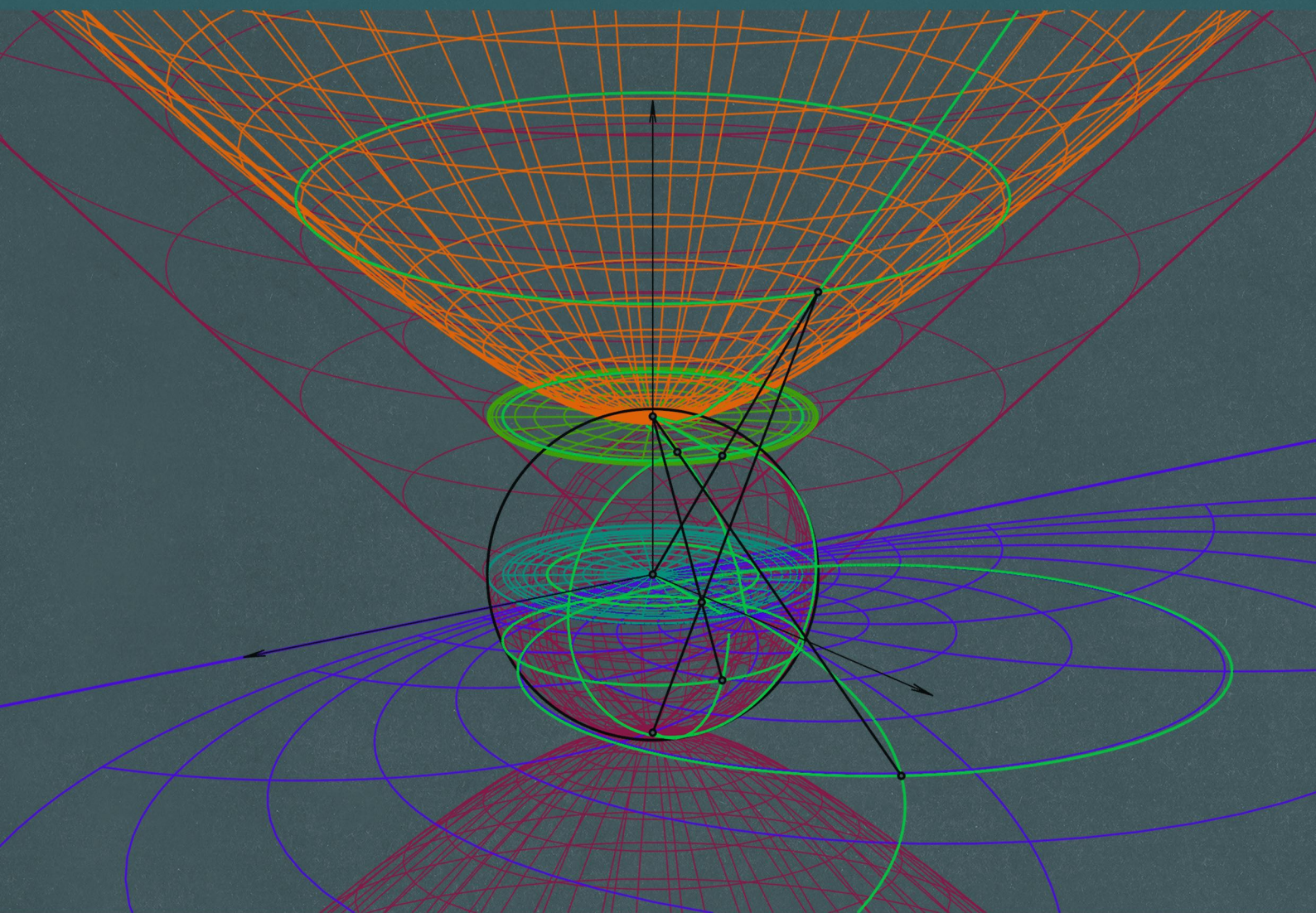




ВИША ГЕОМЕТРИЈА

ГЛАТКЕ МНОГОСТРУКОСТИ
ПСЕУДО-РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЈА
ОСЕРМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

ВЛАДИЦА АНДРЕЈИЋ

Владица Андрејић

ВИША ГЕОМЕТРИЈА

**Глатке многострукости
Псеудо-Риманова геометрија
Осерманове многострукости**

БЕОГРАД, 12.07.2026

Историја сваке веће галактичке цивилизације тежи да прође кроз три засебне и препознатљиве фазе, а то су преживљавање, изражавање и продуховљење, другачије познате као фазе Како, Зашто и Где. На пример, за прву фазу особено је питање „Како ћемо да једемо?“ за групу „Зашто једемо?“, а за трећу „Куда ћемо на ручак?“

*Далас Адамс
Аутобиографски водич кроз галаксију*

ПРЕДГОВОР

Кривина је најприроднија и најважнија инваријанта псеудо-Риманове геометрије. По Осерману¹ [101], појам кривине је један од централних концепата диференцијалне геометрије, који разлучује геометријско језгро предмета од оних аспеката који су аналитички, алгебарски или тополошки. Информације о кривини смештене су у тензору кривине, са којим је тешко радити, упркос многим симетријама које поседује. Издвајање геометријских информација које су кодиране унутар тензора кривине је прилично изазован задатак. Због тога је Громов² [67] тензор кривине описао као малог монструма (мулти)линеарне алгебре чије пуно геометријско значење остаје нејасно. Стога, уместо рада са самим тензором кривине, често користимо Јакобијеве операторе или секциону кривину који су лакши за руковање и имају бољу геометријску интерпретацију, док садрже потпуну информацију о кривини.

Наш општи циљ је да пронађемо неку врсту моста између кривине псеудо-Риманове многострукости и њених геометријских особина. Овом циљу можемо приступити на два начина. Први приступ је директан и почиње тако што опремимо многострукост метриком, при чему је онда њена кривина у потпуности одређена. Можемо је локално израчунати тако што рачунамо Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности на основу формуле (5.11), а затим користимо формулу (6.3) да бисмо добили компоненте оператора кривине, што последично даје Јакобијеве операторе.

Ако почетна метрика има неке лепе карактеристике, попут велике групе изометрија, онда је природно очекивати да она повлачи кривину која се такође лепо понаша. Уобичајено полазимо од високо симетричних многострукости које последично имају релативно једноставан тензор кривине, а затим изучавамо њихове геометријске особине, које су често уопштења особина познатих из еуклидске геометрије. Ове једноставне почетне многострукости, као што су две-тачке хомогени простори, називају се модел простори, а користе се за једноставније и конкретније изражавање суштинских карактеристика Риманове (или псеудо-Риманове) геометрије.

Други приступ иде у обратном смеру. Посматрамо општије многострукости да бисмо открили која су њихова својства репрезентативна за конкретан модел простор. Уколико не можемо да препознамо модел простор на основу ових одређених својстава, тада желимо да успоставимо потпуну класификацију псеудо-Риманових многострукости са тим особинама. Без експлицитног описа тензора кривине, покушавамо да закључимо до ког опсега посебна својства Јакобијевих оператора могу одредити метрику.

Најједноставнији случај у Римановој геометрији дешава се кад сви редуковани Јакобијеви оператори имају само једну сопствену вредност, што повлачи простор константне секционе кривине. Карактеристични полином Јакобијевог оператора који је независан на јединичном тангентном раслојењу предмет је наредног по једноставности случаја. Кључно питање је да ли овај услов одређује кривину и метрички тензор таквих Риманових многострукости које су познате као Осерманове мно-

¹Robert Osserman (1926–2011), амерички математичар

²Михаил Леонидович Громов (1943), руски математичар

гострукости.

Ова књига је замишљена као монографија о Осермановим многострукостима и обједињује велики број резултата које је аутор објавио у овој области. У циљу да што већи број читалаца буде у могућности да испрати ове резултате, књига такође садржи детаљан увод у глатке многострукости, као и основе Риманове и псеудо-Риманове геометрије, те може бити коришћена као уџбеник за курс диференцијалне геометрије. Књига се може поделити на три имагинарна дела: **Део I** Глатке многострукости, састоји се од глава 1–3, **Део II** Псеудо-Риманова геометрија, састоји се од глава 4–7 и **Део III** Осерманове многострукости, састоји се од глава 8–9.

Део I (Главе 1–3) је увод у глатке многострукости. Увешћемо основне математичке објекте, нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз ову књигу. Материјал из овог дела позајмљен је из многих извора, укључујући стандардне текстове из диференцијалне геометрије или о многострукостима: О’Нил³ [100], Џефри Ли⁴ [79], Џон Ли⁵ [81], Грос⁶ и Мајнренкен⁷ [68], Галије⁸ и Кентанс⁹ [62], Морита¹⁰ [90, Глава 1], Ту¹¹ [118]. Што се српског језика тиче можемо препоручити уџбеник који је написала Антић¹² [2].

Део II (Главе 4–7) представља увод у псеудо-Риманову геометрију. Одлична референца за класичан приступ псеудо-Римановој геометрији је књига коју је написао О’Нил [100]. Такође препоручујемо Џефри Ли [79]. Неке стандардне текстове из Риманове геометрије дали су Џон Ли [82] и до Кармо¹³ [34]. Како инсистирамо на недефинитном случају, можемо сматрати значајним текстове које су дали Мајнренкен [87] и Кларк¹⁴ [41]. За теорију подмногострукости препоручујемо Дахцера¹⁵ и Тожеира¹⁶ [44].

Део III (Главе 8–9) бави се изучавањем Осерманових многострукости и сродним тензорима. Основна литература о Осермановим многострукостима је свакако монографија коју су написали Гарсија-Рио¹⁷, Купели¹⁸ и Васкез-Лорензо¹⁹ [65]. Такође можемо препоручити књиге које је написао Гилки²⁰ [57, 58].

Београд, септембар 2025.

Владаца Андрејић

³Barrett O’Neill (1924–2011), амерички математичар

⁴Jeffrey M Lee (1956), амерички математичар

⁵John M Lee (1950), амерички математичар

⁶Gal Gross, канадски математичар

⁷Eckhard Meinrenken, немачко-канадски математичар

⁸Jean Henri Gallier (1949), француско-амерички математичар

⁹Jocelyn Quaintance, америчка математичарка

¹⁰Shigeyuki Morita (1946), јапански математичар

¹¹Loring Wuliang Tu (1952), тајванско-амерички математичар

¹²Мирослава Антић (1978), српска математичарка

¹³Manfredo Perdigão do Carmo (1928–2018), бразилски математичар

¹⁴Pete Louis Clark (1976), амерички математичар

¹⁵Marcos Dajczer (1948), аргентинско-бразилски математичар

¹⁶Ruy Tojeiro, бразилски математичар

¹⁷Eduardo García-Río, шпански математичар

¹⁸Demir Nuri Kupeli (1957), турски математичар

¹⁹Ramón Vázquez-Lorenzo, шпански математичар

²⁰Peter Belden Gilkey (1946), амерички математичар

САДРЖАЈ

Предговор	iii
Садржај	v
1 Глатке многострукости и пресликавања	1
1.1 Локално еуклидски простори	3
1.2 Тополошке особине многострукости	7
1.3 Глатке многострукости	11
1.4 Глатка пресликавања	16
1.5 Дифеоморфизми	20
1.6 Разбијање јединице	23
1.7 Задаци	26
2 Тангентни простори и пресликавања	28
2.1 Тангентни вектори	28
2.2 Тангентна пресликавања	32
2.3 Субмерзије и имерзије	34
2.4 Подмногострукости	39
2.5 Векторска поља	43
2.6 Глобално тангентно пресликавање	48
2.7 Задаци	50
3 Тензорска раслојења и поља	52
3.1 Векторска раслојења	52
3.2 Покретни репери	55
3.3 Векторска поља на сфери	57
3.4 Ковекторска поља	60
3.5 Тензорска поља	64
3.6 Извод тензорских поља	68
3.7 Задаци	71
4 Псеудо-Риманова метрика	72
4.1 Скаларни производ	72
4.2 Изотропни вектори	75
4.3 Псеудо-Риманове многострукости	78
4.4 Повлачење метричких тензора	81
4.5 Музички изоморфизми	84
4.6 Модел простори	87
4.7 Дужина и растојање	93
4.8 Задаци	97

5	Повезаност	98
5.1	Коваријантни изводи	98
5.2	Леви-Чивита повезаност	101
5.3	Паралелно померање	104
5.4	Геодезијске криве	107
5.5	Експоненцијално пресликавање	110
5.6	Геодезијске и минимизујуће криве	112
5.7	Комплетност	115
5.8	Задаци	116
6	Кривина	117
6.1	Тензор кривине	117
6.2	Алгебарски тензор кривине	122
6.3	Секциона кривина	125
6.4	Константна секциона кривина	130
6.5	Ричијев тензор	133
6.6	Ричијеви идентитети	136
7	Још псеудо-Риманове геометрије	139
7.1	Јакобијева поља	139
7.2	Псеудо-Риманове подмногострукости	145
7.3	Симетрични простори	150
8	Осерманови тензори	153
8.1	Осерманови услови	153
8.2	Ајнштајн, цвајштајн, к-штајн тензори	156
8.3	Четвородимензиони цвајштајн тензори	162
8.4	Принцип дуалности	169
8.5	Квази-Клифордови тензори	172
8.6	Јакоби-дуални тензори	179
8.7	Принцип ортогоналности	186
8.8	Нискодимензиони Јакоби-ортогонални тензори	190
8.9	Прост-корен Осерманови тензори	193
8.10	Риманови Осерманови тензори	197
8.11	Принцип пропорционалности	199
9	Осерманове многострукости	203
9.1	Примери Осерманових многострукости	203
9.2	Шурови проблеми	208
9.3	Један-корен многострукости	211
9.4	Два-корена Осерманове многострукости	212
9.5	Два-корена Риманови тензори	213
9.6	Два-корена Риманове многострукости	218
A	Додатак	223
A.1	Теорија скупова	223
A.2	Топологија	224
A.3	Сопствена структура ендоморфизама	226
A.4	Самоадјунговани ендоморфизми	234
A.5	Теорија пертурбација	238
A.6	Анализа	242
A.7	Алгебра	244
A.8	Теорија бројева	245

Литература	246
Индекс појмова	252

ГЛАТКЕ МНОГОСТРУКОСТИ И ПРЕСЛИКАВАЊА

Један од најзначајнијих догађаја у историји геометрије догодио се 10. јуна 1854. када је Бернхард Риман¹ на Филозофском факултету Универзитета у Гетингену одржао предавање под називом „О хипотезама које леже у основама геометрије“ (*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*).

Риман је 1851. под руководством Гауса² одбранио докторску дисертацију из основа комплексне анализе. Следећи корак у његовој академској каријери био је да се квалификује за позицију приватдоцента, предавача који нема плату већ му се прослеђује новац од школарина које су плаћали студенти који изаберу да слушају његова предавања. Та позиција добијала се кроз поступак хабилитације, где се од кандидата захтевало да напише рад (*habilitationsschrift*), као и да одржи јавно предавање (*habilitationsvortrag*). Област из које ће се држати приступно предавање бирао је факултет са листе од три предлога коју је начинио кандидат. Прва два Риманова предлога биле су области у којима је већ радио и имао резултате, те је са пуним правом очекивао избор неке од њих. Међутим, противно традицији, Гаус је прескочио прве две и одабрао трећу предложену тему која је била из основа геометрије.

Риман је напорно радио да би предавање учинио разумљивим за нематематичаре у публици (присуствовало је свега неколико геометричара), тако да је имао одличну презентацију у којој су идеје биле јасно дефинисане без употребе аналитичког апарата. Иако је Гаус био задивљен јер је предавање превазишло сва његова очекивања, како је оно било само усмено, а без техничких детаља, не чуди што није остварило тренутни утицај на математички свет. Међутим, прво објављивање тог предавања у писаној форми (објавио га је Дедекин³ 1868. године [110], две године након Риманове смрти) изазвало је значајне реакције математичара и постало преткретница у историји геометрије.

У то време изучавале су се ствари везане за Еуклидов⁴ пети постулат (данашња аксиома паралелности) у потрази за аксиомама које би чврсто поставиле темеље основног геометријског простора. Такође се трагало и за структуром простора у којем живимо, док су неки математичари почели да размишљају о егзистенцији другачијих структура. То нас доводи до неееуклидских геометрија које су проучавали Бољај⁵ и Лобачевски⁶ (пре њих пионирске радове имали су Сакери⁷ и Омар Хајам⁸), а које одједном постају само специјални случајеви општије теорије.

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар

²Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар

³Richard Dedekind (1831–1916), немачки математичар

⁴Еуклид из Александрије, Εὐκλείδης (3. и 4. век п.н.е), грчки математичар

⁵János Bolyai (1802–1860), мађарски математичар

⁶Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), руски математичар

⁷Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733), италијански свештеник и математичар

⁸Умар ибн Ибрахим ал-Хајам Нишапури (1048–1131), персијски математичар, филозоф и песник

Риман је први дао обиман допринос уопштењу идеје површи на више димензије, а његова визија поставила је нов концепт простора за који је користио реч *mannigfaltigkeit*. Касније се у енглеском језику усталила реч *manifold* (у првом преводу на енглески, Клифорд⁹ је користио реч *manifoldness* [111]), док ми користимо реч *многострукост*. Ово чувено Риманово предавање (преведено на енглески) и прича око њега може се прочитати код Спивака¹⁰ [113, Глава 4].

Многострукости су основни објекти диференцијалне геометрије. Међутим, Риман није имао прецизну дефиницију овог концепта. У то време било је техничких потешкоћа дати формалну дефиницију јер општи појам тополошког простора није био дефинисан пре Фрешеа¹¹ (1906 [51]) и Хаусдорфа¹² (1914 [69]). Поенкаре¹³ је 1895. [104] увео идеју атласа и дао дефиницију многострукости која је била претеча модерног концепта многострукости. Међутим, прву строгу аксиоматску дефиницију многострукости изложили су Веблен¹⁴ и Вајтхед¹⁵ 1931. [119] и 1932. године [120].

Многострукости су свуда око нас у многим облицима и могу се схватити као вишедимензиона уопштења глатких кривих и глатких површи. Опште говорећи у питању су геометријски објекти који локално изгледају као еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ и на којима можемо вршити диференцијални и интегрални рачун. Наравно, основни примери многострукости су сами еуклидски простори, глатке раванске криве (као што су елипсе, хиперболе, параболе) и глатке површи (као што су елипсоиди, хиперболоиди, параболоиди, торуси). Што се вишедимензионих примера тиче, можемо поменути јединичну n -сферу у $\mathbb{R}^{n+1}$ као и графике глатких пресликавања између еуклидских простора.

За разлику од наведених примера многострукост се не јавља увек у добро познатом простору. У општем случају, прилично је тешко размишљати о њој као геометријској фигури јер живи у веома апстрактном окружењу. Међутим, када пронађемо локалне координате на таквом скупу и изучавамо везе између њих, често се постепено појављује скривена геометријска структура. Како желимо да укључимо што је више могуће објеката неизбежно је да дефиниција многострукости буде апстрактна. Додуше, када једном препознамо објекат као многострукост на основу апстрактне дефиниције, он се кроз координате појављује у добро познатом простору и постаје веома практичан објекат.

Изучавање многострукости подразумева топологију, те претпостављамо да је читалац упућен у дефиницију и основна својства тополошких простора. Најпре полазимо од тополошког простора са одређеним својствима која нам говоре шта тачно значи да он локално личи на еуклидски простор. Међутим, та сличност са еуклидским простором мора бити довољно добра да можемо засновати парцијално диференцирање, а самим тим и све важне карактеристике диференцијалног и интегралног рачуна на многострукости. Једном када успоставимо рачун на многострукости омогућићемо многе конкретне примене. Можемо рачунати запремину (интеграцијом) или кривину (преко формула које укључују други извод), можемо изучавати класичну механику (где решавамо системе обичних диференцијалних једначина) или општу релативност (где решавамо системе парцијалних диференцијалних једначина).

⁹William Kingdon Clifford (1845–1879), енглески математичар и филозоф

¹⁰Michael David Spivak (1940), амерички математичар

¹¹Maurice René Fréchet (1878–1973), француски математичар

¹²Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар

¹³Jules Henri Poincaré (1854–1912), француски математичар

¹⁴Oswald Veblen (1880–1960), амерички математичар

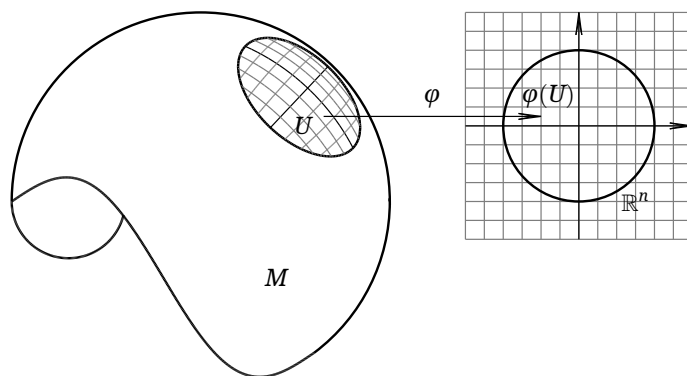
¹⁵John Henry Constantine Whitehead (1904–1960), британски математичар

1.1 Локално еуклидски простори

Многострукуост можемо замислити као мрачну собу са лампом на располагању. У сваком датом тренутку, лампа нам дозвољава да обасјамо и осмотримо само један регион собе дајући нам локалну идеју о томе како та соба изгледа. У нашој причи лампа представља еуклидски простор који долази опремљен лепим координатним системом.

У проучавању географије Земље као целине, згодно је користити географске карте (мапе), које дају умањени приказ неких делова Земље на равном листу папира. Карте се често радије користе од глобуса јер су практичније за свакодневну употребу. Збирка географских карата таквих да је свака тачка Земље приказана у барем једној карти назива се атлас и даје одличан опис читаве планете, без њене стварне визуализације у тродимензионом простору.

Ову идеју локалних координата можемо формализовати за произвољан непразан скуп M . **Карта** (или **локални координатни систем**) димензије $n \in \mathbb{N}_0$ на скупу M је инјективно пресликавање $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $U \subseteq M$, а $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ непразан отворен скуп. Домен U карте φ зовемо **координатна околина**, а како се он често користи то карту φ традиционално обележавамо као уређен пар (U, φ) . Кажемо да је (U, φ) **карта у $p \in M$** уколико $p \in U$, а ако додатно важи $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ кажемо да је карта **центрирана у p** . За инверзно пресликавање $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ карте φ кажемо да је **локална параметризација**.



