Први домаћи задатак

(1) Лако је видети да је дијагонала $\Delta \subset N \times N$ глатка подмногострукост. График пресликавања f у $M \times N$ је $(f \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta)$. Да ли је $f \times \mathrm{id}$ трансверзално на Δ?

(2) Да ли је пресек графика пресликавања f и g подмногострукост у $M \times N$ ако је f трансверзално на g?

(3) Ако се R и S секу трансверзално, доказати да је $\nu(R \cap S) = \nu R \oplus \nu S$. Да ли важи обрнуто?

(4) Пошто је тврђење (а) локалног карактера, можемо да применимо Теорему о рангу из $\mathbb{R}^n$ (у свакој локалној карти) и одатле закључимо (а). Остала тврђења су општа топологија. У вези са (д) прелистати стр. 91–95 у „Анализи на многострукостима”.

(5) $PD(X) \wedge PD(Y) = (-1)^{\dim X \cdot \dim Y} PD(Y) \wedge PD(X)$ (антикомутативност спољашњег множења $\wedge$), па је $X \cdot Y = (-1)^{\dim X \cdot \dim Y} Y \cdot X$.

(6) (б) Због димензија множење $\wedge : H_r(\mathbb{T}^2) \otimes H_s(\mathbb{T}^2) \to H_{r+s}(\mathbb{T}^2)$ се лако описује за све r, s сем $r = s = 1$; да бисмо га описали у том случају можемо да искористимо $PD(R \cap S) = PD(R) \wedge PD(S)$ и пређемо са кохомологије на хомологију, где се ствари виде геометријски, и искористимо везу Поенкареовог дуала и индекса пресека и рачун из (а).
(в) *Први начин*: приметити да из тачног низа хомотопских група тривијалног раслојења $F \times B$ следи $\pi_k(F \times B) = \pi_k(F) \oplus \pi_k(B)$. *Други начин*: Из тачног низа хомотопских група наткривања (тј. раслојења са дискретним слојем) $\widehat{M} \to M$ следи $\pi_k(\widehat{M}) = \pi_k(M)$ за $k > 1$, а торус се наткрива са $\mathbb{R}^2$.

(7) Да ли id може да буде хомотопно неком пресликавању које није сурјекција? Шта је степен пресликавања које није сурјективно?

Други домаћи задатак

(1) Да ли скуп регуларних вредности мора да буде отворен?

(2) Да ли скуп критичних тачака може да буде густ? Ако може, какав је његов комплемент?

(3) Пошто је тврђење локалног карактера, можемо локално да применимо Теорему о рангу.

(4) Израчунати $\chi(\mathbb{S}^n)$. Сфера непарне димензије $2n-1$ се налази у $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, а у комплексном простору множење са i је ротација за $\frac{\pi}{2}$, тако да је $i\frac{\partial}{\partial r} \in T\mathbb{S}^{2n-1}$. Ово може да се искористи и за (а) и за (б).

(5) f_* на $H_n(\mathbb{S}^n)$ је описано помоћу степена, па овде можемо да применимо Лефшецову теорему о фиксним тачкама.

(6) Ово је задатак о Мајер – Вијеторисовом низу.

(7) Овај задатак може (и треба!) да се уради на два начина:
Први: Нека је $p \in \partial M$ регуларна тачка несуђене ретракције r. Скуп $r^{-1}(p)$ је једнодимензиона[1] многострукост са границом многострукости M. Један њен крај је тачка p. Где је други? Овај задатак је

[1] Пошто је $\dim \partial M = \dim M - 1$. Обратити пажњу на ово, ∂M није исто што и *тополошка граница*; нпр. диск $D = \{z \in \mathrm{C} \mid |z| \le 1\}$ је многострукост са границом, док пробушени диск $D \setminus \{0\}$ (чија је тополошка граница $\{0\} \cup \mathbb{S}^1$) није (видети стр. 174–175.)

