) и (u_1, u_2, u_3) сразмерни, а ортогоналне ако су (v_1, v_2, v_3) и (u_1, u_2, u_3) ортогонални, односно ако важи $v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = 0$.



Нека је A тачка еуклидског простора, а (a, b, c) вектор различит од нуле. Произвољна тачка B са координатама (x_1, x_2, x_3) припада равни која садржи A и ортогонална је на (a, b, c)

ако и само ако су вектори (a, b, c) и $\overrightarrow{AB}$ међусобно ортогонални, односно ако важи да је $a(x_1 - x_1(A)) + b(x_2 - x_2(A)) + c(x_3 - x_3(A)) = 0.$ Ако означимо $d = -(ax_1(A) + bx_2(A) + cx_3(A))$, добијамо **општу једначину равни**

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Нека су

$$\alpha_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0$$

две равни еуклидског простора.

Оне су паралелне ако и само ако су ортогоналне на сразмерне векторе, односно ако су тројке (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) сразмерне. Ако су, при том, сразмерне и уређене четворке (a_1, b_1, c_1, d_1) и (a_2, b_2, c_2, d_2), дате једначине описују исти скуп тачака, те се равни поклапају. Ако ове четворке нису сразмерне α_1 и α_2 немају заједничких тачака.

Равни α_1 и α_2 су ортогоналне ако су ортогонални њихови нормални вектори, односно ако је $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Све равни паралелне задатој чине **прамен паралелних равни**, а све равни које садрже дату праву чине **коаксијални прамен равни.**
Две разне равни еуклидског простора одређују тачно један прамен простора. Ако су њихове једначине дате са $\alpha_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0$ и $\alpha_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0$ тада је једначина произвољне равни тог прамена дата са $\lambda(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1) + \mu(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2) = 0$ где $\lambda, \mu \in R$ и $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Нека је $R^n = \{(x_1, \dots, x_n) | \ x_i \in R\}$ скуп реалних n-торки. Њега можемо интерпретирати на више начина.
Прво, можемо га сматрати скупом помоћу кога градимо геометрију, односно једним од основних појмова геометрије и тада његове елементе зовемо **тачкама**.
Са друге стране, R^n заједно са операцијом сабирања n-торки и множења n-торки реалним скаларом јесте n-димензиони реални векторски простор. У том простору постоји скаларни производ дат са $(v_1, \dots, v_n) \circ (u_1, \dots, u_n) = v_1u_1 + v_2u_2 + \dots v_nu_n$ који га чини унитарним простором.
При том, вектори $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$ чине једну ортонормирану базу простора R^n.

Двема разним тачкама A и B са координатама $(x_1(A), \dots, x_n(A))$ и $(x_1(B), \dots, \dots, x_n(B))$ можемо придружити вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_1(B) - x_1(A), \dots, x_n(B) - x_n(A)).$$

При том, ово придруживање има следеће особине:
а) За сваку тачку A и вектор $(v_1, \dots, v_n)$ постоји тачка B таква да је $\overrightarrow{AB} = (v_1, \dots, v_n)$,
б) За произвољне тачке A, B, C важи да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Скуп тачака R^n, заједно са унитарним простором R^n и пресликавањем $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ називамо n-**димензионим еуклидским простором** и означавамо са $\mathbb{R}^n$.