Кроз ову књигу, $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ означава природну пројекцију која је дефинисана са $\pi_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ за свако $1 \leq i \leq n$. **Координатне функције** n -димензионе карте (U, φ) на M су функције $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане са $x_i = \pi_i \circ \varphi$ за $1 \leq i \leq n$. Њихове вредности у некој тачки $p \in U$ су **координате**, а за њих важи

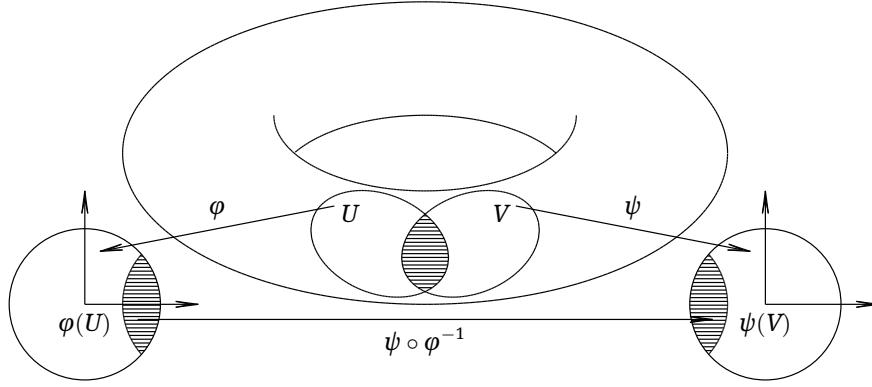
$$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)).$$

Ако је $U \subseteq \mathbb{R}^m$ отворен подскуп еуклидског простора, за функцију $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ кажемо да је класе C^r на U за $r \in \mathbb{N}$, ако свака од њених компонента функција $\pi_i \circ f$ има непрекидне парцијалне изводе реда r . Ако је f класе C^r за свако $r \in \mathbb{N}$, онда је класе C^∞ , а тада кажемо да је **глатка** или **диференцијабилна**. Функције класе C^0 су непрекидне, а оне класе C^ω су аналитичке.

За функцију између отворених подскупова еуклидских простора кажемо да је C^r -дифеоморфизам ако је бијективна при чему су и она и њен инверз класе C^r . Иако дозвољавамо избор $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$, најчешће користимо $r = \infty$, где C^∞ -дифеоморфизам једноставно зовемо **дифеоморфизам**, док је C^0 -дифеоморфизам заправо **хомеоморфизам**.

Сарадња између две карте (U, φ) и (V, ψ) на скупу M успоставља се **функцијом преласка**, што је бијективно пресликавање $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$. За две карте кажемо да су C^r -**сагласне** (или C^r -**компатибилне**) уколико је њихова функција

преласка C^r -дифеоморфизам (подразумева се да су тада и домен и кодомен отворени скупови). У специјалном случају кад су подскупови U и V дисјунктни сматрамо да су карте тривијално C^r -сагласне.



Фамилија карата на скупу M које су међусобно C^r -сагласне и такве да је унија свих координатних околина једнака M (свака тачка из M налази се у домену неке карте) назива се C^r -**аџлас** за M . Ако је свака карта у C^r -атласу димензије $n \in \mathbb{N}_0$, онда је n **димензија** тог атласа.

Како су све функције класе C^r за $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ свакако непрекидне (класе C^0), то је сваки атлас који разматрамо барем C^0 -атлас, односно **тополошки аџлас**. За скуп M кажемо да је **локално еуклидски простор** димензије n ако поседује тополошки атлас димензије n .

Испоставља се да локално еуклидски простор M на природан начин постаје тополошки простор. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ тополошки атлас димензије n за скуп M . **Топологија аџласа** $\mathcal{A}$ је топологија на M у којој важи

$$V \subseteq M \text{ је отворен } \iff (\forall \alpha \in \Lambda) \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ је отворен.} \quad (1.1)$$

Како су $\varphi_\alpha(\emptyset) = \emptyset$ и $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap M) = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ отворени, то су $\emptyset$ и M отворени у M . Пресек је дистрибутиван у односу на унију, док је по Леми А.1 слика уније једнака унији слика, те имамо

$$\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap \bigcup_{\beta} V_\beta\right) = \varphi_\alpha\left(\bigcup_{\beta} (U_\alpha \cap V_\beta)\right) = \bigcup_{\beta} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta),$$

одакле се види да је унија $\bigcup_{\beta} V_\beta$ отворених скупова V_β отворен скуп. Како је φ_α инјективно, то је по Леми А.1 слика пресека једнака пресеку слика, те имамо

$$\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap \bigcap_{\beta} V_\beta\right) = \varphi_\alpha\left(\bigcap_{\beta} (U_\alpha \cap V_\beta)\right) = \bigcap_{\beta} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta),$$

одакле се види да је коначан пресек $\bigcap_{\beta} V_\beta$ отворених скупова V_β отворен скуп, што доказује да формула (1.1) заиста дефинише топологију на M .

Лема 1.1. Ако је $\mathcal{A}$ тополошки аџлас фиксираних димензије за скуп M , онда је топологија аџласа $\mathcal{A}$ јединствена топологија којом M постаје тополошки простор такав да су све карте аџласа $\mathcal{A}$ хомеоморфизми на своју слику.

Доказ. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ тополошки атлас димензије n за скуп M који постаје тополошки простор. Како захтевамо да су $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ хомеоморфизми, то фамилија $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ постаје отворен покривач од M , те је $V \subseteq M$ отворен ако и само ако за свако $\alpha \in \Lambda$ важи да је $U_\alpha \cap V \subseteq M$ отворен. Зато тражена топологија на M може бити само топологија атласа дата са (1.1).

Ако је $W \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, онда је $\varphi_\beta(U_\beta \cap \varphi_\alpha^{-1}(W)) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \cap W)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, те је $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ отворен у M , одакле следи да је φ_α непрекидно. Ако је $V \subseteq U_\alpha$ отворен у M , онда је $\varphi_\alpha(V) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, те је φ_α^{-1} непрекидно и φ_α је хомеоморфизам на своју слику. $\square$

Неки аутори допуштају да димензија карте из C^r -атласа не буде унапред фиксирана. Међутим, на основу инваријантности димензије (Теорема А.5), непразан подскуп од $\mathbb{R}^m$ није хомеоморфан отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ осим за $m = n$. Зато је n константно на компонентама повезаности од M , али је могуће да свака компонента има засебну димензију. Ми не желимо да користимо реч многострукост за просторе са миксованом димензијом, попут дисјунктне уније различитих еуклидских простора, те захтевамо да C^r -атлас има фиксирану димензију.

Лема 1.1 показује да основни концепт многострукости подразумева локално еуклидски тополошки простор M . Међутим, овакав приступ има један мањи технички проблем јер постоје многи избори тополошког атласа који дају исти тополошки простор.

За карту (U, φ) на скупу M кажемо да је C^r -сагласна са C^r -атласом $\mathcal{A}$ за M ако је она C^r -сагласна са сваком од карата из $\mathcal{A}$, а то се дешава ако и само ако је унија $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ такође C^r -атлас.

Посматрајмо C^r -атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ димензије n за скуп M . За $V, W \subseteq M$ и произвољно пресликавање $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, како је пресек дистрибутиван у односу на унију, а формуле (А.1) и (А.2) из Леме А.1 важе за инјективно φ_α , добијамо

$$\begin{aligned} \psi(V \cap W) &= \bigcup_\alpha \psi(U_\alpha \cap V \cap W) = \bigcup_\alpha (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V \cap W)) \\ &= \bigcup_\alpha (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Нека су (V, ψ) и (W, θ) карте на M које су C^r -сагласне са $\mathcal{A}$. Како је функција преласка $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ хомеоморфизам (као C^r -дифеоморфизам) за свако $\alpha \in \Lambda$, то из формуле (1.2) видимо да је $\psi(V \cap W)$ отворен у $\mathbb{R}^n$, као и $\theta(V \cap W)$. За функцију преласка $\theta \circ \psi^{-1}: \psi(V \cap W) \rightarrow \theta(V \cap W)$ имамо

$$\theta \circ \psi^{-1}|_{\psi(U_\alpha \cap V \cap W)} = (\theta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}),$$

те је $\theta \circ \psi^{-1}$ класе C^r на $\psi(U_\alpha \cap V \cap W)$ за свако $\alpha \in \Lambda$, а самим тим класе C^r на $\psi(V \cap W)$. Слично је $\psi \circ \theta^{-1}$ класе C^r на $\theta(V \cap W)$, те су карте (V, ψ) и (W, θ) C^r -сагласне, што доказује наредну лему.

Лема 1.2. *Ако су две карте C^r -сагласне са C^r -атласом, онда су оне и међусобно C^r -сагласне.*

Компљетан C^r -атлас је максималан C^r -атлас у смислу да није садржан ни у једном већем C^r -атласу. Другим речима, свака карта која је сагласна са комплетним C^r -атласом се већ налази у њему.

Лема 1.3. *Сваки C^r -атлас за скуп M њенише јединствен компљетан C^r -атлас за M који ња садржи.*

Доказ. Нека је $\mathcal{A}$ C^r -атлас за M , а $\overline{\mathcal{A}}$ фамилија свих карата на M које су C^r -сагласне са $\mathcal{A}$. Очигледно је $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, док су по Леми 1.2 све карте из $\overline{\mathcal{A}}$ међусобно C^r -сагласне. Свака карта која је C^r -сагласна са $\overline{\mathcal{A}}$, C^r -сагласна је и са $\mathcal{A}$, те је већ у $\mathcal{A}$, што доказује да је $\overline{\mathcal{A}}$ комплетан C^r -атлас. $\square$

Комплетан атлас дозвољава велику флексибилност у избору карте, о чему говори наредна лема.

Лема 1.4. Нека је (U, φ) карта комплетној C^r -атласа $\overline{\mathcal{A}}$ димензије n на скупу M . Ако је непразан отворени $V \subset U$ такав да је $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ отворен, онда је $(V, \varphi|_V) \in \overline{\mathcal{A}}$. Ако је $f: \varphi(U) \rightarrow f(\varphi(U)) \subseteq \mathbb{R}^n$ C^r -дифеоморфизам, онда је $(U, f \circ \varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Доказ. Како је $\varphi|_V(V) = \varphi(V)$ отворен, а функција преласка $\varphi|_V \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(V \cap W)}$ C^r -дифеоморфизам за свако $(W, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$, то је $(V, \varphi|_V) \in \overline{\mathcal{A}}$. Како је $f \circ \varphi(U)$ отворен, а $(f \circ \varphi) \circ \psi^{-1} = f \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ C^r -дифеоморфизам за свако $(W, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$, то је $(U, f \circ \varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Честа употреба Леме 1.4 односи се на случај кад је C^r -дифеоморфизам f трансляција дата формулом $f(x) = x - \varphi(p)$, а која шаље $\varphi(p)$ у $0 \in \mathbb{R}^n$. Последице, за сваку тачку $p \in M$ постоји карта на M која је центрирана у p .

Наравно, топологије на M генерисане Лемом 1.1 од произвољног тополошког атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ за M и од његовог комплетног тополошког атласа $\overline{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ су једнаке, јер ако су $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени за свако α , то за свако $(V, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ по формули (1.2) имамо отворен $\psi(V \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$.

У том смислу, локално еуклидски простор димензије n је уређен пар $(M, \overline{\mathcal{A}})$, где је M скуп, а $\overline{\mathcal{A}}$ комплетан тополошки атлас димензије n за M , те самим тим он јесте тополошки простор чију топологију одређује произвољан тополошки атлас $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$, док су све карте тог атласа хомеоморфизми на своју слику. Међутим, тополошки простор не мора да буде локално еуклидски, што видимо у наредном примеру.

Пример 1.1. Посматрајмо укрштене праве $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$ са релативном топологијом. Ако је $\varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ хомеоморфизам за повезану околину $V \subseteq M$ тачке $0 = (0, 0)$, онда су $V \setminus \{0\}$ и $\varphi(V) \setminus \{\varphi(0)\}$ хомеоморфни. Међутим, $V \setminus \{0\}$ има четири компоненте повезаности, док $\varphi(V) \setminus \{\varphi(0)\}$ има две компоненте за $n = 1$ или само једну уколико је $n > 1$, тако да M није локално еуклидски. $\triangle$

Уобичајено захтевамо и додатне техничке претпоставке за тополошки простор да бисмо избегли неке патолошке случајеве са којима се не срећемо у пракси. Природно претпостављамо да је M Хаусдорфов простор, што значи да за сваке две различите тачке $p, q \in M$ постоје дисјунктни отворени подскупови $P, Q \subset M$ са $p \in P$ и $q \in Q$. У том случају уместо карата $(U, \varphi), (V, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ са $p \in U$ и $q \in V$, по Леми 1.4 можемо узети њихове рестрикције $(U \cap P, \varphi|_{U \cap P}), (V \cap Q, \psi|_{V \cap Q}) \in \overline{\mathcal{A}}$ које имају дисјунктне координатне околине. **Хаусдорфов услов** је испуњен ако за сваке две различите тачке $p, q \in M$ постоје карте $(U, \varphi), (V, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ са $p \in U$ и $q \in V$ тако да је $U \cap V = \emptyset$, што је еквивалентно са тим да је индукована топологија Хаусдорфова.

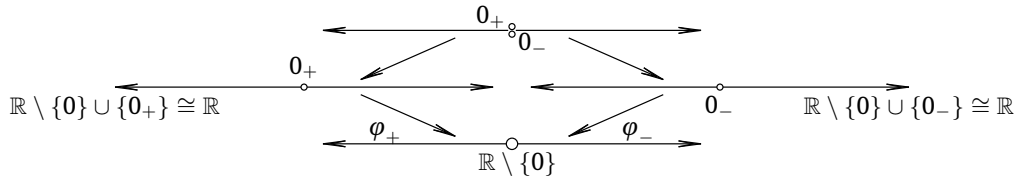
Корисно је знати да је Хаусдорфов услов аутоматски испуњен за тачке из исте координатне околине, што видимо у наредној леми.

Лема 1.5. Нека је $(M, \overline{\mathcal{A}})$ локално еуклидски простор и $(U, \varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$. За различите тачке $p, q \in U$ постоје $(V_p, \psi_p), (V_q, \psi_q) \in \overline{\mathcal{A}}$ тако да $p \in V_p, q \in V_q$ и $V_p \cap V_q = \emptyset$.

Доказ. Различите тачке $\varphi(p), \varphi(q) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ се могу раздвојити отвореним скуповима $P \ni \varphi(p)$ и $Q \ni \varphi(q)$, где је $P \cap Q = \emptyset$, те добијамо дисјунктне $V_p = \varphi^{-1}(P) \ni p$ и $V_q = \varphi^{-1}(Q) \ni q$, док су тражене карте одговарајуће рестрикције карте φ добијене из Леме 1.4. $\square$

Пример 1.2. Права са очима (line with two origins) је количнички простор дефинисан са $M = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \{-1, 1\}\} / \sim$, где је $\sim$ релација еквиваленције дата са $(x, -1) \sim (x, 1)$ за $x \neq 0$. Овај простор видимо као $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_+, 0_-\}$, те нека је $\mathcal{A} = \{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$, где су $\varphi_\pm: M \setminus \{0_\mp\} \rightarrow \mathbb{R}$ дати са $\varphi_\pm(x) = x$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\varphi_\pm(0_\pm) = 0$. Функција преласка $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} = 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ је хомеоморфизам, те је $\mathcal{A}$ тополошки атлас за M . Додатно, карте φ_+ и φ_- су хомеоморфизми у односу на количнику топологију простора M , што је управо топологија коју ће по Леми 1.1 генерисати атлас $\mathcal{A}$. Свака околина тачке $0_\pm$ садржи $\varphi_\pm^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = (-\varepsilon, 0) \cup \{0_\pm\} \cup (0, \varepsilon)$ за неко мало

$\varepsilon > 0$, те се тачке 0_+ и 0_- не могу раздвојити отвореним скуповима. Права са очима је локално еуклидски простор димензије 1 који не испуњава Хаусдорфов услов. $\triangle$



Додатно захтевамо да M задовољава другу аксиому пребројивости, односно да његова топологија има пребројиву базу. У терминима карата то значи да комплетан атлас $\bar{\mathcal{A}}$ има пребројив податлас $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Наиме, за свако $p \in M$ постоји карта у p која се по Лему 1.4 може заменити рестрикцијом на неки базни скуп, те ако M има пребројиву базу, онда има и пребројив податлас. Обратно, како отворени подскупо-ви од $\mathbb{R}^n$ имају пребројиву базу, ако постоји пребројив податлас $\mathcal{A}$ то је M пребројива унија отворених скупова са пребројивом базом, те и он сам има пребројиву базу.

Пример 1.3. Обичну праву $\mathbb{R}$ конструишемо на необичан начин са $L = I \times [0, 1)$ тако што полуотворене интервале индексирамо по $I = \mathbb{Z}$ са топологијом коју индукује лексикографски поредак на L . Нека је ω_1 први непребројив ординал. Како се сваки скуп може добро уредити (по Цермеловој¹⁶ теорему која користи аксиому избора), то природно можемо поставити потпуно уређен скуп $I = -\omega_1 \cup \{0\} \cup \omega_1$ по узору на $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. **Дугачка права** (long line, Alexandroff¹⁷ line) је $L = I \times [0, 1)$ са топологијом лексикографског поретка. Скуп $\{x \in \omega_1 : x < \alpha\}$ је пребројив за свако $\alpha \in \omega_1$, те је такав и скуп $\{x \in I : \alpha < x < \beta\}$ за $\alpha, \beta \in I$, што повлачи да свако $\alpha \in I$ има свој следбеник $S(\alpha) \in I$. За свако $\alpha \in I$ генеришемо хомеоморфизме $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow (0, 2)$, где је $U_\alpha = (\{\alpha\} \times (0, 1)) \cup (\{S(\alpha)\} \times [0, 1))$, са $\varphi_\alpha(\alpha, t) = t$ и $\varphi_\alpha(S(\alpha), t) = t + 1$, те је L локално еуклидски простор димензије 1 са тополошким атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$. Дугачка права нема пребројиву базу јер је $\{(\alpha, t) \in L : t \in (1/4, 3/4)\}_{\alpha \in I}$ непребројива фамилија дисјунктних непразних отворених подскупова од L . $\triangle$

Услов пребројивог атласа, између осталог, може се користити у доказима математичком индукцијом. Већина наших примера има атлас који се састоји од коначно много карата, а није тешко приметити да уколико је M компактан, уместо комплетног атласа можемо узети коначан податлас.

Коначно долазимо до дефиниције C^r -многострукости димензије $n \in \mathbb{N}_0$, што је скуп M заједно са комплетним C^r -атласом димензије n који има пребројив податлас и испуњава Хаусдорфов услов. У општем случају није погодно експлицитно дефинисати комплетан атлас јер он садржи превише карата. Због тога, уз скуп M уобичајено наводимо неки пребројив C^r -атлас $\mathcal{A}$ (што решава проблем пребројиве базе), и говоримо о C^r -многострукости $(M, \mathcal{A})$, подразумевајући да је то C^r -многострукост $(M, \bar{\mathcal{A}})$, где је $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ комплетан C^r -атлас индукован Лемом 1.3.

Пример 1.4. Наравно, основни пример C^r -многострукости димензије n је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ што важи за свако $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$. Он је локално еуклидски димензије n што може оправдати C^r -атлас са само једном картом $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$, а Хаусдорфов услов је испуњен јер је $\mathbb{R}^n$ Хаусдорфов као метрички простор. $\triangle$

1.2 Тополошке особине многострукости

Тополошка многострукост димензије n или **тополошка n -многострукост** је C^0 -многострукост димензије n . Пре свега, у питању је тополошки простор у скла-

¹⁶Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953), немачки логичар и математичар

¹⁷Павел Сергеевич Александров (1896–1982), совјетски математичар

ду са Лемом 1.1. **Карџа** (U, φ) димензије n на тополошком простору $M \supseteq U$ је сваки хомеоморфизам $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Сваке две карте истих димензија на тополошком простору су C^0 -сагласне јер је њихова функција преласка хомеоморфизам као композиција хомеоморфизама. Због тога је довољно пронаћи карте димензије n на M чији домени чине отворен покривач од M да бисмо добили тополошки атлас и показали да је тополошки простор M локално еуклидски димензије n .

Ако тополошки простор M као скуп има тополошки атлас $\mathcal{A}$ којим постаје тополошка многострукост чија се топологија индукована атласом $\mathcal{A}$ слаже са топологијом од M , онда је комплетан тополошки атлас $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ једнозначно одређен, а самим тим и тополошка многострукост. То нам омогућава да тополошку многострукост опишемо без неког конкретнoг атласа, што је заправо стандардна дефиниција код скоро свих аутора.

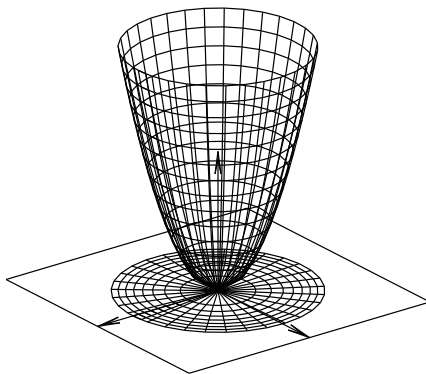
Лема 1.6. *Тополошка n -многострукост је Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом који је локално еуклидски димензије n .*

Иако постоје неки важни тополошки локално еуклидски простори који не задовољавају додатне услове (видети Пример 1.2 и Пример 1.3), они су присутни у скоро свим уобичајеним геометријским фигурама, а у природи веома ретко наилазимо на простор који не задовољава све наведене услове.

Хаусдорфов услов повлачи две суштински важне последице. Прва каже да сваки конвергентан низ има јединствен лимес, док друга говори да су компактни подскупови затворени (посебно је сваки коначан скуп затворен), односно да су њихови комплементи отворени. Додатно, Хаусдорфов простор са пребројивом базом повлачи егзистенцију разбијања јединице, веома важне алатке у теорији многострукости, што је сасвим довољно да оправда наметнуте услове. Испоставља се да ће ови услови омогућити да се свака многострукост смести у неки еуклидски простор коначне димензије, као и да јој се додели Риманова метрика.

Најједноставнији примери многострукости имају атлас који се састоји од само једне карте. Тада аутоматски имамо пребројиву базу, док Хаусдорфов услов директно следи из Леме 1.5.

Пример 1.5. Нека је $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ кружни параболоид са релативном топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^3$. Довољно је поставити једну карту $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ која је дата са $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ и представља нормално пројектовање на раван $z = 0$, што је хомеоморфизам између параболоида и равни. Зато је параболоид M тополошка 2-многострукост. $\triangle$



Пример 1.6. За сваки отворен скуп $U \subseteq \mathbb{R}^n$, **график** непрекидне функције $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ је подскуп од $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ дефинисан са $\Gamma(f) = \{(x, y) : x \in U, y = f(x)\}$. Природна пројекција $\varphi: \Gamma(f) \rightarrow U$ дата са $\varphi(x, y) = x$ је непрекидна, инвертибилна и има непрекидан инверз $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$. Како је φ хомеоморфизам, то је $\Gamma(f)$ локално еуклидски простор

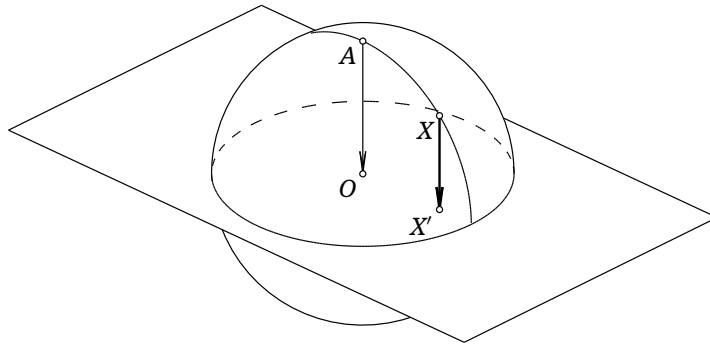
са атласом $\{(\Gamma(f), \varphi)\}$, што доказује да је $\Gamma(f)$ са релативном топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ једна тополошка n -многострукост. Можемо приметити да је параболоид из Примера 1.5 само један специјални случај графика. $\triangle$

Наравно, не можемо очекивати да тополошки простор M увек има атлас који садржи само једну карту (M, φ) . Уколико је M компактан, онда је таква и његова слика $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ при хомеоморфизму φ , али непразан отворен подскуп еуклидског простора никад није компактан, те су нам потребне барем две карте. У случају да атлас има више карата неопходно је проверити Хаусдорфов услов, али је у пракси та провера прилично рутинска. На пример, ако је M тополошки потпростор еуклидског простора, онда се Хаусдорфов услов (као и пребројива база) аутоматски наслеђује.