доказан (као лема) на овај начин у Милноровој књизи „Топологија са диференцијабилне тачке гледишта”.

Други: Погледати Лему 2 на 165. страни у „Анализи на многострукостима”. Аргумент из њеног доказа може да се уопшти на оно што овде доказујемо, уз помоћ Теореме 3 на 537. страни (ако M није оријентабилна она и даље важи, само са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима), тачног низа пара $(M, \partial M)$ и Теореме 13 на 480. страни.

(8) Општа топологија.

(9) (а) Доказати да одавде следи да Лијева група има тривијално тангентно раслојење. Многострукости које имају тривијално тангентно раслојење називају се *паралелизабилним многострукостима.*
(б) Ако је $E \to \mathbb{S}^1$ ранга 1, онда је оно или цилиндар или Мебијусова трака (или је тривијално или није). Ако је E ранга $k > 1$, онда је $\dim E > \dim \mathbb{S}^1 + \dim \mathbb{S}^1$, па из Теореме о трансверзалности следи да постоји сечење $s : \mathbb{S}^1 \mapsto E$ такво да је $s(\mathbb{S}^1)$ у трансверзалном положају (читај: дисјунктно) са нултим сечењем. Одатле, уз помоћ (а), следи да је E директна сума тривијалног раслојења ранга 1 и раслојења E_1 ранга $k-1$. Ако је $k-1>1$ поновимо овај поступак. Закључити на крају: свако раслојење над $\mathbb{S}^1$ је или тривијално, или директна сума тривијалног и Мебијусове траке.

(10) (а) и (б) Раслојења ранга 1 је оријентабилно ако и само ако је тривијално. За многострукости ранга већег од 1 ово није тачно (дати контрапример), мада (наравно) важи смер „ако”.
(в) $\nu(\{x \mid f(x) = y_0\}) \ni \nabla f \neq 0$.
Коментар о оријентабилности: Требало би, независно од овог задатка, знати и разумети следеће чињенице (доказане на разним местима у књизи – у §4 и §6 у Трећој глави, у Теореми 13 на стр. 480...):

- Оријентабилно раслојење над оријентабилном базом је оријентабилна многострукост.
- (Ко)тангентно раслојење је оријентабилна многострукост (али не увек оријентабилно раслојење!).
- Следеће дефиниције оријентабилности n–димензионе многострукости N су еквивалентне:
  - ♠ постоји n–форма Ω на N која нигде није нула (ова форма зове се *формом оријентације* или *запремине*);
  - ♢ постоји атлас $(U_\lambda, \psi_\lambda)$ на N, такав да $(\psi_{\lambda_1} \circ \psi_{\lambda_2}^{-1})_*$ чува оријентацију у $\mathbb{R}^n$ (тј. има позитиван јакобијан).
  - ♡ $TN \to N$ је оријентабилно раслојење;

  Ако је N компактна и повезана, онда су ♠, ♢, ♡ еквивалентни и са
  - $♣^{\mathbb{R}}$ $H^n_{DR}(N) = \mathbb{R}$;
  - $♣^{\mathbb{Z}}$ $H^n(N; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
  - $♣_{\mathbb{Z}}$ $H_n(N; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- Оријентација је неопходна за интеграцију;
- Свака многострукост има оријентабилно дволисно наткривање.
- Крај ∂M оријентабилне многострукости M је оријентабилна многострукост (у општем случају, крај не мора да буде оријентабилна многострукост, иако постоје мотиви да се посумња на то – видети Задатак 29 и дискусију пре њега на стр. 540–541).

