(1) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција чији Морсов полином $M_t(f)$ нема узастопних степена променљиве t. Доказати да је $M_t(f) = P_t(M)$, где је $P_t(M)$ Поенкареов полином многострукости M.

Дефиниција. Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ за коју је
$$M_t(f) = P_t(M)$$
назива се *савршеном Морсовом функцијом*.

(2) Доказати да многострукост која допушта савршену Морсову функцију има хомологију без торзије. Дати пример многострукости која не допушта савршену Морсову функцију. Дати пример савршене Морсове функције.

(3) Нека је $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ торус са метриком наслеђеном из $\mathbb{R}^2$. Доказати да је са $f(x, y) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)$ добро дефинисана Морс–Смејлова функција на $\mathbb{T}^2$. На торусу представљеном као квадрат са идентификованим наспрамним страницама нацртати критичне тачке функције f и градијентне линије које их повезују. Да ли је f савршена Морсова функција?

(4) Нека је $\mathbb{R}P^2 = D/_\sim$ пројективна раван добијена од јединичног диска $D := \{|z| \le 1\}$ идентификацијом $e^{i\theta} \sim e^{i(\theta+\pi)}$. Доказати да је са $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 1$ добро дефинисана функција на $\mathbb{R}P^2$ и нацртати њене критичне тачке и градијентне линије које их спајају у односу на метрику наслеђену из D. Да ли је f Морсова функција? Да ли је f Морс–Смејлова функција?

(5) Нека је (M, g) Риманова многострукост са Римановом метриком g и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. Доказати да је подмногострукост $N \subset M$ инваријантна у односну на градијентни ток функције f ако и само ако је, за свако $x \in N$,
$$(T_xN)^\perp \subset \ker df(x),$$
где је $(T_xN)^\perp$ ортогонални комплемент тангентног простора T_xN у T_xM у односу на метрику g.

(6) Нека је M глатка многострукост и g_1, g_2 две Риманове метрике на њој. Доказати да Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ има исти градијентни ток у односу на g_1 и g_2 ако и само ако су испуњена следећа два услова:
(α) $(\forall x \in M)\, \nabla_{g_1} f(x) \perp_{g_2} \ker df(x)$
(β) $(\forall x \in M)\, \|\nabla_{g_1} f(x)\|_{g_1} = \|\nabla_{g_2} f(x)\|_{g_2}$,
где је $\nabla_g f$ градијент у односу на метрику g, $\perp_g$ ортогонал у односу на метрику g и $\|\cdot\|_g$ норма индукована метриком g.

(7) Нека је M глатка многострукост, g_0, g_1 две Риманове метрике на њој и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција која има исти градијентни ток у односу на g_0 и g_1. Доказати да f има исти градијентни ток у односу на Риманову метрику $tg_1 + (1-t)g_0$ за свако $t \in [0, 1]$.