Пример 1.7. Јединични круг $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ са релативном топологијом је тополошка 1-многострукост, јер пресликавање $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ дато са $\psi(t) = (\cos t, \sin t)$ има рестрикције на мале отворене скупе које су хомеоморфизми. Општије, n -димензиона сфера са јединичним полупречником центрирана у координатном почетку,

$$\mathbf{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

зове се **n -сфера**. Хаусдорфовост и пребројива база за $\mathbf{S}^n$ са релативном топологијом су наслеђени из $\mathbb{R}^{n+1}$. Произвољној тачки $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{S}^n$ можемо доделити отворену хемисферу $U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n : a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} > 0\}$. Нормална пројекција скупа U на хиперраван која је дата једначином $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ има формуле $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x'_1, \dots, x'_{n+1})$ где је $x'_i = x_i - a_i(a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1})$ за $1 \leq i \leq n+1$. Ова пројекција одређује хомеоморфизам између хемисфере U и диска којег описује скуп $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 < 1, a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = 0\}$, те је n -сфера тополошка n -многострукост по Лему 1.6. $\triangle$



Многострукости, као тополошки простори, деле много заједничких особина са еуклидским просторима. Како је тополошка многострукост локално еуклидска, локалне особине еуклидских простора (као што су локална компактност и локална путна повезаност) се наслеђују. Уобичајено, отворене кугле полупречника $r > 0$ са центром $p \in \mathbb{R}^n$ чине базу топологије еуклидског простора $\mathbb{R}^n$, а користимо ознаку

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Лема 1.7. Свака тополошка многострукост је локално компактна и локално путно повезана.

Доказ. Нека је M тополошка n -многострукост, а $U \subseteq M$ околина тачке $p \in M$. Како је M локално еуклидска то постоји карта у $p \in M$, а она се по Лему 1.4 може модификовати, те постоји карта (V, φ) центрирана у $p \in M$ тако да је $V \subseteq U$. Скуп $\varphi(V) \ni 0$ је отворен, те постоји довољно мало $\varepsilon > 0$ тако да је $B_{2\varepsilon}(0) \subset \varphi(V)$. Кугла $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$

је путно повезана и релативно компактна, те је таква и њена хомеоморфна инверзна слика $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(0)}) \subset V \subseteq U$, те је M локално путно повезан и локално компактан. $\square$

Ако је M локално компактан Хаусдорфов онда су сви компактни скупови у M затворени, и свака тачка $p \in M$ лежи у неком отвореном скупу чије је затворање компактно.

Лема 1.8. *Тополошка многострукост је повезана ако и само ако је унутарно повезана.*

Доказ. Како је сваки путно повезан тополошки простор повезан, а свака тополошка многострукост локално путно повезана (Лема 1.7), довољно је доказати да повезан и локално путно повезан тополошки простор јесте путно повезан. Како је свака компонента путне повезаности локално путно повезаног простора отворена, то је сам простор унија дисјунктних отворених скупова који чине компоненте путне повезаности. Зато су компоненте повезаности и компоненте путне повезаности исте, док је лема специјални случај тога. $\square$

Профињење покривача $\mathcal{U}$ од M је нови покривач $\mathcal{V}$ од M , такав да је свако $V \in \mathcal{V}$ садржано у неком $U \in \mathcal{U}$. Једноставан пример профињења је потпокривач, али профињење је много флексибилније од тога. На пример, покривање метричког простора отвореним куглама полупречника 2 може се профинити покривањем отвореним куглама полупречника 1. Фамилија подскупова од M је **локално коначна** ако свака тачка из M има околину која сече само коначно много скупова из те фамилије. Кажемо да је M **паракомпактно** уколико сваки отворен покривач од M има локално коначно отворено профињење.

Појам паракомпактности је увео Дједоне¹⁸ [45] као уопштење појма компактности. Сваки компактан простор је очигледно паракомпактан, док је најчувенији пример простора који није паракомпактан дугачка права из Примера 1.3. Хаусдорфовост паракомпактног простора ставља нам на располагање додатне јаче особине.

Лема 1.9. *Сваки паракомпактан Хаусдорфов простор је регуларан.*

Доказ. Нека је M паракомпактан Хаусдорфов простор, $p \in M$, а C затворен скуп који не садржи p . За свако $q \in C$ из Хаусдорфовости имамо дисјунктне отворене скупове $U_q \ni p$ и $V_q \ni q$. Како је $C \subseteq \bigcup_{q \in C} V_q$, скупови V_q и $M \setminus C$ чине отворени покривач од M . Из паракомпактности за M , постоји локално коначно отворено профињење. Ако из тога искључимо сваки отворен подскуп који не сече C добијамо локално коначну фамилију $\mathcal{A}$ отворених подскупова, од којих је сваки садржан у неком V_q , која је покривач од C . Из локалне коначности за $\mathcal{A}$, постоји отворен скуп $W \ni p$ такав да постоји само коначно много чланова $A_1, \dots, A_k$ од $\mathcal{A}$ који секу W . Нека су $q_1, \dots, q_k$ тачке из C такве да $A_i \subseteq V_{q_i} \ni q_i$ важи за $1 \leq i \leq k$. Дефинишимо $U = W \cap U_{q_1} \cap \dots \cap U_{q_k}$ и $V = \bigcup \mathcal{A}$. Лако је приметити да су U и V дисјунктни отворени скупови. Зато се $p \in U$ и $C \subseteq V$ могу раздвојити околинама, те је M регуларан. $\square$

Штавише, оригинална теорема коју је поставио Дједоне каже да је сваки паракомпактан Хаусдорфов простор нормалан, али то тврђење нам није неопходно. Сваки локално компактан Хаусдорфов простор са пребројивом базом је паракомпактан, те је зато таква и тополошка многострукост.

Лема 1.10. *Свака тополошка многострукост је паракомпактна.*

¹⁸Jean Dieudonné (1906–1992), француски математичар

Доказ. Нека је M локално компактан Хаусдорфов простор са пребројивом базом. Тада постоји пребројива база $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ која се састоји од релативно компактних скупова. Поставимо $K_1 = \overline{W_1}$ и индуктивно претпоставимо да су компактни K_j дефинисани за $1 \leq j \leq n$. Како је $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ отворен покривач компактног K_n , то постоји најмањи $m \in \mathbb{N}$ такав да је $K_n \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$, те дефинишемо $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^m \overline{W_i}$ који је компактан као коначна унија компактних скупова. На овај начин конструисали смо **исцрпљивање** (*exhaustion*) од M као фамилију компактних подскупова $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ од M за коју је $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ и $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач од M за који тражимо локално коначно профињење. За свако $p \in M$ постоји $U_p \ni p$ из $\mathcal{U}$, као и најмање $n \in \mathbb{N}$ за које важи $p \in \text{Int}(K_n)$ и $p \notin \text{Int}(K_{n-1})$. Скуп $(K_n \setminus \text{Int}(K_{n-1}))$ је компактан подскуп отвореног $(\text{Int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2})$, те постоји коначна потфамилија која га покрива, а састоји се од скупова облика $V_p = (\text{Int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}) \cap U_p$. Наравно, у случају $n = 1$ или $n = 2$ потребна је мала модификација, рецимо $V_p = \text{Int}(K_3) \cap U_p$. У сваком случају овакав V_p може да исече само скупоове таквог облика чије n од оригиналног одступа највише за један, а њих је коначно много. Коначно, скупови облика V_p чине нову базу која је локално коначно профињење од $\mathcal{U}$. $\square$

Напоменимо да неки аутори дефинишу тополошку многострукост као локално еуклидски паракомпактни Хаусдорфов простор. У том случају потребно је да знамо да свака компонента повезаности локално еуклидског паракомпактног Хаусдорфовог простора има пребројиву базу. Због тога, ако локално еуклидски паракомпактни Хаусдорфов простор има пребројиво много компоненти, онда он има пребројиву базу.

1.3 Глатке многострукости

Дефиниција тополошке многострукости довољна је за изучавање тополошких особина попут компактности и повезаности. Међутим, глаткоћа није инваријанта хомеоморфизма (круг и квадрат су хомеоморфни, али квадрат није гладак), те је тополошка структура недовољна да омогући инфинитезимални рачун. Због тога тополошка многострукост захтева увођење додатне структуре.

Глајка мнојосјрукосј или **диференцијална мнојосјрукосј** димензије n је C^∞ -многострукост димензије n . У складу са дефиницијом, у питању је скуп M снабдевен пребројивим C^∞ -атласом $\mathcal{A}$ димензије n који задовољава Хаусдорфов услов. Кажемо да је $\mathcal{A}$ **іладак ајлас** за M , а сваке две карте из $\mathcal{A}$ су **ілайко саіласне** у смислу да је њихова функција преласка дифеоморфизам.

Како наша теорија претежно претпоставља глаткоћу основних објеката, често остављамо експлицитну употребу придева „гладак“. У овој књизи, осим ако није експлицитно другачије наведено, реч **мнојосјрукосј** ће се односити на глатку многострукост, **ајлас** је гладак атлас, а **саіласне** карте су глатко сагласне. Димензију многострукости M обележавамо са $\dim M$, а уколико желимо да нагласимо да је $n = \dim M$ кажемо да је M **n -мнојосјрукосј** или димензију наговештавамо кроз степен и пишемо да је M^n многострукост.

Гладак атлас $\mathcal{A}$ по Леми 1.1 једнозначно одређује топологију на M , али поред тополошке добијамо и додатну структуру коју зовемо **ілайка сјрукјура**, а која омогућава да промена локалних координата при преласку са једне карте на другу увек буде глатка. Глатку структуру на M суштински дефинише комплетан гладак атлас $\overline{\mathcal{A}}$, али захваљујући Леми 1.3 за њено одређивање довољно је имати гладак податлас $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

Уобичајено је да злоупотребом језика говоримо о многострукости M чији се (комплетан гладак) атлас $\mathcal{A}$ имплицитно подразумева, при чему карта на M увек означа-

ва карту из тог подразумеваног атласа $\mathcal{A}$. Размотримо неке добро познате примере многострукости којима на природан начин додељујемо гладак атлас чиме дефинишемо глатку структуру коју зовемо **стандардна $\mathbb{R}$ -лајка $\mathbb{R}$ -структура**, а која ће, осим ако се експлицитно не нагласи другачије, бити управо та подразумевана.

Пример 1.8. Једина околина тачке p у 0-многострукости M која је хомеоморфна отвореном подскупу од $\mathbb{R}^0$ је само $\{p\}$, те постоји јединствена карта $\varphi: \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0$. Све карте на M су тривијално сагласне и свака 0-многострукост може бити једино пребројив дискретан простор. Напоменимо да услов пребројивог податласа (пребројиве базе) из дефиниције многострукости суштински спречава да $\mathbb{R}$ посматрамо као 0-многострукост. $\triangle$

Пример 1.9. Ако тополошка многострукост M има тополошки атлас који се састоји од само једне карте онда услов сагласности тривијално важи, тај атлас је аутоматски гладак и одређује глатку структуру на M . Еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са картом $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ из Примера 1.4 је тополошка n -многострукост, а та идентичка карта одређује стандардну глатку структуру на $\mathbb{R}^n$. Такође, график било које непрекидне функције на отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ је тополошка n -многострукост са једном картом из Примера 1.6, те самим тим и n -многострукост. Одавде следи да су многе познате површи многострукости, на пример елиптички или хиперболички параболоид. $\triangle$

Пример 1.10. У Примеру 1.9 видели смо да стандардну глатку структуру на 1-многострукости $\mathbb{R}$ одређује једна карта $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$. Међутим, карта $(\mathbb{R}, \varphi)$, где је $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) = x^3$, одређује неку нову глатку структуру на $\mathbb{R}$. Како функција преласка $1_{\mathbb{R}} \circ \varphi^{-1}(y) = y^{1/3}$ није глатка у нули, наше две карте нису сагласне и због тога одређују различите глатке структуре. Тако смо добили нову 1-многострукост $\tilde{\mathbb{R}}$ што показује да иста тополошка многострукост може имати више различитих глатких структура. $\triangle$

Сваки отворен подскуп $U \subset \mathbb{R}^n$ може се видети као многострукост са атласом од само једне карте $(U, 1_U)$. Штавише, оваква конструкција је могућа за сваки отворен подскуп произвољне многострукости, што видимо у наредним примерима.

Пример 1.11. Нека је M произвољна n -многострукост са комплетним глатким атласом $\overline{\mathcal{A}}$. Природан атлас на отвореном подскупу $U \subset M$ састоји се од карата $(V, \varphi) \in \overline{\mathcal{A}}$ за које је $V \subseteq U$. Свака тачка $p \in U$ је у домену неке карте (V, φ) на M , док је $(V \cap U, \varphi|_{V \cap U})$ карта у $p \in U$ по Леми 1.4. Како су карте свакако сагласне, конструисали смо гладак атлас на U . Пребројива база и Хаусдорфов услов се наслеђују потпросторима, те $U \subset M$ на природан начин постаје n -многострукост, а кажемо да је U **отворена подмногострукост** од M . $\triangle$

Пример 1.12. Векторски простор свих реалних $m \times n$ матрица обележавамо са $\mathbb{R}^{m \times n}$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Како је $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, то је $\mathbb{R}^{m \times n}$ по Примеру 1.9 многострукост димензије mn . **Линеарна $\mathbb{R}$ -група** степена $n \in \mathbb{N}$ је група $GL(n, \mathbb{R})$ инвертибилних квадратних реалних матрица реда n , односно

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Како је детерминанта $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, $GL(n, \mathbb{R})$ је отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, те је $GL(n, \mathbb{R})$ многострукост димензије n^2 по Примеру 1.11 као отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^{n \times n}$. Слично, комплексна линеарна група $GL(n, \mathbb{C})$, што је група инвертибилних $n \times n$ комплексних матрица реда n , је отворен подскуп од $\mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ и зато је многострукост димензије $2n^2$. $\triangle$

Пример 1.13. Пример 1.12 можемо уопштити на правоугаоне матрице пуног ранга. Нека је $\mathbb{R}_m^{m \times n}$ подскуп од $\mathbb{R}^{m \times n}$ који чине матрице ранга $m < n$. За свако $A \in \mathbb{R}_m^{m \times n}$ постоји подматрица $f_A(A) \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$, где је $f_A: \mathbb{R}_m^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ конкретна пројекција. Из непрекидности детерминанте постоји околина $U \subset \mathbb{R}_m^{m \times n}$ матрице A таква да је $\det(f_A(X)) \neq 0$ за свако $X \in U$. Зато је $\mathbb{R}_m^{m \times n}$ отворен подскуп од $\mathbb{R}^{m \times n}$, те самим тим многострукост димензије mn као отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^{m \times n}$. $\triangle$

У Примеру 1.7 смо показали да је сфера $\mathbf{S}^n$ тополошка n -многострукост иако нисмо конкретизовали карте тополошког атласа. Да бисмо показали да је $\mathbf{S}^n$ глатка многострукост потребно је задати конкретан гладак атлас, по могућству са што мање карата, што видимо у наредним примерима.

Пример 1.14. Посматрајмо тополошки атлас за сферу $\mathbf{S}^n$ из Примера 1.7. Ако искористимо само оне тачке сфере чије су све координате нула осим једне, њима одговарајуће хемисфере ће прекрити читаво $\mathbf{S}^n$. Број карата у атласу је тако смањен на $2n + 2$, при чему све оне имају веома једноставне формуле. Конкретно, за свако $1 \leq i \leq n + 1$ имамо пројекције на хемисферама $U_{\pm i} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n : \pm x_i > 0\}$ које су дате са $\varphi_{\pm i}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, док је $\varphi_{\pm i}(U_{\pm i}) = B_1(0) = \mathbf{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ отворена јединична кугла. Пројекције $\varphi_{\pm i}: U_{\pm i} \rightarrow \mathbf{B}^n$ су бијекције јер лако рачунамо њихове инверзе,

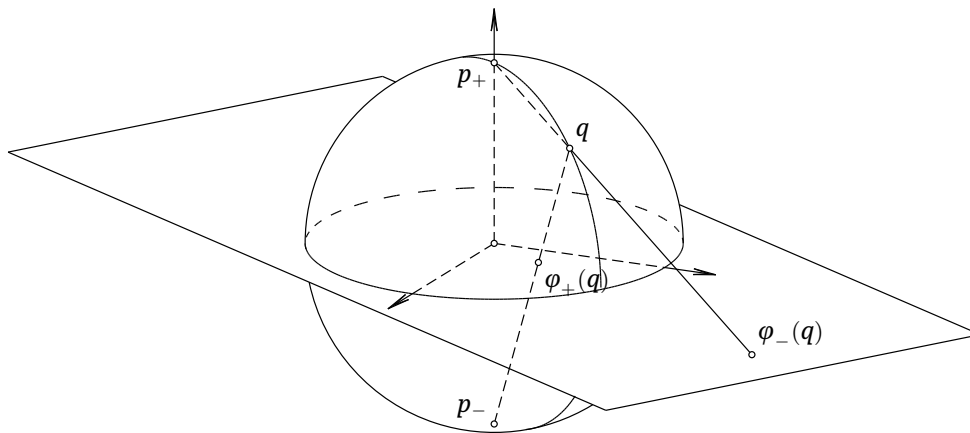
$$\varphi_{\pm i}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}, y_i, \dots, y_n),$$

што значи да су $(U_{\pm i}, \varphi_{\pm i})$ карте на сфери $\mathbf{S}^n$. Ове карте су међусобно сагласне јер су све функције преласка глатке. На пример, за $j < i$ имамо

$$\begin{aligned} \varphi_{+j} \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \varphi_{-j} \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1, \dots, y_n) \\ &= (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}, y_i, \dots, y_n), \end{aligned}$$

што је очигледно глатко, те је $\varphi_{+j} \circ \varphi_{\pm i}^{-1}$ дифеоморфизам између V_{+j} и $V_{\pm(i-1)}$, а $\varphi_{-j} \circ \varphi_{\pm i}^{-1}$ дифеоморфизам између V_{-j} и $V_{\pm(i-1)}$, где су $V_{\pm k} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{B}^n : \pm y_k > 0\}$ отворени скупови. Слично се решава случај $j > i$, док случај $j = i$ суштински не постоји јер је $U_{+i} \cap U_{-i} = \emptyset$, те карте $(U_{\pm i}, \varphi_{\pm i})$ чине гладак атлас за $\mathbf{S}^n$. $\triangle$

Пример 1.15. У Примеру 1.14 смо искористили $2n + 2$ карте да покажемо да је сфера $\mathbf{S}^n$ глатка n -многострукост. Број карата у атласу се може смањити на 2, што је оптимално јер је $\mathbf{S}^n$ компактан. Посматрајмо две тачке $p_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1) \in \mathbf{S}^n$ и два скупа $U_{\pm} = \mathbf{S}^n \setminus \{p_{\mp}\}$ која покривају целокупно $\mathbf{S}^n$.



Атлас можемо направити од две **стереографске пројекције** $\varphi_{\pm}: U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ дефинисане са

$$\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 \pm x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Оваква пресликавања $\varphi_{\pm}$ су непрекидна, инвертибилна, и њихов инверз

$$\varphi_{\pm}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} (2y_1, \dots, 2y_n, \mp(-1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)) \quad (1.3)$$

је такође непрекидан. Функција преласка

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2} (y_1, \dots, y_n) \quad (1.4)$$

је очигледан дифеоморфизам из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на самог себе (геометријски, у питању је инверзија у односу на сферу $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, што је инволуција), те су наше карте сагласне. Дакле, стереографске пројекције на n -сфери чине гладак атлас, те одређују глатку структуру n -многострукости $\mathbf{S}^n$.

Додатно, стереографске пројекције су сагласне са пројекцијама из Примера 1.14 јер су функције преласка глатке,

$$\begin{aligned} \varphi_s \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + s y_n} \left(y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}, y_i, \dots, y_{n-1} \right) \\ \varphi_{\pm i} \circ \varphi_s^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \left(2y_1, \dots, 2y_{i-1}, 2y_{i+1}, \dots, 2y_n, -s(-1 + y_1^2 + \dots + y_n^2) \right) \end{aligned}$$

за свако $1 \leq i \leq n$, као и

$$\begin{aligned} \varphi_s \circ \varphi_{\pm(n+1)}^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 \pm s \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}} (y_1, \dots, y_n) \\ \varphi_{\pm(n+1)} \circ \varphi_s^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{2}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} (y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

где је $s \in \{+, -\}$, тако да атлас са обичним и атлас са стереографским пројекцијама одређују исту глатку структуру, што је стандардна глатка структура n -сфере. $\triangle$

Уобичајено је да од старих многострукости градимо нове. На пример, ако имамо две многострукости истих димензија, можемо узети њихову дисјунктну унију са унијом њихових атласа и добити нову многострукост, иако она није интересантнија од посматрања појединачних многострукости.

Пример 1.16. Посматрајмо производ $M \times N$ за m -многострукост M и n -многострукост N . За сваку тачку $(p, q) \in M \times N$ можемо изабрати карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $q \in N$, што нам омогућава да на очигледан начин конструишемо карте производа $\varphi \times \psi: U \times V \rightarrow \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ са $(\varphi \times \psi)(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$. Сваке две карте $(\varphi_1 \times \psi_1)$ и $(\varphi_2 \times \psi_2)$ су сагласне због $(\varphi_2 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$. Атлас производа је гладак, док су Хаусдорфовост и пребројива база наследне особине производа, те је **производ мноґострукості** $M \times N$ многострукост димензије $m + n$. Зато су торус $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ и цилиндар $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ многострукости. Ова конструкција се може лако продужити за већи број многострукости, те је ***n*-торус**, $\mathbf{T}^n = \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1$ (са n фактора) глатка n -многострукост. $\triangle$

Лепљење је добар метод за конструкцију нових простора од неких раније познатих. На пример, лепљењем горње и доње ивице квадрата добијамо цилиндар, док даљим лепљењем граница цилиндра добијамо торус. Количничка конструкција је процес који почиње релацијом еквиваленције $\sim$ на скупу M , где сваку класу еквиваленције идентификујемо са тачком новог простора. **Количнички скуп** $M/\sim$ је скуп класа еквиваленције, те постоји природна пројекција $\pi: M \rightarrow M/\sim$ која тачку $p \in M$ пресликава у њој одговарајућу класу еквиваленције $\pi(p) = [p]$.