Задатак: Доказати да је

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

(ознака $\widehat{\ }$, тзв. *узималица*, означава да је члан под њом испуштен из израза) форма запремине на сфери $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(11) (а) Из постојања f следи да M и N имају исту димензију. Искористити адут ♠ из коментара Задатка 10. Шта је $f^*\Omega$?
(б) Ако запремину базе меримо формом Ω, а запремину наткривања формом $\pi^*\Omega$, онда је њихов однос једнак броју слојева (Теорема о вези степена и интеграла), а он се може изразити у терминима фундаменталних група (видети §4 у Трећој глави).
Варијација на тему (б): реални пројективни простор је база наткривања

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \rightarrow & \mathbb{S}^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^n. \end{array}$$

За које n је $\mathbb{R}P^n$ оријентабилна многострукост? Да ли за те n постоји природна форма запремине на $\mathbb{R}P^n$, и колика је запремина пројективног простора мерена том формом?
Комплексна аналогија овог примера је раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \rightarrow & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n. \end{array}$$

Стандардна еуклидска метрика на сфери је инваријантна у односу на $\mathbb{S}^1$ дејство, па индукује метрику на $\mathbb{C}P^n$. Ако запремине меримо формама сагласним са том метриком (видети Задатак 8 на стр. 174), из Фубинијеве теореме следи $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2n+1}) = 2\pi \mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^n)$. Специјално, $\mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^1) = \pi$ (што смо могли и да очекујемо, имајући у виду Задатак 16г).

(12) Упоредити са 4. задатком у Првом домаћем.

(13) Ово је задатак из тачних низова хомотопских група раслојења (видети Теорему 2 на стр. 487 и примере иза ње).

(14) (а) је најлакше израчунати користећи CW декомпозицију пројективних простора и теорему о хомологији CW комплекса; (б-г) је вежба тачних низова хомотопских група раслојења.

(15) Мајер - Вијеторисов низ, Кинетова формула, тачни низови хомотопских група раслојења (овде само тривијалних, тј. $\pi_k(F \times B) = \pi_k(F) \oplus \pi_k(B)$).

(16) (а) и (б) Није тешко израчунати хомолошке и (до одређене димензије) хомотопске групе пројективних простора и Декартових производа осумњичених да су им хомотопски еквивалентни; питање је само шта брже води до (негативног) одговора. Није лоше пробати и једно и друго у сваком случају (чак и ако први покушај води до решења). Резултат под (б) показује да фибрација из Задатка 13а није тривијална.
(в) и (г) Погледати стр. 113-114.

(д) $\mathbb{R}P^3$ може да се схвати као тродимензиона лопта пречника π са идентификованим антиподалним тачкама граничне сфере. Тако се тачке многострукости $\mathbb{R}P^3$ могу схватити као тачке дужи $[-\pi,\pi]$ на правама кроз координатни почетак, при чему $-\pi$ и π одговарају истој тачки. Баш као што се и ротације (тј. елементи групе $SO(3)$ могу схватити као пар (оса ротације, угао из интервала $[-\pi,\pi]$), при чему нема разлике између ротације за π и $-\pi$.

(17) Искористити Теорему 2 на 111. страни. Погледати Примере 25 и 26 и Задатке 14, 16–19 на стр. 114-115.

(18) (а) Важи и обрнуто, тј. важи еквиваленција. Ако је инклузија $\imath$ кофибрација, доказати да из дефиниције кофибрације следи да постоји пресликавање r такво да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} A\times[0,1]\cup X\times\{0\} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & A\times[0,1]\cup X\times\{0\} \\ \downarrow & \nearrow r & \\ X\times[0,1] & & \end{array}$$

комутира. Тиме је доказано постојање ретракције r.

Обрнуто, нека је $r : X\times[0,1] \to A\times[0,1]\cup X\times\{0\}$ ретракција. Ако је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање и $H : A\times[0,1] \to Y$ хомотопија таква да је $f = H(\cdot,0)$, доказати да је са $F := (H\cup f)\circ r$ добро дефинисано пресликавање $F : X\times[0,1]\to Y$ и закључити одатле да је инклузија $\imath : A \to X$ кофибрација.

(б) Посматрати цилиндар $C\imath$ пресликавања $\imath$. Доказати да не постоји ретракција Хаусдорфовог простора на незатворен потпростор, а затим искористити (а).

