Глобална анализа 2010. **Шести домаћи задатак**

(1) (а) Нека је P компактна оријентисана многострукост димензије $2n$ и S њена компактна оријентисана подмногострукост димензије n. Ако је n непаран број, доказати да је $S \cdot S = 0$.

(б) Доказати, користећи идеју из (а) и карактеризацију
$$\chi(M) = 0_M \cdot 0_M,$$
где је 0_M нулто сечење у TM („Ојлерова карактеристика једнака је укупном индексу произвољног векторског поља”) да је Ојлерова карактеристика компактне многострукости непарне димензије једнака нули.

(2) (а) Израчунати хомологију $H_*(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z})$ дводимензионог торуса $\mathbb{T}^2$

(а1) користећи Кинетову формулу;

(а2) користећи Мајер – Вијеторисов низ;

(а3) користећи CW – декомпозицију.

(б) Описати кохомолошки прстен $(H^*_{DR}(\mathbb{T}^2), +, \wedge)$.

(в) Израчунати хомотопске групе $\pi_k(\mathbb{T}^2)$, $k \in \mathbb{N}$ торуса.

(г) Уопштити овај задатак на n – димензиони торус $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\,\text{пута}}$.

(3) Доказати да не постоји ретракција лопте на њену граничну сферу. Да ли постоји ретракција $r : M \to \partial M$ за неку компактну многострукост M? Да ли постоји некомпактна многострукост M са крајем ∂M и ретракција $r : M \to \partial M$?

(4) (а) Доказати да на сфери $\mathbb{S}^n$ постоји векторско поље које нигде није једнако нули ако и само ако је n непаран број.

(б) Доказати да је идентичко пресликавање $\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ хомотопно антиподалном пресликавању $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad x \mapsto -x$ ако и само ако је n непаран број.

(5) Доказати да свако глатко пресликавање $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ које није сурјективно има фиксну тачку.

(6) (а) Доказати да свако пресликавање $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ које је хомотопно идентичком има фиксну тачку. Да ли постоји пресликавање $f : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ које је хомотопно идентичком, а нема фиксну тачку?

(б) Нека је $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$. Доказати да или f има фиксну тачку, или f слика неку тачку у антиподалну, а $f \circ f$ има фиксну тачку. Да ли исто важи за сфере непарне димензије?

(в) Група G слободно дејствује на $\mathbb{S}^{2n}$. Доказати да је $G = \{e\}$ или $G = \mathbb{Z}_2$. Да ли исто важи за сфере непарне димензије?

(7) Нека је M компактна повезана многострукост без границе и N повезана многострукост. Доказати да ако постоји субмерзија $f : M \to N$, онда је N компактна, а M Серова фибрација над базом N са пројекцијом f.