Ако је M тополошки простор природно је да количнички скуп $M/\sim$ постане **количнички њпросџор** тако што добије количничку топологију у којој је $U \subseteq M/\sim$ отворен ако и само ако је $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ отворен. Тада је пројекција π непрекидна, а додатну усклађеност са топологијом имамо ако је и отворена. То нас мотивише да све карте (U, φ) на $M/\sim$ поставимо тако да $\varphi \circ \pi$ буде непрекидно и отворено, јер се тада топологија од $M/\sim$ индукована Теоремом 1.1 слаже са количничком топологијом која је индукована пројекцијом π . Међутим, чак иако је почетни простор многострукост, количнички простор често није многострукост, јер свакако треба испитати Хаусдорфов услов.

Пример 1.17. Реални њројективни њпросџор димензије n је скуп свих једнодимензионих потпростора векторског простора $\mathbb{R}^{n+1}$. То је количнички скуп $\mathbb{RP}^n$ одређен пројекцијом $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ која тачке $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ шаље у класе еквиваленције $\pi(x) = [x] = \text{Span}\{x\}$ које постају тачке простора $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Уобичајено, класе еквиваленције вектора $(x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ записујемо у хомогеним координатама, $(x_1 : \dots : x_{n+1}) = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$.

Уведимо скуповете $\tilde{U}_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ и $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subseteq \mathbb{RP}^n$ за $1 \leq i \leq n+1$. Функција $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ дата са

$$\varphi_i(x_1 : \dots : x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

је добро дефинисана јер вредност $\varphi_i([x])$ не зависи од множења $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ неким ненула скаларом, а очигледно је бијективна са инверзом

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : y_{i+1} : \dots : y_n).$$

На овај начин конструисали смо стандардне карте (U_i, φ_i) на $\mathbb{RP}^n$ за $1 \leq i \leq n+1$. Оне су међусобно сагласне јер за $i > j$ функција преласка даје

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right),$$

што је дифеоморфизам између отворених скупова $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{R}^{j-1} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-j}$ и $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \mathbb{R}^{i-2} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n+1-i}$, а слично се показује и у случају $i < j$. Како сваки ненула вектор има неку ненула координату то имамо $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, те наше карте чине глатак атлас.

Преостаје да испитамо Хаусдорфов услов за различите тачке $p = (p_1 : \dots : p_{n+1})$ и $q = (q_1 : \dots : q_{n+1})$ из $\mathbb{RP}^n$. Ако $p, q \in U_i$ за неко $1 \leq i \leq n+1$, ствар решава Лема 1.5. У супротном постоје $1 \leq i \neq j \leq n+1$ такви да је $p_i \neq 0, p_j = 0$ и $q_i = 0, q_j \neq 0$. Посматрајмо дисјунктне скуповете $P = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) : x_i^2 > x_j^2\}$ и $Q = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) : x_i^2 < x_j^2\}$, за које важи $p \in P \subset U_i$ и $q \in Q \subset U_j$. Како су за $1 \leq k \leq n$ скупови $\{(y_1, \dots, y_n) : |y_k| < 1\}$ отворени у $\mathbb{R}^n$, то су $\varphi_i(P)$ и $\varphi_j(Q)$ отворени у $\mathbb{R}^n$, те су по Леми 1.4 $(P, \varphi_i|_P)$ и $(Q, \varphi_j|_Q)$ карте комплетног глатког атласа (како $(1 : \dots : 1) \in U_i$ за свако i нисмо могли да искористимо само оригиналне карте), што доказује Хаусдорфов услов. Коначно, $\mathbb{RP}^n$ са уведеним стандардним атласом је n -многострукост.

Важно је напоменути да се топологија многострукости $\mathbb{RP}^n$ која је индукована Теоремом 1.1 слаже са количничком топологијом која је индукована пројекцијом π . За свако $1 \leq i \leq n+1$, можемо посматрати пресликавање $\varphi_i \circ \pi: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ чије су формуле $\varphi_i \circ \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_{n+1}/x_i)$. Оно је очигледно непрекидно, али и отворено јер за отворен $W \subseteq \tilde{U}_i$, како је множење са $\lambda \neq 0$ хомеоморфизам од $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, имамо отворен $\lambda W \subseteq \tilde{U}_i$, одакле је $(\varphi_i \circ \pi)^{-1}((\varphi_i \circ \pi)(W)) = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda W$ отворен, те је $(\varphi_i \circ \pi)(W)$ отворен. Како су сва пресликавања $\varphi_i \circ \pi$ непрекидна и отворена, топологије се слажу. $\triangle$

Пример 1.18. Комплексни пројективни простор димензије n је количнички скуп $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ добијен у потпуној аналогiji са $\mathbb{RP}^n$, где је $\sim$ релација сразмерности (скалари су ненула комплексни бројеви) која индукује природну пројекцију $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и хомогене координате $\pi(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1 : \dots : z_{n+1})$. Карте стандардног атласа су $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, где је $U_i = \{(z_1 : \dots : z_{n+1}) : z_i \neq 0\}$ за $1 \leq i \leq n+1$, дате са

$$\varphi_i(z_1 : \dots : z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right).$$

Оне су међусобно сагласне јер за $i > j$ функција преласка даје

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right),$$

што је дифеоморфизам између отворених скупова $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \mathbb{C}^{j-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-j}$ и $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \mathbb{C}^{i-2} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n+1-i}$, а слично се показује и у случају $i < j$. Наравно, увек треба имати у виду да је

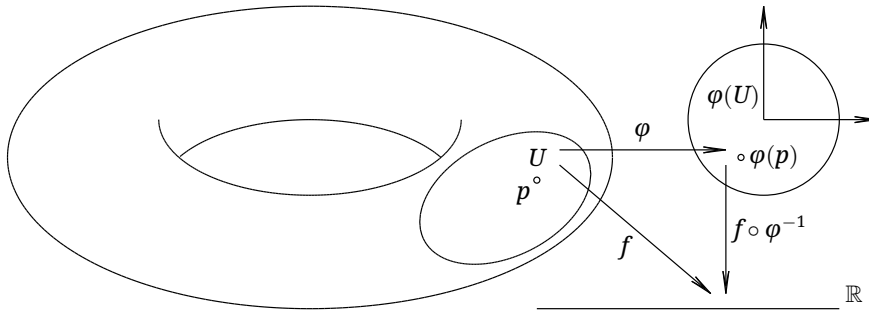
$$\frac{z_k}{z_j} = \frac{x_k + iy_k}{x_j + iy_j} = \frac{(x_k + iy_k)(x_j - iy_j)}{x_j^2 + y_j^2} = \left(\frac{x_k x_j + y_k y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \frac{y_k x_j - x_k y_j}{x_j^2 + y_j^2} \right).$$

Аналогно доказу за $\mathbb{RP}^n$, у $\mathbb{CP}^n$ важи Хаусдорфов услов јер се тачке $p = (p_1 : \dots : p_{n+1})$ и $q = (q_1 : \dots : q_{n+1})$ из $\mathbb{CP}^n$ за које је $p_i \neq 0, p_j = 0$ и $q_i = 0, q_j \neq 0$ могу раздвојити са $P = \{(z_1 : \dots : z_{n+1}) : \|z_i\| > \|z_j\|\}$ и $Q = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) : \|z_i\| < \|z_j\|\}$. Коначно, $\mathbb{CP}^n$ са уведеним стандардним атласом је $2n$ -многострукост чија се топологија слаже са количничком топологијом јер се као у Примеру 1.17 може показати да су сва пресликавања $\varphi_i \circ \pi$ непрекидна и отворена. $\triangle$

1.4 Глатка пресликавања

Глатка структура на многострукости M са глатким атласом $\mathcal{A}$ нам омогућава да недвосмислено дефинишемо које реалне функције на M су глатке.

Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ реална функција на M . Ако је $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ карта у $p \in M$, природно можемо идентификовати f са композицијом $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, где је $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, те тако пренети појам глаткоће функције на многострукости. За функцију $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је **глатка** у $p \in M$ ако постоји карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ у $p \in M$ таква да је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко у $\varphi(p)$ у уобичајеном еуклидском смислу. Функција $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ је **глатка** ако је глатка у свим тачкама из M .



Ако је $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ нека друга карта у $p \in M$, функција преласка $\varphi \circ \psi^{-1}$ је глатка, те из декомпозиције $(f \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ имамо да је $f \circ \psi^{-1}$ глатко у $\psi(p)$ ако и само ако је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко у $\varphi(p)$. Гладак атлас нам је на овај начин омогућио да

наша дефиниција не зависи од избора карте, а $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ је глатко ако и само ако је $f \circ \varphi^{-1}$ глатко за сваку карту $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Скуп свих глатких реалних функција $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на многострукости M означавамо са $\mathfrak{F}(M)$. За две функције $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ природно дефинишемо функције $f + h$ (збир), fh (производ) и af (множење скаларом $a \in \mathbb{R}$) једнакостима

$$(f + h)(p) = f(p) + h(p), \quad (fh)(p) = f(p)h(p), \quad (af)(p) = af(p),$$

које важе за свако $p \in M$. Приметимо да ове нове функције такође припадају $\mathfrak{F}(M)$, односно да скуп $\mathfrak{F}(M)$ постаје комутативан прстен са јединицом као и алгебра над $\mathbb{R}$.

Пример 1.19. Координатне функције $x_i = \pi_i \circ \varphi$ произвољне карте (U, φ) на многострукости M су глатке као функције на отвореној подмногострукости U јер је њихова координатна репрезентација $x_i \circ \varphi^{-1}$ рестрикција пројекције π_i на $\varphi(U)$, те је самим тим глатка. $\triangle$

Пример 1.20. Висинска функција $f: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на n -сфери са стандардном глатком структуром је дата са $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. Уз помоћ формуле (1.3) за стереографске пројекције из Примера 1.15 можемо израчунати

$$(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})(y_1, \dots, y_n) = \mp \frac{-1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2},$$

што је глатко на $\mathbb{R}^n$, те је f глатко. Алтернативно можемо искористити атлас са пројекцијама на хемисфере из Примера 1.14 (јер он такође даје стандардну глатку структуру на n -сфери) да покажемо да су функције $f \circ \varphi_{\pm}^{-1}$ глатке.

У општијем случају можемо посматрати глатку функцију $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ и њену рестрикцију $f|_{\mathbf{S}^n} = f \circ \iota$, где је $\iota: \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ инклузија. Координатна репрезентација инклузије је $\iota \circ \varphi_{\pm}^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ дато са

$$\iota \circ \varphi_{\pm}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} (2y_1, \dots, 2y_n, \mp(-1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)),$$

што је глатко на $\mathbb{R}^n$, одакле је глатко и $f|_{\mathbf{S}^n} \circ \varphi_{\pm}^{-1} = f \circ \iota \circ \varphi_{\pm}^{-1}$, те је $f|_{\mathbf{S}^n}$ глатко. $\triangle$

Носач (support) функције $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на многострукости M је затворење скупа тачака у којима f није нула,

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

Дакле, носач функције f је најмањи затворен подскуп од M ван којег је f једнака нули, односно комплемент од $\text{supp}(f)$ је највећи отворен подскуп на којем је f једнака нули. Ако је $\text{supp}(f)$ садржано у неком скупу $U \subseteq M$, кажемо да је f **подржано** (*supported*) у U . Ако је $\text{supp}(f)$ компактан скуп, онда кажемо да је f **компактно подржано**. Наравно, свака функција на компактном простору је компактно подржана.

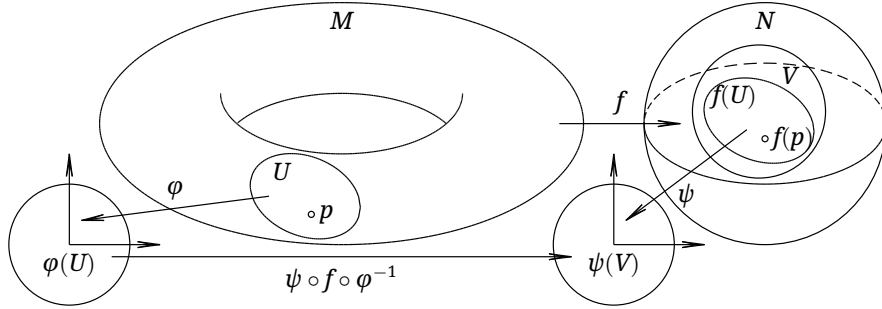
Ако је глатка функција на отвореној подмногострукости од M подржана у затвореном подскупу од M , онда се она може продужити нулом на читаву многострукост.

Лема 1.11. *Ако је U отворен подскупи многострукости M , а $f \in \mathfrak{F}(U)$ подржана у затвореном подскупу од M , онда је функција $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $h|_U = f$ и $h|_{M \setminus U} = 0$ глатка.*

Доказ. По претпоставци је $\text{supp}(f) \subseteq A \subseteq U$ за неки затворен подскуп $A \subseteq M$, одакле је $h = 0$ (и зато глатко) на отвореном подскупу $M \setminus A$. Наравно, како је $h|_U = f$ глатко на U , то је h глатко на $(M \setminus A) \cup U \supseteq (M \setminus U) \cup U = M$. $\square$

Глатка структура омогућава нам да појам глаткоће продужимо на пресликавања између две многострукости M и N . Природна идеја је да пресликавање $f: M \rightarrow N$ поистоветимо са његовом **координатном репрезентацијом** $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, где је (U, φ) карта на M , а (V, ψ) карта на N . Домен репрезентације је $(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(V) = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$, али он у општем случају не мора бити отворен скуп, што може бити проблем. Тај проблем може се отклонити захтевом да је $f(U) \subseteq V$ јер је тада $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ пресликавање између отворених скупова $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) = \varphi(U)$ и $\psi(V)$.

За пресликавање $f: M \rightarrow N$ између многострукости M и N кажемо да је **глатко** у $p \in M$ ако постоје карте (U, φ) у $p \in M$ и (V, ψ) у $f(p) \in N$, са $f(U) \subseteq V$ такве да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ еуклидски глатко. Пресликавање $f: M \rightarrow N$ је **глатко** ако је глатко у свим тачкама из M .



Отворен домен координатне репрезентације се природно може обезбедити захтевом да је пресликавање f непрекидно, а глаткоћа очекивано повлачи непрекидност, што видимо у наредној леми.

Лема 1.12. Глатко пресликавање између многострукости је непрекидно.

Доказ. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости. За $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ и карта (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $f(U) \subseteq V$, тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ еуклидски глатко, самим тим и непрекидно. Рестрикција $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ је непрекидна као композиција непрекидних пресликавања, а како је f непрекидно на околини сваке тачке $p \in M$ онда је непрекидно на целом M . $\square$

Да бисмо по дефиницији испитали да ли је пресликавање $f: M \rightarrow N$ глатко довољно је узети неки гладак атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ за M са особином да је $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ за неку карту (V_α, ψ_α) на N и затим проверити да ли су сва пресликавања $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ глатка. Наравно, захваљујући глаткој структури, глаткоћа пресликавања не зависи од избора карата, што даје алтернативни начин да се постави дефиниција глатких пресликавања.

Лема 1.13. Пресликавање $f: M \rightarrow N$ између многострукости је глатко ако и само ако је f непрекидно и функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ је еуклидски глатка за сваку карту (U, φ) на M и сваку карту (V, ψ) на N .

Доказ. Нека је (U, φ) карта на M , а (V, ψ) карта на N . По Леми 1.12, глатко f је непрекидно, што даје отворено $f^{-1}(V)$, те функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ има отворен домен $D = \varphi(U \cap f^{-1}(V))$. За произвољну тачку $d \in D \neq \emptyset$, означимо $p = \varphi^{-1}(d)$, те постоје карте (U_1, φ_1) у $p \in M$ и (V_1, ψ_1) у $f(p) \in N$ са $f(U_1) \subseteq V_1$ и глатким $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$. Како је

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap U_1)} = (\psi \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi^{-1}),$$

док су функције преласка $\psi \circ \psi_1^{-1}$ и $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$ глатке на одговарајућим околинама, то је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко на $\varphi(U \cap U_1) \ni d$ као композиција глатких пресликавања. Дакле, глатко f повлачи глатко $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Обрат је очигледан јер за $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$, произвољну карту (U, φ) у $p \in M$ по Леми 1.4 можемо рестриковати на отворен скуп $W = U \cap f^{-1}(V)$ и добити нову карту $\varphi|_W$ са условом $f(W) \subseteq V$. $\square$

Лема 1.13 покрива најчешћу дефиницију глаткоће у литератури. Пресликавање $f: M \rightarrow N$ између многострукости је глатко ако је функција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ еуклидски глатка за сваку карту (U, φ) на M и сваку карту (V, ψ) на N , уз захтев да је $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ отворен скуп. На пример, $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ ће бити отворен уколико је f непрекидно.

Постоји одговарајући појам глатке функције која за домен има произвољан подскуп еуклидског простора, што се може уопштити на многострукости. За пресликавање $f: A \rightarrow N$, чији је домен $A \subseteq M$ произвољан подскуп многострукости, а N кодомен многострукост, кажемо да је **глатко** у $p \in A$, ако постоји глатко пресликавање $f_p: U_p \rightarrow N$ где је $U_p \subseteq M$ околина од p , тако да је $f = f_p$ на $U_p \cap A$. Наравно, $f: A \rightarrow N$ је **глатко** ако је глатко у свакој тачки од A . Уколико дозволимо да домен координатне репрезентације не буде отворен скуп може се појавити проблем из наредног примера.

Пример 1.21. Размотримо карактеристичну (индикатор) функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ скупа $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Посматрамо једну карту $(\mathbb{R}, 1)$ на $M = \mathbb{R}$ и две карте на $N = \mathbb{R}$, рецимо $((-\infty, 1), 1)$ и $((0, +\infty), 1)$. Координатна репрезентација од f је само њена рестрикција на домен $D = f^{-1}(V)$, где је V домен одговарајуће карте на N . За $V = (-\infty, 1)$, скуп $D = (-\infty, 0)$ је отворен и $f|_D = 0$, те је глатко. Међутим, за $V = (0, +\infty)$, скуп $D = [0, +\infty)$ није отворен, али је $f|_D = 1$ и зато има глатко продужење на отворен скуп. Како имамо циљ да уопштиме дефиницију глатке функције између еуклидских простора, не желимо да овакво пресликавање које није непрекидно, а самим тим ни еуклидски глатко, постане глатко. $\triangle$

Дефиниција глатких пресликавања између многострукости уопштава претходне концепте. На пример, пресликавање између отворених подскупова еуклидских простора има координатну репрезентацију (у односу на идентичке карте) једнаку некој својој рестрикцији, те је глатко ако и само ако је еуклидски глатко. Слично, у случају реалне функције на многострукости имамо поклапање глатких пресликавања између многострукости са глатким функцијама које одређује глатка структура.

Како је глаткоћа пресликавања између многострукости по дефиницији локално својство то одмах имамо **Лему о локалној глаткости пресликавања**.

Лема 1.14. Нека су M и N многострукости и нека је $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ отворен покривач од M . Ако постоје глатка пресликавања $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$ за $\alpha \in \Lambda$ таква да је $f_\alpha = f_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ за свако $\alpha, \beta \in \Lambda$, онда постоји јединствено глатко пресликавање $f: M \rightarrow N$ такво да је $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ за свако $\alpha \in \Lambda$.

Пример 1.22. Очигледан пример глатког пресликавања је идентичко пресликавање, или још општије инклузија $\iota: U \hookrightarrow M$ отворене подмногострукости $U \subseteq M$. Свако константно пресликавање $c: M \rightarrow N$ је такође глатко. $\triangle$

Лема 1.15. Композиција глатких пресликавања између многострукости је глатка.

Доказ. Нека су $f: M \rightarrow N$ и $h: N \rightarrow P$ глатка пресликавања. Како је h глатко, за свако $p \in M$ постоје карте (V, ψ) у $f(p) \in N$ и (W, θ) у $h(f(p)) \in P$, са $h(V) \subseteq W$ такве да је $\theta \circ h \circ \psi^{-1}$ глатко. Пресликавање f је непрекидно по Леми 1.12, те је $f^{-1}(V) \ni p$ отворено и постоји карта (U, φ) у $p \in M$ са $U \subseteq f^{-1}(V)$. Како је f глатко, по Леми 1.13 је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Одавде имамо $(h \circ f)(U) \subseteq h(V) \subseteq W$ и $\theta \circ (h \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\theta \circ h \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ је глатко као композиција глатких функција. $\square$

Иако сама дефиниција није једноставна, често се праволинијски доказује да је конкретно пресликавање глатко. Најчешће се пресликавање запише у локалним координатама, те се његове компоненте функције препознају као композиције глатких елементарних функција или пресликавања за која већ знамо да су глатка.

Пример 1.23. Произвољно пресликавање из 0-димензионе многострукости у глатку многострукост је глатко јер је свака координатна репрезентација константна. $\triangle$

Пример 1.24. Нека су M и N многострукости, а $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ дато са $\pi_M(p, q) = p$, пројекција на прву компоненту. Нека је (U, φ) карта у $p \in M$, а (V, ψ) карта у $q \in N$, тада је $(U \times V, \varphi \times \psi)$ карта у $(p, q) \in M \times N$. Координатна репрезентација пројекције π_M је $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1}: (\varphi \times \psi)(U \times V) \rightarrow \varphi(U)$ дато са $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \mapsto (a_1, \dots, a_m)$, што је глатко, те је зато и π_M глатко. $\triangle$

Пример 1.25. Количничка пројекција $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ из Примера 1.17 је глатка. Њена координатна репрезентација у односу на уведене координате за $\mathbb{R}P^n$ и стандардне координате за $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ гласи

$$\varphi_i \circ \pi \circ \mathbb{1}^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi_i(x_1 : \dots : x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right),$$

што је очигледно глатко за $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \tilde{U}_i$, односно за $x_i \neq 0$. $\triangle$

Лијева група¹⁹ је многострукост G која је такође и група у алгебарском смислу са својством да су операције те групе сагласне са глатком структуром. Конкретно, захтева се да и множење $\mu: G \times G \rightarrow G$, $\mu(a, b) = ab$ и инверзно пресликавање $\iota: G \rightarrow G$, $\iota(a) = a^{-1}$ буду глатка пресликавања.

Пример 1.26. Наведимо неколико основних примера Лијевих група. Еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ је Лијева група у односу на сабирање. Скуп свих ненула комплексних бројева $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ је Лијева група у односу на множење. Јединични круг S^1 у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ је Лијева група у односу на множење. Производ $G_1 \times G_2$ две Лијеве групе (G_1, μ_1) и (G_2, μ_2) је Лијева група у односу на множење по координатама $\mu_1 \times \mu_2$. $\triangle$

Пример 1.27. Линеарна група $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$ из Примера 1.12 је многострукост као отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n \times n}$. Како је свака компонента производа AB две матрице $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ (квадратни) полином по компонентама од A и B , множење матрица је очигледно глатко. По Крамеровом²⁰ правилу, инверзна матрица A^{-1} је количник адјунговане матрице од A и детерминанте од A . Адјунгована матрица од A је транспонат кофактор матрице од A , те су компоненте инверзне матрице полиноми (степен $n - 1$) по компонентама од A , одакле следи да је инверзно пресликавање глатко. $\triangle$

1.5 Дифеоморфизми

Дифеоморфизам између многострукости M и N је глатко бијективно пресликавање $f: M \rightarrow N$ које има гладак инверз. Уколико такав дифеоморфизам постоји кажемо да су M и N **дифеоморфни**. Дифеоморфизам између многострукости је бијекција одговарајућих скупова која поистовећује њихове комплетне глатке атласе. Слично, **хомеоморфизам** између многострукости M и N је непрекидно бијективно пресликавање $f: M \rightarrow N$ које има непрекидан инверз, а ако постоји за многострукости кажемо да су **хомеоморфне**. Како је свако глатко пресликавање непрекидно, то је сваки дифеоморфизам уједно и хомеоморфизам.