(в) Доказати да је пројекција $\pi : X \to X/A$ хомотопска еквиваленција.

(19) Јесте; може да се искористи еквиваленција из Задатка 18а.

(20) (а) Искористити Задатак 18а и централну пројекцију цилиндра $\mathrm{D}^n\times[0,1]$ над залепљеном лоптом на његову базу $\mathrm{D}^n\times\{0\}$, где је центар пројекције центар круга $\mathbb{D}^n\times\{2\}$.

(б) Индукцијом свести на (а).

(21) Пошто је $\tilde f(\pm x) = \tilde f(x)$, функција $\tilde f$ наткрива функцију f на $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$. Пројективни простор $\mathbb{R}P^n$ је покривен отвореним скуповима $U_j = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \mid x_j \neq 0\}$ са картама

$$\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_j([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = (t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_n),$$

где је $t_k = \frac{|x_j|}{x_j}x_k$. Искористити

$$t_k^2 = x_k^2 \quad \text{за} \quad k\neq j \quad \text{и} \quad x_j^2 = 1-\sum_{k\neq j} t_k^2,$$

одакле следи запис функције f у локалној карти U_j

$$f(t_1,\dots,t_n) = j + \sum_{k\neq j}(k-j)t_k^2$$

и њеног диференцијала $df(t_1,\dots,x_n) = 2\sum_{k\neq j}(k-j)t_k dt_k$ и закључити да је $p_j = [0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$ једина критична тачка у U_j. Доказати да је матрица другог извода у p_j дијагонална матрица са дијагоналним елементима $0-j, 1-j, \ldots, n-j$. Одатле следи све што се тражи у задатку.

Задатак: Да ли функција $\mathbb{C}^{n+1} \supset \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \sum_{k=1}^{n} k|z_k|^2$ дефинише Морсову функцију на $\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$? Ако је одговор потврдан, наћи индексе њених критичних тачака.

Трећи домаћи задатак

(1) (б) Степен је „број елемената" скупа $f^{-1}(y_0)$ за регуларну вредност y_0; уз помоћ Сардове теореме то y_0 можемо згодно да изаберемо, тако да је (уз малу злоупотребу нотације) $(Sf)^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)$.

(в) Овде може да буде од користи *Фројденталова теорема*: Суспензија индукује преслика ва -ње $S_* : \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(SX)$ који је изоморфизам за $k \leq 2n$ и епоморфизам за $k = 2n$. Индукцијом, уз примену (б), видимо да је довољно доказати тврђење за $n = 1$. Схватити пресликавање $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ као периодично пресликавање $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и евоцирати успомене на Анализу 1...

(г) Где генераторе групе $H_1(\mathbb{T}^2)$ (или $\pi_1(\mathbb{T}^2)$) пресликава f_*, а где id_*?

(2) Овај задатак је сличан 5. задатку из Другог домаћег; од користи може да буде и Хопфова теорема из претходног задатка.

(3) Искористити тачне низове парова и 5–лему.

(4) Захваљујући постојању ретракта тачан хомолошки низ пара се распада на више кратких тачних низова који се раздвајају (видети 469. страну). Ова идеја у другом контексту (хомотопских група) јавља се у Примеру 10 на 489. страни.

(5) Овде све следи директно из дефиниција.

(6) Конус је увек контрактибилан.

(7) (а) следи из Сардове теореме, део (б) из (а) и Теореме 2 на 196. страни, а за други део може да буде од користи Хопфова теорема из 1. задатка, или Хуревичева теорема на стр. 482 (није лоше за кондицију мождаnих вијуга извести закључак из обе); (в) и (г) су, опет, вежба из тачних низова хомотопских група раслојења.

(8) Пример може да се нађе и за реалне функције једне реалне променљиве.

(9) За $n > 2$ критичне тачке нису изоловане.

