**Теорија Морса 2007/08.** **Други домаћи задатак**

(1) Доказати да је скуп регуларних тачака глатког пресликавања $f : M \to N$ отворен у $M$.

(2) Да ли постоји функција која има густ скуп критичних вредности? (Одговор: да. Упоредити овај задатак са Сардовом теоремом.)

(3) Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање и нека је $y_0 \in N$. Ако је извод $f_*$ константног ранга у некој околини скупа $f^{-1}(y_0)$, доказати да је $f^{-1}(y_0)$ или подмногострукост у $M$ димензије $\dim M - \operatorname{rang} f_*$ или празан скуп.

(4) (а) Доказати да на сфери $\mathbb{S}^n$ постоји векторско поље које нигде није једнако нули ако и само ако је $n$ непаран број.
(б) Доказати да је идентичко пресликавање $\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ хомотопно антиподалном пресликавању $a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad x \mapsto -x$ ако и само ако је $n$ непаран број.

(5) Доказати да свако глатко пресликавање $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ које није сурјективно има фиксну тачку.

(6) (а) Нека су $F, G \subset \mathbb{S}^n$ затворени дискунктни подскупови, такви да ни један од њих не раздваја сферу на компоненте повезаности. Доказати да ни $F \cup G$ не раздваја сферу на компоненте повезаности.
(б) Нека су $U, V \subset \mathbb{S}^n$ отворени и повезани подскупови, такви да је $U \cup V = \mathbb{S}^n$. Доказати да је $U \cap V$ повезан.

(7) Доказати да не постоји ретракција лопте на њену граничну сферу. Да ли постоји ретракција $r : M \to \partial M$ за неку компактну многострукост $M$? Да ли постоји некомпактна многострукост $M$ са крајем $\partial M$ и ретракција $r : M \to \partial M$?

(8) Нека је $X$ CW – комплекс. Доказати:
(а) Ако $A \subset X$ нема две тачке у истој отвореној ћелији, онда је $A$ затворен и дискретан.
(б) Сваки компактан подскуп $K \subset X$ је садржан у коначној унији отворених ћелија.
(в) Свака затворена ћелија у $X$ је садржана у коначном подкомплексу.
(г) Сваки компактан подскуп $K \subset X$ је садржан у коначном подкомплексу.

(9) (а) Доказати да је векторско раслојење $\pi : E \to M$ ранга $k$ тривијално ако и само ако има $k$ сечења $s_j : M \to E$, $j = 1, \dots, k$ која су линеарно независна у свакој тачки $x \in M$.
(б) Описати сва векторска раслојења $\pi : E \to \mathbb{S}^1$.

(10) (а) Доказати да је хиперповрш $S \subset \mathbb{R}^n$ оријентабилна ако и само ако је нормално раслојење $\nu S$ тривијално.
(б) Да ли постоји многострукост $M$ и подмногострукост $S \subset M$ таква да је $\nu S$ тривијално раслојење, а $S$ неоријентабилна?
(в) Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција и $y_0 \in \mathbb{R}$ њена регуларна вредност. Доказати да је скуп решења једначине $f(x_1, \dots, x_n) = y_0$ оријентабилна многострукост.
(г) Дати пример многострукости $M$ и функције $f : M \to \mathbb{R}$ такве да је скуп $\{x \in M \mid f(x) = y_0\}$ неоријентабилна многострукост.

(11) Нека је $M$ оријентабилна многострукост.
   (а) Ако постоји сурјекција $f : N \to M$ која је *локални дифеоморфизам* (тј. $(\forall x \in M)(\exists U \ni x)$ такав да је $f|_U : U \to f(U)$ дифеоморфизам), доказати да је $N$ оријентабилна многострукост.
   (б) Ако је $\pi : \widetilde{M} \to M$ наткривање, доказати да је $\widetilde{M}$ оријентабилна многострукост. Наћи однос запремина многострукости $M$ и $\widetilde{M}$ у терминима њихових фундаменталних група.

(12) Нека је $M$ компактна повезана многострукост без границе и $N$ повезана многострукост. Доказати да ако постоји субмерзија $f : M \to N$, онда је $N$ компактна, а $M$ Серова фибрација над базом $N$ са пројекцијом $f$.

(13) (а) Доказати да је $\mathbb{R}P^3$ фибрација над $\mathbb{S}^2$ са слојем $\mathbb{S}^1$. Израчунати $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ и $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$.
   (б) Доказати да је Клајнова флаша фибрација са базом $\mathbb{S}^1$ и слојем $\mathbb{S}^1$. Израчунати хомотопске и хомолошке групе Клајнове флаше.

(14) Израчунати
   (а) хомологије пројективних простора $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{R}P^n$;
   (б) $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ и $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$;
   (в) $\pi_2(\mathbb{R}P^3)$ и $\pi_3(\mathbb{R}P^2)$;
   (г) $\pi_2(\mathbb{C}P^n)$.

(15) (а) Доказати да простори $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^m$ и $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{S}^n$ за $m \neq n$ и $m, n > 1$ имају исте хомотопске, а различите хомолошке групе.
   (б) Доказати да простори $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ имају исте хомолошке, а различите хомотопске групе.

(16) (а) Доказати $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \setminus \{*\} \simeq \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^4$. Да ли је $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \simeq \mathbb{C}P^3$?
   (б) Да ли је $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}P^3$? (Упоредити са Задатком 13.)
   (в) Доказати $\mathbb{S}^{n-1} \approx O(n)/O(n-1) \approx SO(n)/SO(n-1)$.
   (г) Доказати $\mathbb{R}P^1 \approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{S}^2$, $\mathbb{H}P^1 \approx \mathbb{S}^4$;
   (д) Доказати $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$, $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$.

(17) Доказати да скуп свих $k$ – димензионих координатних система у $\mathbb{R}^n$ има структуру глатке многострукости и наћи њену димензију.

(18) Нека је $A \subset X$ и нека је инклузија $\imath : A \hookrightarrow X$ кофибрација. Доказати:
   (а) $A \times [0,1] \cup X \times \{0\}$ је ретракт простора $X \times [0,1]$. Да ли важи и обрнуто тврђење?
   (б) Ако је $X$ Хаусдорфов онда је $A$ затворен у $X$.
   (в) Ако је $A$ затворен у $X$ и контрактибилан, онда је $X \simeq X/A$.
   (г) Пресликавање $\imath : A \to \imath(A)$ је хомеоморфизам.

(19) Да ли је композиција две (ко)фибрације (ко)фибрација?

(20) (а) Нека је простор $X$ добијен лепљењем ћелија на простор $A$. Доказати да је инклузија $\imath : A \hookrightarrow X$ кофибрација.
   (б) Нека је $X$ CW – комплекс и $A \subset X$ његов CW – подкомплекс. Доказати да је инклузија $\imath : A \hookrightarrow X$ кофибрација.

(21) Нека је $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Доказати да функција

$$\tilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^2$$

наткрива функцију $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$. Доказати да је $f$ Морсова функција, наћи њене критичне тачке и израчунати њихове Морсове индексе.

**Следећи час је 17. јануара 2008. у 2 сата.**