¹⁹Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар

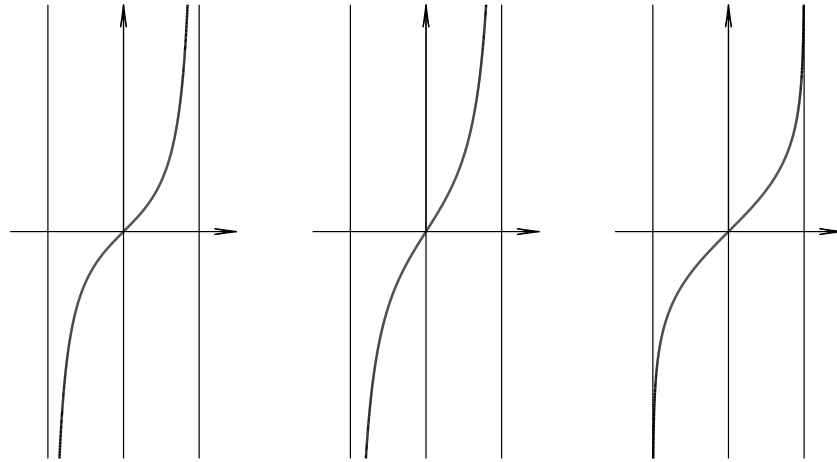
²⁰Gabriel Cramer (1704–1752), швајцарски математичар

Теорија многострукости изучава особине многострукости које се чувају дифеоморфизмима, тако да сматрамо да су дифеоморфне многострукости суштински исте. За многострукости које су хомеоморфне сматрамо да су тополошки исте.

Пример 1.28. Нека је M n -многострукост. Свака карта (U, φ) на M индукује дифеоморфизам $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ из отворене подмногострукости $U \subseteq M$ на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Пресликавања φ и φ^{-1} су глатка јер су такве њихове репрезентације у односу на карте (U, φ) на U и $(\varphi(U), \mathbb{1}_{\varphi(U)})$ на $\varphi(U)$, $\mathbb{1}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1}_{\varphi(U)} = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(U)}$. Обратно, сваки дифеоморфизам $f: U \rightarrow f(U)$ из отвореног подскопа $U \subseteq M$ на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ јесте карта комплетног атласа. Наиме, ако је (V, ψ) карта атласа за M , знамо да су ψ и ψ^{-1} глатка, те су глатке и функције преласка $f \circ \psi^{-1}$ и $\psi \circ f^{-1}$ као композиције по Леми 1.15, одакле следи да је карта (U, f) сагласна са атласом. $\triangle$

Пример 1.29. Ако је f бијективно пресликавање из скупа P на многострукост M , тада постоји јединствен комплетан атлас са којим P постаје многострукост тако да је f дифеоморфизам. У том случају, атлас за P чине карте облика $(f^{-1}(U), \varphi \circ f)$ где су (U, φ) карте на M . $\triangle$

Пример 1.30. Отворена јединична кугла $\mathbf{B}^n = B_1(0)$ у $\mathbb{R}^n$ је дифеоморфна са $\mathbb{R}^n$. У случају димензије $n = 1$ постоји много начина да направимо глатку растућу бијекцију $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, на пример



$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f(x) = \operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

У општем случају, можемо поставити дифеоморфизам $f: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ са

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}},$$

где увек важи $1 - \|x\|^2 \neq 0$ и $1 + \|y\|^2 \neq 0$, тако да су и f и f^{-1} глатка. Пресликавање

$$f(x) = \frac{x}{1-\|x\|^2}$$

је такође дифеоморфизам, али је теже доказати да је f^{-1} глатко, јер немамо експлицитну формулу. Међутим,

$$f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$$

није дифеоморфизам, јер норма $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, за разлику од њеног квадрата $\|\cdot\|^2$, није глатка у општем случају. Конкретно, за $n = 1$ имамо

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-|x|)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x}{(1-|x|)^3|x|},$$

тако да $f''(0)$ не постоји и самим тим f није глатко. $\triangle$

Пример 1.31. Пресликавање $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $f(x, y) = (xe^y + y, xe^y - y)$ је дифеоморфизам. Из $f(x, y) = (xe^y + y, xe^y - y) = (u, v)$ имамо $u - v = 2y$ и $u + v = 2xe^y$, одакле следи

$$f^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{2e^{\frac{u-v}{2}}}, \frac{u-v}{2} \right),$$

те се лако види да је f бијективно, као и да су f и f^{-1} глатка. $\triangle$

Пример 1.32. Пројективна права $\mathbb{RP}^1$ је дифеоморфна кругу $\mathbf{S}^1$. Да бисмо експлицитно добили дифеоморфизам можемо конструисати бијекцију која идентификује стандардни атлас $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ за $\mathbb{RP}^1$ са стандардним стереографским атласом $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ за $\mathbf{S}^1$, при чему је

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(1 : x) \in \mathbb{RP}^1 : x \in \mathbb{R}\}, & \varphi_1(1 : x) &= x, \\ U_2 &= \{(x : 1) \in \mathbb{RP}^1 : x \in \mathbb{R}\}, & \varphi_2(x : 1) &= x, \\ U_+ &= \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 : y \neq -1\}, & \varphi_+(x, y) &= x/(1+y), \\ U_- &= \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 : y \neq 1\}, & \varphi_-(x, y) &= x/(1-y). \end{aligned}$$

За $f: \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$, идентификација φ_1 са φ_+ значи да је $\varphi_+ \circ f \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ идентичко, одакле следи $f|_{U_1} = \varphi_+^{-1} \circ \varphi_1$. Како рачун даје

$$f(x : y) = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

за $x \neq 0$, природно f можемо додефинисати истом формулом за $x = 0$ и добити тражени дифеоморфизам чији је инверз

$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} (1 + y : x) & \text{за } y \neq -1 \\ (x : 1 - y) & \text{за } y \neq 1 \end{cases}.$$

Рачун показује $\varphi_- \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, тако да је f заиста дифеоморфизам. Приметимо да замена $x = \cos t$, $y = \sin t$ доводи до формуле $f(\cos t : \sin t) = (\sin 2t, \cos 2t)$, те тражени дифеоморфизам такође може бити и $[e^{it}] \mapsto e^{2it}$. $\triangle$

Пример 1.33. Класичан пример хомеоморфизма између многострукости које није дифеоморфизам је пресликавање $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $\varphi(x) = x^3$. Оно је глатко и инвертибилно, али инверзно пресликавање није глатко. У Примеру 1.10 направили смо многострукост $\tilde{\mathbb{R}}$ тако што смо на $\mathbb{R}$ одредили глатку структуру користећи карту $(\tilde{\mathbb{R}}, \varphi)$. Та глатка структура је различита од стандардне, али су многострукости $\mathbb{R}$ и $\tilde{\mathbb{R}}$ дифеоморфне. Пресликавање $f: \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $f(x) = x^3$ је дифеоморфизам, јер је његова репрезентација $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ очигледно глатка, као и њен инверз. $\triangle$

Пример 1.34. Нека је M многострукост са комплетним атласом $\mathcal{A}$. Произвољан хомеоморфизам $f: M \rightarrow M$ одређује нов атлас $\mathcal{A}'$ на M са картама $(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \in \mathcal{A}'$ које су добијене од карата $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Тада је f дифеоморфизам ако и само ако је $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Дакле, ако је f хомеоморфизам који није дифеоморфизам, онда f дефинише нов атлас $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$. Међутим, нова глатка структура на M није суштински различита од постојеће. Иако $f: M \rightarrow M$ није дифеоморфизам, оно дефинише дифеоморфизам између M и нове многострукости са атласом $\mathcal{A}'$. Зато, иако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ различити атласи, резултујуће глатке структуре су и даље дифеоморфне. $\triangle$

Пример 1.35. За свако $s > 0$ можемо поставити пресликавање $F_s: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^n$ дефинисано са

$$F_s(x) = \|x\|^s \frac{x}{\|x\|}$$

за $x \neq 0$ и $F_s(0) = 0$. Како $x \in \mathbf{B}^n$ значи $\|x\| < 1$, то следи $\|F_s(x)\| < 1$ и добијамо $F_s(\mathbf{B}^n) \subseteq \mathbf{B}^n$. Лако је проверити да важи $F_s \circ F_t = F_{st}$, те је F_s бијекција са $(F_s)^{-1} = F_{1/s}$, док из $F_{1/s}(\mathbf{B}^n) \subseteq \mathbf{B}^n$ добијамо $F_s(\mathbf{B}^n) = \mathbf{B}^n$. Очигледно је F_s глатко на $\mathbf{B}^n \setminus \{0\}$, те остаје да се провери глаткоћа у тачки $x = 0$. Како $F_s(x) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, то је F_s хомеоморфизам. Како F_s није глатко у 0 за $s < 1$, а $(F_s)^{-1} = F_{1/s}$ није глатко у 0 за $s > 1$, то је F_s дифеоморфизам само за $s = 1$. На овај начин конструисали смо непребројиву фамилију хомеоморфизама на $\mathbf{B}^n$ који нису дифеоморфизми, али њихове рестрикције на $\mathbf{B}^n \setminus \{0\}$ јесу дифеоморфизми.

Нека је $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ атлас за M . За $p \in M$ постоји карта (U, ϕ) комплетног атласа центрирана у p таква да је $\phi(U) = \mathbf{B}^n$. За свако $s > 0$ конструишимо нови атлас $\mathcal{A}_s = \{(V_\alpha \setminus \{p\}, \psi_\alpha|_{V_\alpha \setminus \{p\}}) : \alpha \in \Lambda\} \cup \{(U, F_s \circ \phi)\}$. Како $(F_s \circ \phi) \circ (F_t \circ \phi)^{-1} = F_s \circ F_t^{-1} = F_{s/t}$ није дифеоморфизам за $s \neq t$, то су комплетни атласи одређени са $\mathcal{A}_s$ међусобно различити и има их непребројиво много. Овим смо показали да ако тополошка многострукост димензије $n \geq 1$ има глатку структуру, онда она има непребројиво много различитих глатких структура. $\triangle$

За разлику од хомеоморфизама који нису дифеоморфизми, тешко је наћи две хомеоморфне многострукости које нису дифеоморфне. Испоставља се да за $n \leq 3$ свака тополошка n -многострукост има глатку структуру која је јединствена до на дифеоморфизам (видети Моиз²¹ [89]). Међутим, први пример егзотичне структуре многострукости открио је Милнор²² 1956. године [88], тако што је показао да 7-сфера $\mathbf{S}^7$ има глатке структуре које нису дифеоморфне са стандардном структуром.

Занимљиво је питање да ли дата тополошка многострукост може имати глатке структуре које нису дифеоморфне. Ово питање је прилично компликовано, чак и за еуклидске просторе. Зна се да $\mathbb{R}^n$ за $n \neq 4$ има јединствену глатку структуру, до на дифеоморфизам (видети Сталингс²³ [114]). Међутим, комбинација резултата које су дали Доналдсон²⁴ [46] и Фридман²⁵ [52] водила је до открића нестандартних глатких структура на $\mathbb{R}^4$. Штавише, $\mathbb{R}^4$ има непребројиво много различитих глатких структура, међу којима нема дифеоморфних (видети Таубс²⁶ [116]).

Са друге стране, неке тополошке многострукости уопште не дозвољавају глатку структуру. Први пример овог дубоког резултата је компактна 10-димензиона многострукост коју је 1960. открио Кервер²⁷ [76]. Заправо, примери тополошких n -многострукости које не могу постати глатке су познате за свако $n \geq 4$. Најпознатији пример је такозвана E_8 многострукост, што је тополошка 4-многострукост коју је открио Фридман 1982. године [52].

1.6 Разбијање јединице

Како су многострукости добијене лепљењем отворених скупова из $\mathbb{R}^n$ преко дифеоморфизама, рад по целокупној многострукости може бити незгодан. Теорија разбијања јединице је прилично технички али важан алат који нам омогућава да радимо у локалним координатама. Основна идеја је да функцију константне вредности 1 разбијемо на гомилу глатких делова са којима се даље лакше ради.

Постоји велики број глатких функција на многострукости, али душу разбијања јединице чине цомбасте функције. У питању су глатки еквиваленти карактеристич-

²¹Edwin Evariste Moise (1918–1998), амерички математичар

²²John Willard Milnor (1931), амерички математичар

²³John Robert Stallings Jr. (1935–2008), амерички математичар

²⁴Simon Kirwan Donaldson (1957), енглески математичар

²⁵Michael Hartley Freedman (1951), амерички математичар

²⁶Clifford Henry Taubes (1954), амерички математичар

²⁷Michel André Kervaire (1927–2007), француски математичар

них функција које употребљавамо да камуфлирамо функцију $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Ако помножимо f карактеристичном функцијом скупа $U \subset M$, резултат је нула ван U , али смо изгубили непрекидност функције. Ствари се поправљају увођењем џомбасте функције b која од јединице глатко опада ка нули између унутрашњег скупа V и спољашњег отвореног скупа $U \supset \bar{V}$. Тада за $x \in V$ имамо $b(x) = 1$ одакле следи $(fb)(x) = f(x)$, док за $x \notin U$ имамо $(fb)(x) = 0$. Додатно, производ функција fb је барем онолико глатка колико је то f (осим у случају аналитичких функција).

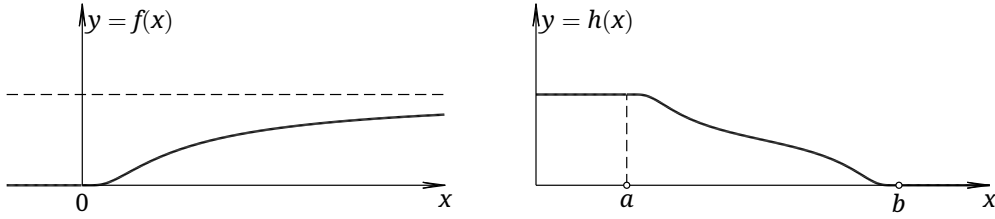
Језгро ове теорије чини глатка реална функција која је једнака нули за све негативне вредности домена, а строго је растућа за позитивне вредности. Чувена неаналитичка глатка функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ из Примера А.7, дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$$

има управо такве особине. За произвољне $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $a < b$ дефинишемо глатку функцију $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$h(x) = \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)}.$$

Како је бар један од израза $b-x$ и $x-a$ позитиван, именилац је позитиван за свако x . Зато је функција h добро дефинисана, при чему важи $h(x) = 1$ за $x \leq a$, $0 < h(x) < 1$ за $a < x < b$ и $h(x) = 0$ за $x \geq b$.



Новодобијена функција h може се даље уопштити на $\mathbb{R}^n$ где користимо отворене кугле $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\}$. За $0 < a < b$ постављамо функцију $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ са $H(x) = h(\|x\|)$. Она је глатка на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ као композиција глатких функција, док је идентички једнака 1 на $B_a(0)$, те је глатка и у $0 \in \mathbb{R}^n$. Овом конструкцијом доказали смо наредну лему.

Лема 1.16. За произвољне $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $0 < a < b$, постоји $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ иако да је $H(x) = 1$ за $x \in \bar{B}_a(0)$, $0 < H(x) < 1$ за $x \in B_b(0) \setminus \bar{B}_a(0)$ и $H(x) = 0$ за $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_b(0)$.

Овај концепт се са еуклидског простора уопштава на многострукости, а у нашој теорији основна је следећа лема.

Лема 1.17. Нека је M многострукост и U околина тачке $p \in M$. Тада постоји околина $V \ni p$ и компактно подржана глатка функција $b: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ иако да је $b|_V = 1$ и $\text{supp}(b) \subset U$.

Доказ. На основу Леме 1.4 постоји карта (W, φ) која је центрирана у $p \in M$ тако да је $W \subseteq U$. Постоји довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да је $B_{3\varepsilon}(0) \subseteq \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$. Нека је $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ за $n = \dim M$ глатка функција из Леме 1.16 са $H(x) = 1$ за $\|x\| \leq \varepsilon$, $0 < H(x) < 1$ за $\varepsilon < \|x\| < 2\varepsilon$ и $H(x) = 0$ за $\|x\| \geq 2\varepsilon$. Нова функција $f = H \circ \varphi: W \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ је глатка и подржана у $\varphi^{-1}(\bar{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset W$, те се по Леми 1.11 може продужити нулом до $b \in \mathcal{F}(M)$. За $V = \varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)) \ni p$ је $b|_V = 1$, а свакако важи $\text{supp}(b) = \varphi^{-1}(\bar{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset W \subseteq U$. $\square$

Функцију $f \in \mathcal{F}(M)$ из Леме 1.17 зовемо **џомбаста функција** (bump function) у p , и она једноставно продужава домен глатке функције на целокупну многострукост M , о чему говори наредна лема.

Лема 1.18. Нека је M мнојострукост и U околина тачке $p \in M$. За $f \in \mathfrak{F}(U)$ још јоји околина $V \ni p$ и $F \in \mathfrak{F}(M)$ тако да је $\text{supp}(F) \subseteq U$ и $F|_V = f|_V$.

Доказ. Примена Леме 1.17 даје околину $V \ni p$ и цомбасту функцију $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржану у U са $b|_V = 1$. Функција $bf \in \mathfrak{F}(U)$ је подржана у затвореном $\text{supp}(b) \subset U \subseteq M$, те се по Леми 1.11 може продужити нулом до $F \in \mathfrak{F}(M)$ за коју важи $\text{supp}(F) \subseteq U$ и $F|_V = (bf)|_V = f|_V$. $\square$

Кад у Леми 1.17, тачку из околине заменимо компактом, добијамо важну последицу.

Лема 1.19. Ако је $K \subseteq U \subseteq M$ за мнојострукост M , компакт K и отворен U , онда још јоји тачка функција $f: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ подржана у U са $f|_K = 1$.

Доказ. По Леми 1.17, за свако $p \in K \subseteq U$ постоји отворен $V_p \ni p$ и глатка функција $f_p: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ подржана у U са $f_p|_{V_p} = 1$. Фамилија $\{V_p\}_{p \in K}$ је отворен покривач компакта K те има коначан потпокривач $\{V_{p_1}, \dots, V_{p_k}\}$. Функција $f: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ дата са $f = 1 - (1 - f_{p_1})(1 - f_{p_2}) \cdots (1 - f_{p_k})$ је очигледно глатка. Како је $f(x) \neq 0$ ако постоји $1 \leq i \leq k$ тако да је $f_{p_i}(x) \neq 0$, то је $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_i \text{supp}(f_{p_i}) \subseteq U$, одакле је f подржана у U . Коначно, $f|_{V_p} = 1$ за $1 \leq i \leq k$, те због $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{p_i}$ важи $f|_K = 1$. $\square$

Разбијање јединице је декомпозиција $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha = 1$ константне функције 1 на суму глатких функција f_α . Уобичајено је да радимо са бесконачним сумама, тако да су ове функције индексирани по неком бесконачном скупу Λ и природно је захтевати да за свако $p \in M$ важи $f_\alpha(p) = 0$ за све осим коначно много $\alpha \in \Lambda$. Сума је тада добро дефинисана као функција на M , а глаткоћу можемо задржати кроз наредну дефиницију.

Разбијање јединице (partition of unity) на многострукости M је фамилија $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ глатких функција $f_\alpha: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, таква да је фамилија носача $\{\text{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ локално коначна и важи $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p) = 1$ за свако $p \in M$. Кажемо да је разбијање јединице **још јоји** (subordinate) неком покривачу од M ако је фамилија свих носача профињење тог покривача.

Из дефиниције следи да за свако $p \in M$ постоји $\alpha \in \Lambda$ за које је $f_\alpha(p) > 0$, те је $\{\text{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ покривач од M . Овај покривач је локално коначан те је (бесконачна) сума $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p)$ добро дефинисана. Ако је $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ покривач од M и $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq U_\alpha$ важи за свако $\alpha \in \Lambda$, тада кажемо да је $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ подређено $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ са истим скупом индекса као и разбијање јединице. Међутим, ако је $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ разбијање јединице подређено покривачу $\{V_\beta\}_{\beta \in \Delta}$, тада је $\{\text{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ профињење од $\{V_\beta\}_{\beta \in \Delta}$ и можемо употребити пресликавање профињења $\phi: \Lambda \rightarrow \Delta$ које задовољава $\text{supp}(f_\alpha) \subseteq V_{\phi(\alpha)}$ за свако $\alpha \in \Lambda$, и добити разбијање јединице $\{\sum_{\alpha \in \phi^{-1}(\beta)} f_\alpha\}_{\beta \in \Delta}$ које је подређено покривачу $\{V_\beta\}_{\beta \in \Delta}$ са истим скупом индекса.

Теорема 1.20. За сваки отворен још јоји покривач мнојострукости још јоји разбијање јединице које му је још јоји подређено.

Доказ. Нека је $\mathcal{U}$ отворен покривач од M . Како је по Леми 1.7 M локално компактан, то постоји отворено профињење $\mathcal{U}'$ од $\mathcal{U}$ које се састоји од релативно компактних скупова. Како је по Леми 1.10 M паракомпактно, то постоји локално коначно отворено профињење $\mathcal{V}$ од $\mathcal{U}'$, самим тим и од $\mathcal{U}$.

Посматрајмо скуп $\mathcal{W} = \{U \subseteq M : U \text{ је отворен и } \bar{U} \subseteq V \text{ за неко } V \in \mathcal{V}\}$. Свако $p \in M$ има околину $V \in \mathcal{V}$, а како је по Леми 1.9 M регуларан, то тачку p и затворен скуп $M \setminus V \not\ni p$ можемо раздвојити отвореним дисјунктним скуповима $P \ni p$ и $Q \supseteq M \setminus V$. Из $P \cap Q = \emptyset$ имамо $P \subseteq M \setminus Q$, те и $\bar{P} \subseteq M \setminus Q$, док из $M \setminus V \subseteq Q$ следи $M \setminus Q \subseteq V$, те важи $\bar{P} \subseteq M \setminus Q \subseteq V$. Одавде је $p \in P \in \mathcal{W}$, што значи да је $\mathcal{W}$ покривач од M , а самим тим и отворено профињење од $\mathcal{V}$.