(10) Пресек хоризонталних правих са параболоидом $z = f(p) - x^2 - y^2$ даје Морсове координате у околини тачке максимума p. За остале критичне тачке поступити слично.

(11) Искористити чињеницу да ако је A матрица са непрекидним елементима, скуп $\det A > 0$ је отворен.

(12) Питање (а) је локално, па може да се сведе на рачунање матрице извода пресликавања $x \mapsto df(x) = (x, f'(x))$ у координатама. За (б) искористити (а) и претходни задатак под (г). Свака тачка има околину са тривијалном кохомологијом (нпр. контрактибилну), па је у (в) локално $\eta = df$ за неку Морсову функцију f.

(13) Задатак 12 (а) може да помогне да се јасније види о чему се овде говори.

(14) (а) Ако је $M \supset U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$ Морсова координатна карта, дефинисати метрику g на U са $g := \phi^*\langle\cdot,\cdot\rangle$, где је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ еуклидска метрика. Ван Морсових координата дефинисати g произвољно. Искористити разбијање јединице, слично као у Теореми 1 на 116. страни.

(б) У Морсовим координатама једначина $\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f(\gamma)$ може експлицитно да се реши, ако је ∇ дефинисано помоћу метрике из (а). Решити је и одатле видети да су делови (не)стабилне многострукости који леже у тим координатним картама заиста многострукости. За глобални закључак доказати да једнопараметарска фамилија дифеоморфизама $\varphi_t : M \to M$ генерисана градијентном једначином слика (не)стабилне многострукости на (не)стабилне многострукости и да околину произвољне тачке $p \in M$ дифеоморфизам φ_t за довољно велико $|t|$ пресликава у Морсову карту. Искористити затим експлицитан опис (не)стабилних многострукости у Морсовим картама и чињеницу да је дифеоморфна слика подмногострукости и сама подмногострукост. Видети стр. 410–411.

Четврти домаћи задатак

(1) Погледати Пример 2 на стр. 208 и довести га у везу са (б). Као тест разумевања ове физичке интерпретације, решити Задатак 6 на 209. страни.
(2) Погледати стр. 82.
(3) Диференцирати по t и применити Теорему о јединствености решења.
(4) Погледати стр. 144.
(5) Као и Пример 8 на 96. страни, овај задатак је (мало нетривијалнија) манифестација последице некомпактности на продужење решења (Тврђење 2 на 96. страни).
(6) Овај задатак је илустрација тзв. *метода карактеристика* у теорији парцијалних диференцијалних једначина. Приметимо да се овде говори само о егзистенцији решења.

Коментар о јединствености: Доказати *Гронвалову неједнакост*: ако су $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ непрекидне ненегативне функције и

$$f(t) \le A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds, \quad A \ge 0, \tag{✠}$$

тада је

$$f(t) \le A\exp\Big(\int_a^t g(s)\,ds\Big) \tag{$\mathbf{\Gamma}$}$$

за $t \in [a, b)$. (Упутство: претпоставити прво да је $A > 0$. Тада је $h(t) := A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds > 0$, па је $\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f(t)g(t)}{h(t)} \le g(t)$, јер је по претпоставци (✠) $f(t) \le h(t)$. Одатле интеграцијом завршити доказ за случај $A > 0$. Ако је $A = 0$, заменити A са ε *за произвољно* $\varepsilon > 0$ и закључити да је h, а самим тим и f, једнако нули.)

Нека су f_1, f_2 два решења и нека је $E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|^2\,dx$. Доказати да, под одређеним претпоставкама о f_1, f_2, важи $\frac{dE}{dt} \le \lambda E$ за погодно изабрану константу λ. На основу Гронвалове неједнакости ($\mathbf{\Gamma}$) закључити $E = 0$, тј. $f_1 = f_2$. Споменуте „одређене претпоставке” (које омогућавају рачунање $\frac{dE}{dt}$) дефинишу класу функција у којој можемо да говоримо о јединствености решења.
(7) Погледати стр. 95–99.