Нова примена паракомпактности даје локално коначно отворено профињење $\mathcal{W}'$ од $\mathcal{W}$. Сада је $\mathcal{W}' = \{W_\beta\}_{\beta \in \Delta}$ профињење од $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ и за свако $\beta \in \Delta$ постоји $\phi(\beta) \in \Lambda$ тако да је $\overline{W_\beta} \subseteq V_{\phi(\beta)}$, што дефинише пресликавање $\phi: \Delta \rightarrow \Lambda$ и можемо поставити

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} W_\beta,$$

што је по конвенцији празан скуп за евентуално $\phi^{-1}(\alpha) = \emptyset$. Како је $\mathcal{W}'$ локално коначна фамилија, за сваку тачку $p \in M \setminus \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ постоји околина $U \ni p$ која сече само коначно много чланова, рецимо $W_1, \dots, W_k$. За остале W_β је тада $W_\beta \cap U = \emptyset$, одакле следи $W_\beta \subseteq M \setminus U$, те $\overline{W_\beta} \subseteq M \setminus U$ и важи $\overline{W_\beta} \cap U = \emptyset$. Због тога добијамо да је $U \setminus \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta} = U \setminus (\overline{W_1} \cup \dots \cup \overline{W_k})$ околина тачке p , одакле следи да је $M \setminus \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ отворен, односно $\bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta}$ је затворен. Одавде је

$$\overline{X_\alpha} = \overline{\bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} W_\beta} = \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} \overline{W_\beta} \subseteq V_\alpha,$$

те за свако $\alpha \in \Lambda$ постоји компактно $\overline{X_\alpha}$ садржано у отвореном V_α , одакле по Лему 1.19 постоји глатка функција $f_\alpha \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у V_α и једнака 1 на $\overline{X_\alpha}$. Сума $f = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha$ је глатка функција која је свуда коначна и није нула. Коначно, сума нових функција f_α/f је свуда једнака 1. $\square$

Пример 1.36. Урисонова²⁸ лема је позната из топологије и каже да је тополошки простор нормалан ако и само ако се свака два непразна дисјунктна затворена подскупа могу раздвојити непрекидном функцијом у смислу да постоји непрекидна функција која узима вредности 0 на једном од два подскупа и вредности 1 на другом. Нека су A и B два дисјунктна затворена подскупа многострукости M . На основу Теореме 1.20 постоји разбијање јединице $\{\psi_A, \psi_B\}$ подређено отвореном покривачу $\{M \setminus A, M \setminus B\}$. Функција $\psi_A: M \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ је глатка и задовољава $\psi_A|_A = 0$, као и $\psi_A|_B = 1 - \psi_B|_B = 1$, што даје глатку верзију Урисонове леме. Посебно, свака многострукост је нормална. $\triangle$

Пример 1.37. Нека је $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција на произвољном подскупу $A \subseteq M$. Тада за свако $a \in A$ постоји $f_a \in \mathfrak{F}(U_a)$ такво да је $U_a \subseteq M$ околина од a и $f = f_a$ на $U_a \cap A$. По Теорему 1.20 постоји разбијање јединице $\{\psi_a\}_{a \in A}$ подређено отвореном покривачу $\{U_a : a \in A\}$ од $U = \bigcup_{a \in A} U_a \subseteq M$. Како је $f_a \in \mathfrak{F}(U_a)$ и $\text{supp}(\psi_a) \subseteq U_a$ добијамо $\psi_a f_a \in \mathfrak{F}(U)$, што нам омогућава да дефинишемо $F = \sum_{a \in A} \psi_a f_a \in \mathfrak{F}(U)$. За $x \in A$ имамо $F(x) = \sum_{a \in A} \psi_a f_a(x) = \sum_{a \in A} f(x) \psi_a(x) = f(x)$. Зато свако глатко $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ има глатко продужење $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ на отворен скуп $U \supseteq A$.

Ако додатно претпоставимо да је A затворен, тада постоји разбијање јединице $\{\psi_1, \psi_2\}$ подређено отвореном покривачу $\{U, M \setminus A\}$ од M . Како $F \in \mathfrak{F}(U)$ и $\text{supp}(\psi_1) \subseteq U$ добијамо $\psi_1 F \in \mathfrak{F}(M)$, док $\text{supp}(\psi_2) \subseteq M \setminus A$ повлачи $\psi_1|_A = 1 - \psi_2|_A = 1$, те отуда $\psi_1 F = f$ на A . Зато се свака глатка функција на затвореном подскупу од M може продужити до глатке функције на M . $\triangle$

1.7 Задаци

Задатак 1.1. Да ли је глатка сагласност карата на M релација еквиваленције за сваки непразан скуп M ?

²⁸Павел Самуилович Урысон (1898–1924), совјетски математичар

Задатак 1.2. Дат је скуп $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, као и функције $\varphi = 1_{\mathbb{R}}: M \setminus \{\infty\} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi: M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, при чему је $\psi(x) = x$ за $x \neq 0$ и $\psi(\infty) = 0$. Да ли M са атласом $\{\varphi, \psi\}$ чини глатку многострукост?

Задатак 1.3. Дата је тополошка површ $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + r\} \subset \mathbb{R}^3$ са релативном топологијом. За које вредности $r \in \mathbb{R}$ постоји атлас са којим M постаје глатка многострукост?

Задатак 1.4. Одредити (што природнији) атлас тако да скуп свих афиних правих из $\mathbb{R}^2$ постане глатка многострукост.

Задатак 1.5. Испитати да ли је функција $f: \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z^2}$ глатка.

Задатак 1.6. Доказати да је пресликавање $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дато са

$$(x : y : z) \mapsto \frac{yz + xz + xy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

добро дефинисано и глатко.

Задатак 1.7. Доказати да је пресликавање $f: \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ дато са $(t : 1) \mapsto (t + 1 : 1)$ за $t \in \mathbb{R}$ и $(1 : 0) \mapsto (1 : 0)$ глатко.

Задатак 1.8. Доказати да за свако $p \in \mathbf{B}^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ постоји дифеоморфизам $f: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}^n$ такав да је $f(0) = p$.

Задатак 1.9. Дат је скуп $M = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, као и функције $\varphi = 1_{\mathbb{C}}: M \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ и $\psi: M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, при чему је $\psi(z) = 1/z$ за $z \neq 0$ и $\psi(\infty) = 0$. Доказати да M са атласом $\{\varphi, \psi\}$ чини глатку многострукост која је дифеоморфна са $\mathbf{S}^2$.

Задатак 1.10. Испитати да ли је пресликавање $f: \mathbb{FP}^1 \rightarrow \mathbb{FP}^1$ дато са $f(t : 1) = (e^{t^2} : 1)$ за $t \in \mathbb{F}$ и $f(1 : 0) = (1 : 0)$ глатко, где је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

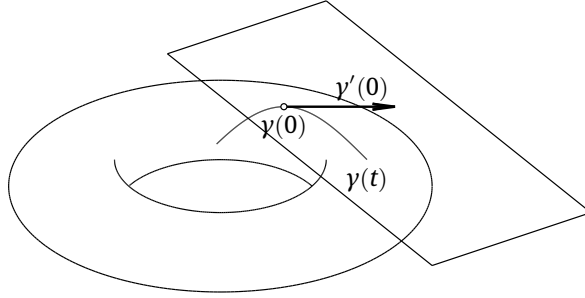
Задатак 1.11. Нека је $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ позитивна непрекидна функција на многострукости M . Доказати да постоји $h \in \mathfrak{F}(M)$ такво да за свако $p \in M$ важи $0 < h(p) < f(p)$.

Задатак 1.12. Нека је M многострукост, $A \subset M$ затворен подскуп, а $f: A \rightarrow (0, \infty)$ глатко. Доказати да постоји глатко $F: M \rightarrow (0, \infty)$ такво да је $F|_A = f$.

ТАНГЕНТНИ ПРОСТОРИ И ПРЕСЛИКАВАЊА

2.1 Тангентни вектори

Најинтуитивнији начин за дефинисање тангентног вектора тиче се кривих на многострукости. Нека је $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ глатка крива на n -многострукости M која пролази кроз тачку $p \in M$, где је $\varepsilon > 0$ мали реалан број. Другим речима, γ је глатко пресликавање за које је $\gamma(0) = p$. Тангентни вектор на многострукости M у тачки p може се видети као извод криве γ у нули. Међутим, ако M није смештено у неком еуклидском простору онда извод $\gamma'(0)$ нема смисла. Стандардна идеја је изабрати карту (U, φ) у $p \in M$ и идентификовати криву γ на M са кривом $\varphi \circ \gamma$ на $\mathbb{R}^n$, тако да тангентни вектор можемо добро дефинисати са $(\varphi \circ \gamma)'(0)$.



Како различите глатке криве на M које пролазе кроз p могу дати исти тангентни вектор, то постоји очигледна релација еквиваленције између њих. Две такве криве γ_1 и γ_2 су еквивалентне ако постоји карта (U, φ) у p за коју важи $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. За произвољну карту (V, ψ) у p је $p \in U \cap V \neq \emptyset$ и имамо глатко $\omega = \psi \circ \varphi^{-1}$, те

$$\begin{aligned} (\psi \circ \gamma_1)'(0) &= (\omega \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = \omega'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0) \\ &= \omega'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\omega \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0), \end{aligned}$$

одакле следи да еквиваленција кривих не зависи од избора карте.

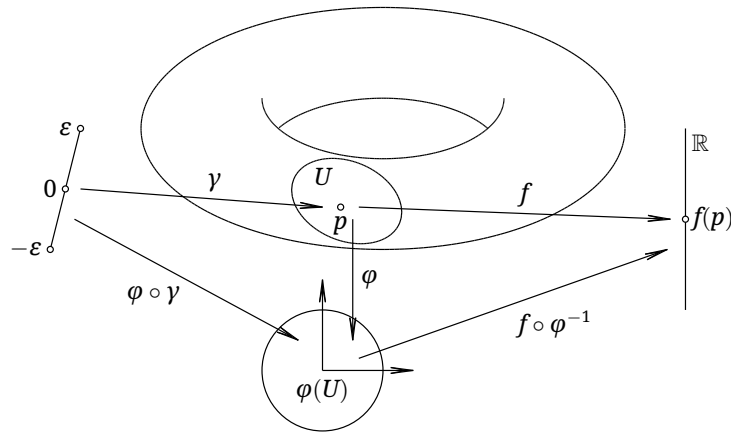
Алтернативно, можемо дефинисати $\gamma'(0): \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$(\gamma'(0))(f) = (f \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$$

и посматрати везу између различитих дефиниција $\Phi: (\varphi \circ \gamma)'(0) \mapsto \gamma'(0)$. За еквивалентне криве γ_1 и γ_2 је

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0),$$

те Φ зависи само од класе еквиваленције криве γ .



Дефиниција тангентног вектора преко кривих јесте веома геометријска, али није одмах уочљиво одакле потиче структура векторског простора. Међутим, како важи $(\alpha f + \beta h) \circ \gamma = \alpha(f \circ \gamma) + \beta(h \circ \gamma)$, то је линеарност евидентно својство функције $\gamma'(0)$. Са друге стране, из $(fh) \circ \gamma = (f \circ \gamma)(h \circ \gamma)$ следи

$$\begin{aligned} (\gamma'(0))(fh) &= ((f \circ \gamma)(h \circ \gamma))'(0) = (f \circ \gamma)'(0) \cdot h(\gamma(0)) + (h \circ \gamma)'(0) \cdot f(\gamma(0)) \\ &= h(p)(\gamma'(0))(f) + f(p)(\gamma'(0))(h), \end{aligned}$$

те $\gamma'(0)$ задовољава Лајбницов¹ закон (правило за извод производа) у тачки p . Дакле, функција $\gamma'(0): \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ има својства карактеристична за извод, $\mathbb{R}$ -линеарност и Лајбницовост у p , те за реалну функцију на $\mathfrak{F}(M)$ са тим особинама кажемо да је **диференцирање у тачки** (*derivation at*) $p \in M$. Особине које поседује $\gamma'(0)$ мотивишу нас да уведемо дефиницију тангентног вектора на следећи начин.

Тангентни вектор на многострукости M у тачки $p \in M$ је свако диференцирање у тачки p . Скуп $T_p M$ свих тангентних вектора на многострукости M у тачки $p \in M$ зовемо **тангентни простор** од M у p . Другим речима, уколико је $X: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ такво да $X \in T_p M$, тада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ важи линеарност $X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h)$ и Лајбницовост $X(fh) = f(p)X(h) + h(p)X(f)$.

Сабирање и множење скаларом уводимо на природан начин, односно тако да за $X, Y \in T_p M$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ и $(\alpha X)(f) = \alpha X(f)$. Овако дефинисани $X + Y$ и αX су такође тангентни вектори, те је $T_p M$ векторски простор над $\mathbb{R}$.

По својој природи многострукости су закривљени простори, и они могу бити веома компликовани за изучавање, док су векторски простори једноставнији и погоднији за рад. Кључна идеја инфинитезималног рачуна је линеарна апроксимација. Тангентни простор $T_p M$ је векторски простор и можемо га схватити као најбољу линеарну апроксимацију многострукости M у тачки $p \in M$, те га често користимо уместо оригиналне многострукости.

Природно, изводи константне функције се поништавају. За $X \in T_p M$ и јединичну функцију $1 \in \mathfrak{F}(M)$, из Лајбницовости је $X(1) = X(1 \cdot 1) = 1(p)X(1) + 1(p)X(1) = 2X(1)$, те важи $X(1) = 0$, док за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$, линеарност даје $X(\alpha 1) = \alpha X(1) = 0$.

Лема 2.1. *Ако је $f \in \mathfrak{F}(M)$ константна функција на многострукости $M \ni p$, тада је $Xf = 0$ за свако $X \in T_p M$.*

Тангентни простор је дефинисан у терминима глатких функција на целокупној многострукости, док су карте у општем случају дефинисане на неким отвореним подскуповима. Међутим, тангентни вектори ипак дејствују локално на $\mathfrak{F}(M)$.

¹Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Лема 2.2. Ако се $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $h \in \mathfrak{F}(M)$ слажу на некој околини $\mathcal{U}$ ачке p мнојсџрукости M , $\mathcal{U}$ ада је $Xf = Xh$ за свако $X \in T_p M$.

Доказ. Нека је $f = h$ на некој околини $U \ni p$. По Леми 1.17 постоји функција $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U таква да је $b(p) = 1$. Како је $(f - h)b = 0$ на целокупном M , то имамо $0 = X((f - h)b) = b(p)X(f - h) + (f - h)(p)X(b) = X(f - h)$, одакле следи $Xf = Xh$. $\square$

Претходна лема је веома важна јер дозвољава појам клице. Функције $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ и $h: V \rightarrow \mathbb{R}$, локално дефинисане на неким околинама фиксиране тачке $p \in M$, су еквивалентне ако постоји неки отворен подскуп $W \subseteq U \cap V$, који садржи p , такав да важи $f|_W = h|_W$. Класу еквиваленције таквих функција зовемо **клица** (*germ*) у p .

Како радимо са глатким функцијама (за разлику од функција класе C^k са $k < \infty$), свака локално дефинисана глатка функција по Леми 1.18 има еквивалентну глатку функцију дефинисану на целој многострукости M . Приметимо да ако су f и h продужења еквивалентних глатких функција, по Леми 2.2 имамо $Xf = Xh$ за свако $X \in T_p M$. Дакле, тангентни вектор $X \in T_p M$ је суштински дефинисан на клицама у p , те користимо ознаку Xf и за функције $f \in \mathfrak{F}(U)$ где је $U \ni p$ отворен подскуп од M , подразумевајући вредност од X у произвољној (самим тим и свакој) функцији из $\mathfrak{F}(M)$ која је еквивалентна са f у p .

Да бисмо дефинисали парцијални извод на многострукости, потребно је да функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ пошаљемо назад у еуклидски простор преко неке карте, а затим узмемо уобичајене парцијалне изводе. Нека је (U, φ) карта на n -многострукости M у тачки $p \in M$ и нека су $x_i = \pi_i \circ \varphi$ за $1 \leq i \leq n$ одговарајуће координатне функције. **Парцијални извод** функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ за $1 \leq i \leq n$ дефинишемо са

$$(\partial_i)_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(p)).$$

Како наша дефиниција проистиче из извода, то одмах добијамо линеарност и Лајбницовост, те је $(\partial_i)_p: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ тангентни вектор од M у p . Штавише, испоставља се да парцијални изводи чине базу тангентног простора $T_p M$.

Полазимо од Адамарове² леме (Лема А.29), по којој ако је $U \ni a$ отворена конвексна околина у $\mathbb{R}^n$, онда за $f \in \mathfrak{F}(U)$ постоје функције $l_i \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leq i \leq n$ тако да за свако $x \in U$ важи

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) l_i(x),$$

при чему је $l_i(a) = (\partial f / \partial \pi_i)(a)$.

Адамарова лема је заправо облик првог реда Тејлорове³ теореме. Наредна итерација развоја доводи нас до облика другог реда,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) \left(l_i(a) + \sum_{j=1}^n (\pi_j(x) - \pi_j(a)) l_{ij}(x) \right) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a) + \sum_{i,j=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) (\pi_j(x) - \pi_j(a)) l_{ij}(x), \end{aligned}$$

где су $l_{ij} \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leq i, j \leq n$.

Нека је (U, φ) карта у $p \in M$ таква да је $\varphi(U)$ конвексно (на пример отворена кугла), и нека је $f \in \mathfrak{F}(U)$. Примена претходне формуле на глатку функцију $f \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{F}(\varphi(U))$

²Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), француски математичар

³Brook Taylor (1685–1731), енглески математичар

и тачке $a = \varphi(p)$ и $x = \varphi(q)$ доноси

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(p)) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(p)) + \sum_{i,j=1}^n (x_i(q) - x_i(p))(x_j(q) - x_j(p)) l_{ij}(\varphi(q)),$$

односно

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p)) (l_{ij} \circ \varphi),$$

где је $l_{ij} \circ \varphi$ глатко за све $1 \leq i, j \leq n$.

То нам омогућава да испитамо вредност Xf за произвољан тангентни вектор $X \in T_p M$. Почетни члан је $f(p)$, што је константа која се поништава по Леми 2.1. Из Лајбницовости следи да X поништава последњу суму јер сваки од три добијена члана има бар један фактор облика $(x_i - x_i(p))(p) = 0$. Преостаје сума у средини, где је

$$Xf = X \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i(p)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f,$$

одакле добијамо

$$X = \sum_{i=1}^n X(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p. \quad (2.1)$$

Из формуле (2.1) следи да парцијални изводи $(\partial_i)_p$ генеришу тангентни простор $T_p M$. Са друге стране, применом парцијалних извода на координатне функције добијамо $(\partial_i)_p(x_j) = \delta_{ij}$. Тада $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\partial_i)_p = 0$ повлачи $\lambda_j = (\lambda_1 (\partial_1)_p + \dots + \lambda_n (\partial_n)_p)(x_j) = 0$ за свако $1 \leq j \leq n$, те су $(\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p$ линеарно независни и стога чине базу тангентног простора. Наредна теорема сумира претходну дискусију и успоставља основну везу између координата и тангентних вектора.

Теорема 2.3. Нека је M n -многообразјем, а (U, φ) карта у $p \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Тада парцијални изводи $(\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p$ чине базу за $T_p M$ и формула (2.1) важи за $X \in T_p M$.

Вратимо се на почетак приче где смо имали глатку криву $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, карту (U, φ) у $p = \gamma(0)$ и везу $\Phi: (\varphi \circ \gamma)'(0) \mapsto \gamma'(0)$ која не зависи од избора еквивалентне криве. Раније смо приметили да је $\gamma'(0)$ диференцирање у p , односно $\gamma'(0) \in T_p M$.

Пресликавање Φ је инјективно јер $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) \neq (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ значи да постоји неко $1 \leq i \leq n$ такво да је $(\pi_i \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) \neq (\pi_i \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0)$, односно $(\gamma_1'(0))(x_i) \neq (\gamma_2'(0))(x_i)$, одакле следи $\gamma_1'(0) \neq \gamma_2'(0)$. Пресликавање Φ је такође и сурјективно јер произвољно $X \in T_p M$ по (2.1) има облик $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\partial_i)_p$ за неке $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. То нам омогућава да за мало $\varepsilon > 0$ конструишемо криву $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ са $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$, за коју важи

$$(\gamma'(0))(f) = (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = X(f).$$

На овај начин показали смо да се $T_p M$ може поистоветити са класама еквиваленције глатких кривих које пролазе кроз тачку p .

2.2 Тангентна пресликавања

Основна идеја диференцијалног рачуна је апроксимација глатких објеката линеарним објектима. Тангентни простор $T_p M$ је линеарна апроксимација многострукости M у тачки $p \in M$. Наредна идеја је апроксимирати глатко пресликавање између многострукости линеарном трансформацијом тангентних простора.

Нека су M и N многострукости, а $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање. За $X \in T_p M$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$ природно можемо поставити линеарно пресликавање $T_p f(X): \mathfrak{F}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ са

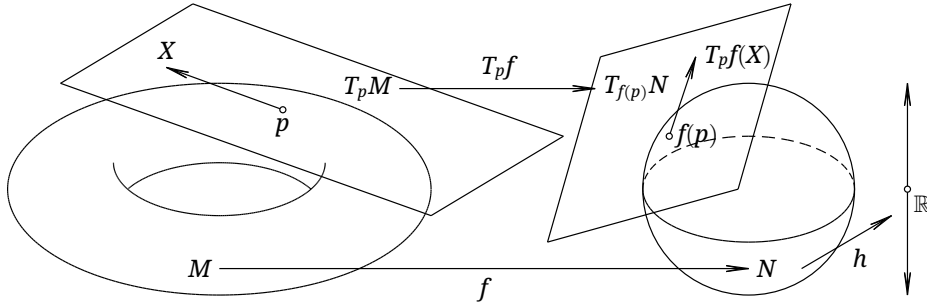
$$(T_p f(X))(h) = X(h \circ f).$$

Штавише, за $h_1, h_2 \in \mathfrak{F}(N)$ је

$$\begin{aligned} T_p f(X)(h_1 h_2) &= X((h_1 h_2) \circ f) = X((h_1 \circ f)(h_2 \circ f)) = (h_1 \circ f)(p)X(h_2 \circ f) + (h_2 \circ f)(p)X(h_1 \circ f) \\ &= h_1(f(p))T_p f(X)(h_2) + h_2(f(p))T_p f(X)(h_1), \end{aligned}$$

одакле следи Лајбницовост у тачки $f(p)$, док је линеарност очигледна. Можемо закључити да је $T_p f(X)$ диференцирање у тачки $f(p) \in N$, односно да важи $T_p f(X) \in T_{f(p)} N$.

Претходни резултат нам омогућава да за глатко $f: M \rightarrow N$ дефинишемо **тангентно пресликавање** од f у тачки $p \in M$ са $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ и $T_p f(X)(h) = X(h \circ f)$, где је $X \in T_p M$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$. Тангентно пресликавање $T_p f$ је линеарно, а вреди напоменути да га неки аутори зову **диференцијал** од f у p , док се користе и ознаке df_p , f'_p и $D_p f$.



Пример 2.1. Тангентно пресликавање идентичког пресликавања $\mathbb{1}_M: M \rightarrow M$ у некој тачки $p \in M$ је идентичко пресликавање $\mathbb{1}_{T_p M}: T_p M \rightarrow T_p M$ јер за $X \in T_p M$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$ важи $((T_p(\mathbb{1}_M))(X))(f) = X(f \circ \mathbb{1}_M) = X(f)$. $\triangle$

Извод сложене функције може се једноставно уопштити за многострукости, односно тангентно пресликавање композиције једнако је композицији тангентних пресликавања.

Лема 2.4. Ако су $f: M \rightarrow N$ и $h: N \rightarrow P$ глатка пресликавања између многострукости, онда за свако $p \in M$ важи $T_p(h \circ f) = T_{f(p)} h \circ T_p f$.

Доказ. Резултат директно следи из праволинијског рачуна за $X \in T_p M$ и $l \in \mathfrak{F}(P)$, где добијемо $T_p(h \circ f)(X)(l) = X(l \circ h \circ f) = T_p f(X)(l \circ h) = (T_{f(p)} h(T_p f(X)))(l)$. $\square$

Као последицу имамо да дифеоморфизам између многострукости индукује изоморфизам између одговарајућих векторских простора.

Лема 2.5. Ако је $f: M \rightarrow N$ дифеоморфизам између многострукости и $p \in M$, онда је $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ изоморфизам између векторских простора и $(T_p f)^{-1} = T_{f(p)}(f^{-1})$.

Доказ. Како су f и f^{-1} глатка, то $\mathbb{1}_{T_p M} = T_p(\mathbb{1}_M) = T_p(f^{-1} \circ f) = T_{f(p)}(f^{-1}) \circ T_p f$ важи по Леми 2.4, а слично добијемо и $\mathbb{1}_{T_{f(p)} N} = T_{f(p)}(\mathbb{1}_N) = T_{f(p)}(f \circ f^{-1}) = T_p f \circ T_{f(p)}(f^{-1})$. $\square$

Директна последица претходне леме је глатка верзија Теореме о инваријантно-сти димензије (Теорема А.5), која каже да m -многострукост и n -многострукост не могу бити дифеоморфне, осим у случају $m = n$. Оригиналу теорему (кад реч дифеоморфне заменимо са хомеоморфне) није тако лако доказати, али сада видимо да нам она није неопходна за нашу теорију глатких многострукости.

Ако је U отворена подмногострукост многострукости M са инклузијом ι , како $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ и $\iota \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ суштински представљају исту криву, очекујемо да је тангентно пресликавање инклузије изоморфизам између одговарајућих тангентних простора.

Лема 2.6. Нека је $U \subseteq M$ отворен подскуп са инклузијом $\iota: U \hookrightarrow M$. За свако $p \in U$, тангентно пресликавање $T_p\iota: T_pU \rightarrow T_pM$ је изоморфизам.

Доказ. Како је $X(F|_U) = X(F \circ \iota) = ((T_p\iota)(X))(F)$ за $X \in T_pU$ и $F \in \mathfrak{F}(M)$, а по Леми 1.18 свако $f \in \mathfrak{F}(U)$ има продужење $F \in \mathfrak{F}(M)$ подржано у U које се слаже са f на некој околини тачке p , то из $T_p\iota(X) = 0$ следи $Xf = 0$, што даје $X = 0$ и доказује да је $T_p\iota$ инјективно. Како је $\dim U = \dim M$ то је $T_p\iota$ бијекција, те самим тим и изоморфизам. $\square$

Пример 2.2. Нека су M и N многострукости, а $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ и $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ канонске пројекције производа $M \times N$. За свако $(p, q) \in M \times N$, можемо дефинисати пресликавање $\pi: T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_pM \times T_qN$ са $\pi(X) = (T_{(p,q)}\pi_M(X), T_{(p,q)}\pi_N(X))$. У супротном смеру, можемо дефинисати пресликавање $\theta: T_pM \times T_qN \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$ са $\theta(Y, Z) = T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z)$ где је $\mu: M \rightarrow M \times N$ дато са $\mu(x) = (x, q)$, а $\nu: N \rightarrow M \times N$ дато са $\nu(x) = (p, x)$. Рачун нам даје

$$\begin{aligned} \pi \circ \theta(Y, Z) &= (T_{(p,q)}\pi_M(T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z)), T_{(p,q)}\pi_N(T_p\mu(Y) + T_q\nu(Z))) \\ &= (T_p(\pi_M \circ \mu)(Y) + T_q(\pi_M \circ \nu)(Z), T_p(\pi_N \circ \mu)(Y) + T_q(\pi_N \circ \nu)(Z)) = (Y, Z), \end{aligned}$$

одакле добијамо да важи $\pi \circ \theta = \mathbb{1}_{T_pM \times T_qN}$, те можемо закључити да је π сурјективно, а како је $\dim(T_{(p,q)}(M \times N)) = \dim(T_pM \times T_qN) = \dim M + \dim N$, то је π изоморфизам векторских простора. $\triangle$

У наредна два примера наводимо неке специјалне случајеве у којима је тангентно пресликавање једнако нули.

Пример 2.3. Ако је $f: M \rightarrow N$ константно пресликавање, онда је за $h \in \mathfrak{F}(N)$ и $h \circ f$ константно, те због Леме 2.1 за свако $p \in M$ и $X \in T_pM$ важи $(T_p f(X))(h) = X(h \circ f) = 0$. Зато за свако $p \in M$ и константно пресликавање f имамо $T_p f = 0$. $\triangle$

Пример 2.4. Претпоставимо да $f \in \mathfrak{F}(M)$ има локални екстремум (минимум или максимум) у тачки $p \in M$, тада за глатку криву $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ за коју је $\gamma(0) = p$ и свако $h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ имамо $(T_p f(\gamma'(0)))(h) = \gamma'(0)(h \circ f) = (h \circ f \circ \gamma)'(0) = h'(f(p))(f \circ \gamma)'(0) = 0$, одакле следи $T_p f = 0$. $\triangle$

Иако до сада тангентни простори и тангентна пресликавања изгледају прилично апстрактно, у локалним координатама ствари постају практичније. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између m -многострукости M и n -многострукости N . Нека је (U, φ) карта у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \varphi$ за $1 \leq j \leq m$, а (V, ψ) карта у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ за $1 \leq i \leq n$. На основу формуле (2.1) за свако $1 \leq j \leq m$ важи

$$T_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \sum_{i=1}^n \left(T_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) (y_i) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j} (p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)}. \quad (2.2)$$

Матрица тангентног пресликавања $T_p f$ у односу на ове координатне базе је

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (y_1 \circ f)}{\partial x_1} (p) & \cdots & \frac{\partial (y_1 \circ f)}{\partial x_m} (p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial (y_n \circ f)}{\partial x_1} (p) & \cdots & \frac{\partial (y_n \circ f)}{\partial x_m} (p) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j} (p) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

и зовемо је **Јакобијева матрица**⁴ (или **Јакобијан матрица**) од f у тачки p у односу на карте φ и ψ .

Како за елементе Јакобијеве матрице важи

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(\pi_i \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_j}(\varphi(p)),$$

видимо да је тангентно пресликавање заправо извод координатне репрезентације у одговарајућој тачки, $T_p f = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$, као и да је $T_p f = f'(p)$ у случају да је f пресликавање између отворених подскупова еуклидских простора.

Посебно уколико је $f = 1_M: M \rightarrow M$ добијамо формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p, \quad (2.3)$$

која показује како се променом карте мењају координате, док је Јакобијева матрица у овом случају заправо Јакобијева матрица функције преласка $\psi \circ \varphi^{-1}$ у тачки $\varphi(p)$.

Пример 2.5. Функција преласка између поларних и стандардних координата у одговарајућим отвореним подскуповима равни је дата са $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Нека је $p \in \mathbb{R}^2$ дато поларним координатама $(r, \theta) = (3, \pi/2)$ и нека је $X \in T_p \mathbb{R}^2$ тангентни вектор чија је поларна репрезентација $X = 2(\partial/\partial r)_p - (\partial/\partial \theta)_p$. Конкретним рачуном по формули (2.3) имамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p &= \frac{\partial x}{\partial r}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial y}{\partial r}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p &= \frac{\partial x}{\partial \theta}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial y}{\partial \theta}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = -3 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + 3 \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p = -3 \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \end{aligned}$$

одакле добијамо $X = 2(\partial/\partial r)_p - (\partial/\partial \theta)_p = 3(\partial/\partial x)_p + 2(\partial/\partial y)_p$. $\triangle$

Пример 2.6. Важно је приметити да координатни вектор $(\partial_i)_p$ тангентног простора $T_p M$ не зависи само од конкретне координатне функције x_i , већ од целокупног координатног система, јер се извод добија диференцирањем у односу на x_i али док су преостале координате фиксирани. Нека (x, y) означава стандардне координате у $\mathbb{R}^2$, док су нове координате $(\bar{x}, \bar{y})$ дате са $\bar{x} = x$ и $\bar{y} = y + x$. Тада је

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)_p \neq \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)_p,$$

што се разликује у свакој тачки $p \in \mathbb{R}^2$. $\triangle$

2.3 Субмерзије и имерзије

Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости. Како тангентно пресликавање $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ представља најбољу линеарну апроксимацију од f у тачки $p \in M$, то изучавањем алгебарских особина пресликавања $T_p f$ можемо доста тога закључити о самом f . Најважнија карактеристика тангентног пресликавања (као линеарног пресликавања) је његов ранг, јер он не зависи од избора базе. **Ранг пресликавања** f у тачки $p \in M$ је ранг тангентног пресликавања,

$$\text{rang}_p f = \text{rang } T_p f = \dim \text{Im}(T_p f).$$

⁴Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар

Ако ранг пресликавања не зависи од избора тачке $p \in M$, кажемо да је f **константној ранга**, а ранг обележавамо са $\text{rang} f$.

Ранг линеарног пресликавања има природна горња ограничења јер никад није већи од димензија како домена ($\text{rang}_p f \leq \dim M$), тако и кодомена ($\text{rang}_p f \leq \dim N$). Уколико се достигне горња граница за $\text{rang}_p f$ кажемо да је f **уној ранга у p** , а ако је додатно константног ранга кажемо да је f **уној ранга**. Најважнија пресликавања која изучавамо су константног ранга, а међу њима она која су пуног ранга.

У случају да је $\text{rang} f = \dim M$, односно да је за свако $p \in M$ пресликавање $T_p f$ инјективно кажемо да је f **имерзија** (*immersion*) или **пошвајање** и тада се f локално понаша као инјективно пресликавање. У случају да је $\text{rang} f = \dim N$, односно да је за свако $p \in M$ пресликавање $T_p f$ сурјективно кажемо да је f **субмерзија** (*submersion*) и тада се f локално понаша као сурјективно пресликавање. Напоменимо да уколико је неко пресликавање имерзија или субмерзија, у складу са нашом дефиницијом увек подразумевамо да је оно глатко.

Прототип имерзије је инклузија $\iota: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ еуклидског простора у еуклидски простор веће димензије ($m \leq n$) дата са $\iota(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Прототип субмерзије је пројекција $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ еуклидског простора на еуклидски простор мање димензије ($m \geq n$) дата са $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$. Штавише, испоставља се (Теорема 2.10) да је свака имерзија локално инклузија, док је свака субмерзија локално пројекција.

Пример 2.7. Свака регуларна крива γ на многострукости је имерзија јер се њен извод никад не анулира што даје $\text{rang} \gamma = 1$. Посебно, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ дата са $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ је имерзија, али иако $T_t \gamma$ јесте инјективно за свако $t \in \mathbb{R}$, γ није инјективно. $\triangle$

Лема 2.7. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости и нека је $p \in M$. Ако је $T_p f$ инјективно онда p има околину U такву да је $f|_U$ имерзија. Ако је $T_p f$ сурјективно онда p има околину U такву да је $f|_U$ субмерзија.

Доказ. Нека је $\dim M = m$ и $\dim N = n$. Ако изаберемо карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$, свака од хипотеза значи да је Јакобијева матрица од f у односу на φ и ψ пуног ранга у p . Посматрајмо непрекидно пресликавање $T: U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ дато са $T(p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$. Како матрице пуног ранга по Примеру 1.13 чине отворен подскуп од $\mathbb{R}^{n \times m}$, то њихова инверзна слика при T даје околину од p где је Јакобијева матрица од f пуног ранга. $\square$

Теорема о инверзној функцији из реалне анализе (Теорема А.30) даје довољан услов да глатка функција буде инвертибилна на околини неке тачке из њеног домена. **Теорема о инверзној функцији** може се уопштити у терминима глатких пресликавања између многострукости.

Теорема 2.8. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости. Ако је $T_p f$ инвертибилно за неку тачку $p \in M$, тада постоји околина $U \subseteq M$ од p таква да је $f|_U: U \rightarrow f(U)$ дифеоморфизам.

Доказ. Како је $T_p f$ бијекција, то је $\dim M = \dim N = n$. Изаберимо карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$ тако да је $f(U) \subseteq V$, а $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Како су φ и ψ дифеоморфизми, то је $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) = T_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = T_{f(p)}\psi \circ T_p f \circ T_{\varphi(p)}\varphi^{-1}$ инвертибилно. Теорема А.30 гарантује околину $W \subseteq \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ од $\varphi(p)$ такву да је рестрикција $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_W$ дифеоморфизам на своју слику, те је рестрикција од f на $\varphi^{-1}(W)$ дифеоморфизам на своју слику као композиција дифеоморфизама. $\square$

Пресликавање $f: M \rightarrow N$ између многострукости је **локални дифеоморфизам** ако свака тачка $p \in M$ има околину U такву да је $f(U)$ отворен у N , а $f|_U: U \rightarrow f(U)$ дифеоморфизам. Кључне особине локалних дифеоморфизама виде се у наредној теорему.

Теорема 2.9. Глатко пресликавање $f: M \rightarrow N$ је локални дифеоморфизам ако и само ако је и имерзија и субмерзија.

Доказ. Ако је f локални дифеоморфизам то за свако $p \in M$ имамо околинду $U \ni p$ такву да је $f|_U: U \rightarrow f(U)$ дифеоморфизам, $T_p(f|_U): T_pU \rightarrow T_{f(p)}f(U)$ је изоморфизам по Леми 2.5, али је то и $T_pf: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ по Леми 2.6, што доказује да је f и имерзија и субмерзија. Обратно, уколико је f имерзија и субмерзија то је T_pf изоморфизам за свако $p \in M$, те Теорема 2.8 даје околинду тачке p на којој је рестрикција од f дифеоморфизам на своју слику. $\square$

Уколико знамо да су многострукости M и N истих димензија, довољно је да имамо услов имерзије или субмерзије за f , јер је онда други услов директно испуњен и f је локални дифеоморфизам по Теорему 2.9.

Пример 2.8. Пресликавање $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ дато са $\psi(t) = (\cos t, \sin t)$ има координатне репрезентације (у односу на пројекције хемисфера) дате са $t \mapsto \cos t$ за тачке у којима је $\sin t \neq 0$ и $t \mapsto \sin t$ за тачке у којима је $\cos t \neq 0$, те је ψ локални дифеоморфизам. За произвољно $a \in \mathbb{R}$ рестрикција $\psi|_{(a, a+2\pi)}: (a, a+2\pi) \rightarrow \mathbf{S}^1 \setminus \{\psi(a)\}$ је хомеоморфизам, а самим тим и дифеоморфизам. **Угаона функција** на $U \subset \mathbf{S}^1$ је рестрикција инверза тог дифеоморфизма $\theta \in \mathfrak{F}(U)$, те је (U, θ) по Примеру 1.28 карта круга $\mathbf{S}^1$ са стандардном глатком структуром. Уколико идентификујемо $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, тада за угаону функцију важи $e^{i\theta(z)} = z$ за свако $z \in U$. Сада је лако видети да је пресликавање $f: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ дато са $f(z) = z^2$ глатко, јер у новим картама има репрезентацију дату са $t \mapsto 2t + 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. $\triangle$

Пример 2.9. Нека је $f: \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са $f((x, y), r) = (e^r x, e^r y)$. Ако искористимо угаону функцију θ из Примера 2.8 као карту круга $\mathbf{S}^1$ то добијамо координатну репрезентацију $f \circ (\theta \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}})^{-1}(t, r) = (e^r \cos t, e^r \sin t)$. Зато је f глатко са Јакобијевом матрицом

$$T_{(t,r)}(f \circ (\theta \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}})^{-1}) = \begin{pmatrix} -e^r \sin t & e^r \cos t \\ e^r \cos t & e^r \sin t \end{pmatrix},$$

чија је детерминанта $-e^{2r} \neq 0$, што даје $\text{rang} f = 2$, те је f субмерзија и локални дифеоморфизам. $\triangle$

Пример 2.10. Нека је $\pi: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ канонско количничко пресликавање које шаље x у његову класу еквиваленције $[x] = \{x, -x\}$, односно $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1 : \dots : x_{n+1})$. Ако искористимо стандардне карте ϕ_i на $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ и њима одговарајуће карте на $\mathbf{S}^n$ које су пројекције хемисфера на равни $x_i = 0$, добијамо координатне репрезентације које су до на знак једнаке дифеоморфизму између $\mathbf{B}^n$ и $\mathbb{R}^n$ из Примера 1.30, те је π локални дифеоморфизам, али није дифеоморфизам јер није бијекција. Локални дифеоморфизам је непрекидно пресликавање, те како је $\mathbf{S}^n$ компактан, онда је то и $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$. $\triangle$

У случају да је глатко пресликавање константног ранга оно се може локално записати у једноставној канонској форми променом координата, што видимо у **теорему о константном рангу**.

Теорема 2.10. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање константног ранга $r = \text{rang} f$ између многострукости M и N . За свако $p \in M$ постоји карта (U, ϕ) центрирана у $p \in M$ и карта (V, ψ) центрирана у $f(p) \in N$ тако да је $f(U) \subseteq V$ и у којима f има координатну репрезентацију облика $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Доказ. За свако $p \in M$ постоји карта (U_1, ϕ_1) центрирана у $p \in M$ и карта (V_1, ψ_1) центрирана у $f(p) \in N$ тако да је $f(U_1) \subseteq V_1$ и $\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ глатко. Јакобијева матрица од

f у тачки p има компоненте облика

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(\pi_i \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})}{\partial \pi_j}(0)$$

за $1 \leq i \leq n = \dim N$, $1 \leq j \leq m = \dim M$. Како је $\text{rang}_p f = r$, то можемо испермутовати одговарајуће координате, односно врсте и колоне Јакобијеве матрице тако да у горњем левом ћошку добијемо инвертибилну квадратну подматрицу реда r . Формално, пермутовање координата је дифеоморфизам који нас по Леми 1.4 доводи до нових карата (U_1, φ_2) и (V_1, ψ_2) , у односу на које f има координатну репрезентацију

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : (a_1, \dots, a_m) \mapsto (b_1, \dots, b_n),$$

где је $b_i = b_i(a_1, \dots, a_m) = \pi_i \circ \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(a_1, \dots, a_m)$ за $1 \leq i \leq n$, при чему је подматрица Јакобијеве матрице од f у p коју чине компоненте $(\partial b_i / \partial a_j)(0)$ за $1 \leq i, j \leq r$, инвертибилна. Посматрајмо функцију $\theta_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ дефинисану са

$$\theta_1(a_1, \dots, a_m) = (b_1(a_1, \dots, a_m), \dots, b_r(a_1, \dots, a_m), a_{r+1}, \dots, a_m),$$

чија Јакобијева матрица у тачки $0 \in \mathbb{R}^m$ је блок горња троугаона матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial a_1}(0) & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial a_r}(0) & \frac{\partial b_1}{\partial a_{r+1}}(0) & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial a_m}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_r}{\partial a_1}(0) & \dots & \frac{\partial b_r}{\partial a_r}(0) & \frac{\partial b_r}{\partial a_{r+1}}(0) & \dots & \frac{\partial b_r}{\partial a_m}(0) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Како на дијагонали имамо раније описану квадратну подматрицу ранга r , као и јединичну подматрицу реда $m - r$, то је $\text{rang}_0 \theta_1 = m$, те по Теорему А.30 имамо дифеоморфизам на некој околини $W_1 \ni 0$. У питању је легитимна промена координата која нас по Леми 1.4 доводи до нове карте (U_3, φ_3) у $p \in M$, где је $U_3 = U_1 \cap \varphi_2^{-1}(W_1)$ и $\varphi_3 = \theta_1 \circ \varphi_2|_{U_3}$, а која је такође центрирана у p због $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(0) = 0$. Нова координатна репрезентација за f је облика

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_3^{-1} : (b_1, \dots, b_r, a_{r+1}, \dots, a_m) \mapsto (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n),$$

те је Јакобијева матрица од f у односу на нове карте блок доња троугаона матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial b_{r+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial b_r} & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial a_{r+1}} & \dots & \frac{\partial b_{r+1}}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial b_r} & \frac{\partial b_n}{\partial a_{r+1}} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial a_m} \end{pmatrix}.$$

Како на дијагонали имамо најпре јединичну подматрицу реда $r = \text{rang} f$, то преостаје нула подматрица, што значи да $b_{r+1}, \dots, b_n$ не зависе од $a_{r+1}, \dots, a_m$, већ само од $b_1, \dots, b_r$. То нам омогућава да уведемо нове промене координата $\theta_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ са

$$\theta_2(b_1, \dots, b_r, c_{r+1}, \dots, c_n) = (b_1, \dots, b_r, c_{r+1} - b_{r+1}(b_1, \dots, b_r), \dots, c_n - b_n(b_1, \dots, b_r)),$$

на некој околини $W_2 \ni 0$ јер је одговарајућа Јакобијева матрица блок доња троугаона матрица са јединичним матрицама на дијагонали. Тако долазимо до нове карте (V, ψ) која је центрирана у $f(p) \in N$, где је $V = V_1 \cap \psi_2^{-1}(W_2)$ и $\psi = \theta_2 \circ \psi_2|_V$, те за додатно $U = U_3 \cap f^{-1}(V)$ и $\varphi = \varphi_3|_U$ добијамо тражену координатну репрезентацију

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_m) \mapsto (b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0),$$

што завршава доказ. $\square$

Пример 2.11. Теорема о константном рангу често се примењује на имерзије и субмерзије. На пример, она показује да свака субмерзија локално изгледа као пројекција у односу на погодно изабране карте. Како је пројекција отворено пресликавање, док су карте дифеоморфизми, закључујемо да је свака субмерзија отворено пресликавање. $\triangle$

Пример 2.12. Да ли постоји субмерзија $f: \mathbf{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$? Домен $M = \mathbf{S}^m$ је компактан, те за глатко $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ посматрамо $\pi_1 \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}$, где је π_1 пројекција на прву компоненту, што достиже максимум на M у некој тачки $p \in M$. По Примеру 2.4 важи $0 = T_p(\pi_1 \circ f) = T_{f(p)}\pi_1 \circ T_p f$, али $T_{f(p)}\pi_1$ је сурјективно, одакле $T_p f$ није сурјективно, а самим тим f не може бити субмерзија.

Штавише, свако непрекидно пресликавање са компактним доменом је затворено (Лема А.2), док је субмерзија по Примеру 2.11 отворено пресликавање. Ако је $f: \mathbf{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ субмерзија, онда је слика од $\mathbf{S}^m$ непразан отворен и затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, одакле следи $f(\mathbf{S}^m) = \mathbb{R}^n$, а како он није компактан то субмерзија f не постоји. $\triangle$

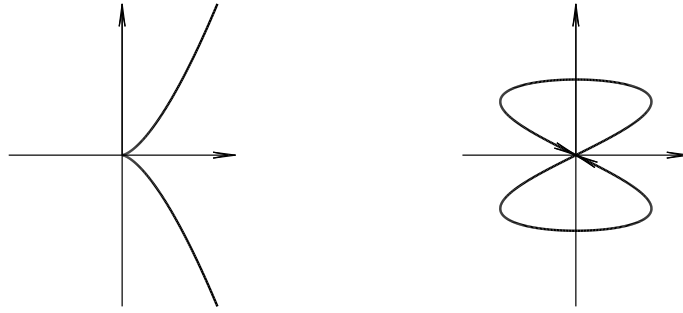
Тополошко смештање је хомеоморфизам на његову слику. Експлицитније речено, у питању је пресликавање $f: M \rightarrow N$ које даје хомеоморфизам између тополошких простора M и $f(M)$, где $f(M) \subseteq N$ носи релативну топологију наслеђену из N . Као последица, свако тополошко смештање је инјективно и непрекидно.

Смештање (*embedding*) или **улајање** је имерзија која је такође тополошко смештање. Другим речима, смештање је инјективна (глатка) имерзија чији домен је дифеоморфан њеној слици. Овај посебан случај имерзије је прилично важан и омогућава нам да уведемо појам подмногострукости.

Пример 2.13. По теорему о константном рангу свака имерзија $f: M \rightarrow N$ има координатну репрезентацију у форми инклузије $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Зато за свако $p \in M$ постоји околина $U \subseteq M$ од p таква да је $f|_U$ смештање, што значи да свака имерзија јесте локално смештање. $\triangle$

Пример 2.14. Нека је $f: M \rightarrow N$ инјективна имерзија. Одговор на питање да ли је f смештање своди се на проверу да ли је $f^{-1}: f(M) \rightarrow M$ непрекидно. Уз додатни услов да је f отворено или затворено пресликавање, то је очигледно испуњено. Уколико је M компактно, f је затворено (Лема А.2), те је смештање. Уколико је $\dim M = \dim N$ онда је f локални дифеоморфизам (Теорема 2.9), те је f отворено и самим тим смештање. $\triangle$

Пример 2.15. Глатко пресликавање $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ је тополошко смештање. Међутим, иако јесте инјективно, оно није имерзија због $\gamma'(0) = 0$, односно $\text{rang}_0 \gamma = 0$. $\triangle$



Пример 2.16. Посматрајмо пресликавање $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$. Како за свако $t \in (-\pi, \pi)$ имамо $\gamma'(t) \neq 0$, пресликавање γ је инјективна имерзија. Међутим, његова слика $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4y^2(1 - y^2)\}$ је компактан скуп у $\mathbb{R}^2$, али како домен није компактан то γ није тополошко смештање, а самим тим није ни смештање. $\triangle$

Пример 2.17. Нека је $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ намотавање торуса дато са

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i c t}) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 2\pi c t, \sin 2\pi c t),$$

за неки ирационалан $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Како се $\gamma'(t)$ никад не поништава, γ је имерзија. Такође је и инјективно јер $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ повлачи и $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$ и $c(t_1 - t_2) \in \mathbb{Z}$, те добијамо $t_1 = t_2$. На основу Дирихлеове⁵ теореме о апроксимацији (Лема А.33), за свако $\varepsilon > 0$ постоје цели бројеви $m, n \in \mathbb{Z}$ такви да је $|cn - m| < \varepsilon$. Како је дужина дужи краћа од кружног лука имамо

$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = |(e^{2\pi i n}, e^{2\pi i cn}) - (1, 1)| = |e^{2\pi i cn} - e^{2\pi i m}| \leq 2\pi |cn - m| < 2\pi \varepsilon,$$

те је $\gamma(0)$ тачка нагомилавања од $\gamma(\mathbb{Z})$. Међутим, $\mathbb{Z}$ нема тачака нагомилавања у $\mathbb{R}$ што доказује да γ није хомеоморфизам на своју слику $\gamma(\mathbb{R})$, те γ није смештање.

Други аргумент је да $\gamma(\mathbb{R})$ није локално путно повезан јер у кугли имамо пребројиво много паралелних правих које је сенчају, од којих је свака за себе (локална) компонента путне повезаности.

Трећи аргумент је да слика смештања не може бити густа, док није тешко показати да је слика $\gamma(\mathbb{R})$ густа у $\mathbf{T}^2$. Нека је $f: M \rightarrow N$ смештање које није субмерзија. Теорема о константном рангу даје карту (V, ψ) на N , где је $P = V \cap f(M) \neq \emptyset$ такво да важи $\psi(P) \subseteq \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Међутим, онда отворен скуп $\psi^{-1}(\psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\})))$ лежи у V и не сече P , те $f(M)$ није густ у N . $\triangle$

2.4 Подмногострукости

Многе познате многострукости природно се јављају као подскупови других многострукости. Грубо говорећи, подмногострукост неке многострукости M је подскуп $P \subseteq M$ који има сопствену структуру многострукости. Та структура стиче се из M преко одговарајуће инклузије која има неке лепе особине. **Подмноіосірукосі** од многострукости M је подскуп $P \subseteq M$ који је многострукост таква да је одговарајућа инклузија $\iota: P \hookrightarrow M$ смештање. Дакле, подмногострукост има релативну топологију наслеђену из многострукости која је садржи и глатку структуру у односу на коју је инклузија смештање.

Ако је P подмногострукост од M , тада је M **амбијентна мноіосірукосі** за P , док је разлика димензија $\dim M - \dim P$ **кодимензија** од P у M . Подмногострукост

⁵Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

кодимензије 1 зовемо **хиперповерхи**. Напоменимо да за овако дефинисане подмногострукости неки аутори користе изразе **смештена подмногострукост** и **регуларна подмногострукост**. У релаксиранијој варијанти када је одговарајућа инклузија $\iota: P \hookrightarrow M$ имерзија (не нужно смештање), кажемо да је P **поштойљена подмногострукост**.

Пример 2.18. У Примеру 1.20 смо показали да је инклузија $\iota: \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ глатка. Овог пута згодније је користити обичне пројекције из Примера 1.14, где је координатна репрезентација инклузије дата са

$$\iota \circ \varphi_{\pm i}^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}, y_i, \dots, y_n),$$

те Јакобијева матрица садржи $n \times n$ идентичку подматрицу, одакле је $T_p \iota$ инјективно за свако $p \in \mathbf{S}^n$. Дакле, ι је инјективна имерзија, док је $\mathbf{S}^n$ компактан (затворен и ограничен у $\mathbb{R}^{n+1}$), те је ι смештање по Примеру 2.14, одакле следи да је $\mathbf{S}^n$ подмногострукост од $\mathbb{R}^{n+1}$. $\triangle$

Пример 2.19. Подмногострукости кодимензије 0 многострукости M су тачно отворене подмногострукости од M . Ако је $U \subseteq M$ отворена подмногострукост са инклузијом $\iota: U \hookrightarrow M$, тада је очигледно да је ι смештање (U има релативну топологију, док је одговарајућа координатна репрезентација од ι идентичка), као и да је кодимензија 0, односно $\dim U = \dim M$. Обратно, ако је $\iota: U \hookrightarrow M$ смештање са кодимензијом 0, оно је имерзија, али и субмерзија, те по Теорему 2.9 оно је локални дифеоморфизам, из чега следи да је U отворен подскуп од M . $\triangle$

Подмногострукости често налазимо у кодомену неког смештања, о чему говори наредна теорема.

Теорема 2.11. Ако је $f: M \rightarrow N$ смештање између мноґострукости, тада $P = f(M)$ има јединствен комплетан атлас са којим постоје подмногострукост од N иако да је f дифеоморфизам између M и P .

Доказ. Како је f смештање, оно је хомеоморфизам између M и P . Свакој карти (U, φ) на M додељујемо карту $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ на P , што одређује јединствен комплетан атлас такав да је f одговарајући дифеоморфизам (Пример 1.29). Инклузија $P \hookrightarrow N$ је композиција $f \circ f^{-1}$ дифеоморфизма $f^{-1}: P \rightarrow M$ и смештања $f: M \rightarrow N$, те је смештање, што значи да је P подмногострукост од N . $\square$

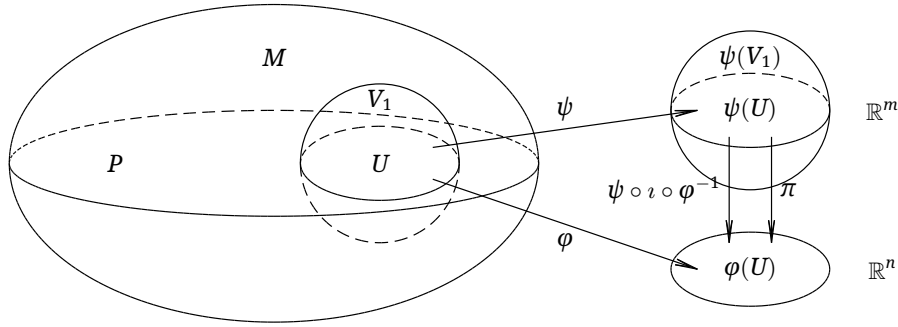
Пример 2.20. За неко фиксирано $p \in N$, пресликавање $f: M \rightarrow M \times N$ дато са $f(x) = (x, p)$ је смештање, те је **кришка** $M \times \{p\}$ подмногострукост од $M \times N$ која је дифеоморфна са M . $\triangle$

Пример 2.21. Нека су M и N многострукости, а $f: U \rightarrow N$ глатко за отворен $U \subseteq M$. Тада је график $\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N : x \in U, y = f(x)\}$ подмногострукост од $M \times N$. Пресликавање $\gamma: U \rightarrow M \times N$ дато са $\gamma(x) = (x, f(x))$ је глатко и важи $\gamma(U) = \Gamma(f)$. Из $\pi_M \circ \gamma = \mathbb{1}_U$ следи $T_{\gamma(x)} \pi_M \circ T_x \gamma = \mathbb{1}_{T_x M}$ за свако $x \in U$, те је $T_x \gamma$ инјективно, а γ имерзија. Инверз од $\gamma: U \rightarrow \Gamma(f)$ је непрекидно $\pi_M|_{\Gamma(f)}$, те је γ хомеоморфизам, одакле је $\Gamma(f)$ подмногострукост од $M \times N$ дифеоморфна са U . $\triangle$

Испоставља се да су све подмногострукости заправо кришке, што нас доводи до наредне теореме која представља алтернативну (и заправо најчешћу) дефиницију подмногострукости.

Теорема 2.12. Ако је P подмногострукост димензије n од мноґострукости M , онда за сваку тачку $p \in P$ постоји карта (V, ψ) у $p \in M$ иако да је $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

Доказ. Ако је $P \subseteq M$ подмногострукост димензије n , то је инклузија $\iota: P \hookrightarrow M$ смештање. Како је ι имерзија, по теорему о константном рангу (Теорема 2.10) за произвољно $p \in P$ постоје карте, (U, φ) центрирана у $p \in P$ и (V, ψ) центрирана у $p \in M$, тако да је $U = \iota(U) \subseteq V$ и $\psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Како је ι тополошко смештање, а $U \subseteq P$ отворен, постоји отворен $W \subseteq M$ такав да је $U = W \cap P$. Ако са $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ обележимо пројекцију на првих n координата, имамо $\varphi(U) = \pi \circ \psi(U)$, те је $C = \psi^{-1}((\mathbb{R}^n \setminus \varphi(U)) \times \{0\}) \subseteq V$ затворен дисјунктан са U . Ако ψ рестрикујемо на отворен $V_1 = V \cap W \setminus C$, добијамо $\psi(V_1 \cap P) = \psi(U \setminus C) = \psi(U) = \psi(V_1) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, те је $(V_1, \psi|_{V_1})$ карта у $p \in M$ која задовољава тражени услов. $\square$



Карте (V, ψ) на M за које важи $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ су **кришка карте** адаптиране за подкуп $P \subseteq M$ и оне природно индукују n -димензионе карте $(V \cap P, \psi_P)$ на P са $\psi_P = \pi \circ \psi$, где је $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ пројекција на првих n координата. Ако је (U, φ) друга кришка карта на M и $\varphi_P = \pi \circ \varphi$, имамо $\varphi_P \circ \psi_P^{-1} = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ j$, где је $j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$, што је глатко као композиција глатких пресликавања. Уколико у свакој тачки $p \in P$ постоји кришка карта, онда индуковане карте чине глатак атлас за P , а јасно је да преко њега P добија релативну топологију од M . Координатна репрезентација инклузије $\iota: P \hookrightarrow M$ је $\psi \circ \iota \circ \psi_P^{-1} = j$ што је глатко, док Јакобијева матрица садржи $n \times n$ идентичку подматрицу, те је ι имерзија, а последично и смештање.

Дакле, кришка карте на P индукују природан атлас са којим P постаје подмногострукост од M . Међутим, испоставља се да је комплетан атлас подмногострукости једнозначно одређен.

Теорема 2.13. Нека је M мноґострукост, $P \subseteq M$ и $n \in \mathbb{N}$. Ако за свако $p \in P$ постоји карта (V, ψ) у $p \in M$ таква да је $\psi(V \cap P) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, онда постоји јединствен комплетан атлас за P са којим постоје подмногострукост од M димензије n .

Доказ. Нека је $\tilde{P}$ подмногострукост од M која се састоји од скупа P и неког другог атласа тако да је инклузија $\tilde{\iota}: \tilde{P} \hookrightarrow M$ смештање. Та инклузија приликом рестрикције кодомена на $P = \tilde{\iota}(\tilde{P})$ постаје $\tilde{\iota}_1: \tilde{P} \hookrightarrow P$, где је $\iota \circ \tilde{\iota}_1 = \tilde{\iota}$. Како је $\tilde{\iota}_1$ непрекидно (хомеоморфизам јер је $\tilde{\iota}$ смештање), а $\psi_P \circ \tilde{\iota}_1 \circ \varphi^{-1} = \pi \circ (\psi \circ \tilde{\iota} \circ \varphi^{-1})$ глатко за карту (U, φ) на $\tilde{P}$ и кришка карту (V, ψ) на M која индукује карту $(V \cap P, \psi_P)$ на P , то је $\tilde{\iota}_1$ глатко по Лему 1.13. Како за $p \in P$ важи $T_p \tilde{\iota} = T_p \iota \circ T_p \tilde{\iota}_1$, а $T_p \iota$ и $T_p \tilde{\iota}$ су инјективна, онда је такво и $T_p \tilde{\iota}_1$, што значи да је $\tilde{\iota}_1$ имерзија. Међутим због $\dim \tilde{P} = \dim P$ оно је локални дифеоморфизам, а како је бијекција, онда је и дифеоморфизам, што значи да $\tilde{P}$ и P имају исти комплетан глатак атлас. $\square$

Теорема 2.11 проналази подмногострукости у кодомену глатког пресликавања, али можемо их приметити и у домену, јер су у пракси подмногострукости најчешће приказане као скуп решења једначина или система једначина.

Теорема 2.14. Ако је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање константног ранга r , тада је за свако $q \in f(M)$, скуп нивоа $P = f^{-1}(q)$ подмногострукост од M кодимензије r .

Доказ. По теореме о константном рангу, за свако $p \in P$ постоји карта (U, φ) центрирана у $p \in M$ и карта (V, ψ) центрирана у $q = f(p) \in N$, тако да f у односу на њих има репрезентацију облика $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Како је $\varphi(U \cap P) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) : x_1 = \dots = x_r = 0\} = \varphi(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r})$, то Теорема 2.13 завршава доказ. $\square$

Посебно, ако је f из претходне теореме субмерзија, то је скуп нивоа подмногострукост кодимензије $\dim N$. За тачку $p \in M$ кажемо да је **регуларна тачка** ако је $T_p f$ сурјективно, док у супротном кажемо да је **критична тачка**. За тачку $q \in N$ кажемо да је **регуларна вредност** ако њена инверзна слика $f^{-1}(q)$ садржи само регуларне тачке. Скуп нивоа $f^{-1}(q)$ је **регуларан скуп нивоа** ако је q регуларна вредност од f .

Теорема 2.15. Сваки регуларан скуп нивоа глатко пресликавања између многострукости је подмногострукост чија је кодимензија једнака димензији кодомена.

Доказ. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање и нека је $q \in N$ регуларна вредност. По Леми 2.7 скуп $U = \{p \in M : \text{rang}_p f = \dim N\}$ је отворен у M и садржи $f^{-1}(q)$. Одатле је $f|_U$ субмерзија, те је $f^{-1}(q)$ подмногострукост од U по Теореме 2.14. Композиција смештања $f^{-1}(q) \hookrightarrow U \hookrightarrow M$ је такође смештање, што доказује тврђење. $\square$

Пример 2.22. Ако је функција $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$, тада је f субмерзија те је $S^n = f^{-1}(1)$ подмногострукост од $\mathbb{R}^{n+1}$ димензије n . $\triangle$

Пример 2.23. Размотримо подскуп $M = \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 : xy = z^2\} \subset \mathbb{RP}^2$ који је пре свега добро дефинисан јер $(tx)(ty) = (tz)^2$ за $t \neq 0$ важи ако и само ако је $xy = z^2$. Такође, лако је приметити да је $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ добро дефинисано са

$$f(x : y : z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

те да је $M = f^{-1}(0)$. У првој карти имамо глатко $f \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$ са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_1^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{(1+x^2+y^2)-2x(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x^2+y^2)-2y(x-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2+y^2+2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(1+x+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за $y = 0$ и $x = \pm 1$, односно за тачке $(1 : \pm 1 : 0) \notin M$. У другој карти имамо $f \circ \varphi_2^{-1}(x, y) = (x - y^2)/(1 + x^2 + y^2)$, са симетричним резултатом. У трећој карти имамо глатко $f \circ \varphi_3^{-1}(x, y) = (xy - 1)/(1 + x^2 + y^2)$ са Јакобијевом матрицом

$$(f \circ \varphi_3^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y(1+x^2+y^2)-2x(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x(1+x^2+y^2)-2y(xy-1)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y+2x-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{x+2y-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

што је ранга 1 осим за решење система $y+2x-x^2y+y^3 = 0$ и $x+2y-xy^2+x^3 = 0$. Ако прву једначину помножимо са x , а другу са y и саберемо, добијамо $2(x^2 + xy + y^2) = 0$, што је могуће само за $x = y = 0$ које одговара тачки $(0 : 0 : 1) \notin M$. Дакле, f је субмерзија, осим у три конкретне тачке које не припадају M , а у сваком случају M је регуларни скуп нивоа и зато подмногострукост од $\mathbb{RP}^2$. $\triangle$

Испоставља се да у свакој тачки регуларног скупа нивоа имамо лепо растављање тангентног простора.

Лема 2.16. Ако је P регуларан скуп нивоа глатког пресликавања $f: M \rightarrow N$, тада за свако $p \in P$ важи $T_p P = \text{Ker } T_p f$.

Доказ. Нека је $\iota: P = f^{-1}(q) \hookrightarrow M$ природна инклузија. Како је $f|_P = f \circ \iota$ константно једнако $q \in N$ добијамо $T_p f \circ T_p \iota = T_p f|_P = 0$, одакле је $T_p \iota(T_p P) \leq \text{Ker } T_p f \leq T_p M$. Потпростор $T_p P$ има исту димензију као $\text{Ker } T_p f$, те можемо закључити да су једнаки при природној идентификацији $T_p \iota(T_p P) \cong T_p P$. $\square$

Концепт подмногострукости нам омогућава да глатком пресликавању између многострукости рестрикујемо домен или кодомен на њихове подмногострукости, при чему ће рестрикција остати глатка. Наравно, за рестрикцију домена то је очигледно јер имамо композицију глатког пресликавања и инклузије која је смештање.

Теорема 2.17. Нека је $f: M \rightarrow N$ латко пресликавање, а P подмногострукости од N , онда је рестрикција $f: M \rightarrow P$ такође латка.

Доказ. Ако је $f_1: M \rightarrow P$ посматрана рестрикција, онда је $f = \iota \circ f_1$, где је инклузија $\iota: P \hookrightarrow N$ смештање. Координатна репрезентација $\psi_P \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ је глатка за карту (U, φ) на M и кришка карту (V, ψ) на N која индукује карту $(V \cap P, \psi_P)$ на P , док је f_1 непрекидно јер је ι хомеоморфизам на своју слику. Зато је f_1 глатко по Леми 1.13. $\square$

2.5 Векторска поља

У основи, векторско поље на многострукости M је пресликавање $p \mapsto X(p)$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X(p) \in T_p M$. Како желимо да то додељивање буде глатко док p варира у M , потребно је да све тангентне просторе $T_p M$ за $p \in M$ окупимо у јединствену заједничку многострукост. **Тангентно раслојење** многострукости M је дисјунктна унија тангентних простора од M ,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M) = \bigcup_{p \in M} \{(p, X) : X \in T_p M\}.$$

Елемент тангентног раслојења TM можемо схватити као уређен пар (p, X) , где је p тачка из M , а X тангентни вектор на M у p . Тангентно раслојење долази у пакету са природном пројекцијом $\pi: TM \rightarrow M$ дефинисаном са $\pi(p, X) = p$, која сваки тангентни вектор из $T_p M$ шаље у његову основну тачку p . Напоменимо да је често погодно пар $(p, X) \in TM$ идентификовати са тангентним вектором $X \in T_p M$, а влакно $\pi^{-1}(p)$ са $T_p M$.

Желимо да од скупа TM направимо многострукост, односно природно доделимо глатак атлас. Нека је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. За $p \in U$ по Леми 2.6 важи $T_p U = T_p M$, те је $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M \subseteq TM$. Тангентни вектор $X \in T_p M$ у $p \in U$ је јединствена линеарна комбинација $X = \sum_{i=1}^n X(x_i)(\partial_i)_p$, што нас мотивише да поставимо пресликавање $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) = TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ са

$$\tilde{\varphi}(p, X) = (x_1(p), \dots, x_n(p), X(x_1), \dots, X(x_n)). \quad (2.4)$$

Овако дефинисано $\tilde{\varphi}$ је бијекција са инверзом

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(p), \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(p, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right).$$

Нека су (U, φ) и (V, ψ) карте на M , тада на TM имамо одговарајуће карте $(TU, \tilde{\varphi})$ и $(TV, \tilde{\psi})$. Скупови $\tilde{\varphi}(TU \cap TV) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\psi}(TU \cap TV) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ су отворени у $\mathbb{R}^{2n}$, док за пресликавање $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ важи

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \tilde{\psi} \left(p, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) \\ &= \left(\psi(p), \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (\pi_1 \circ \psi), \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (\pi_n \circ \psi) \right) \\ &= \left((\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(\pi_1 \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_i}(\varphi(p)), \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial(\pi_n \circ (\psi \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_i}(\varphi(p)) \right), \end{aligned}$$

те је зато глатко. На овај начин оригинални атлас за M индукује глатак атлас за TM .

Како M има пребројив податлас, онда га има и TM . За $X \in T_p M$ и $Y \in T_q M$ где је $p \neq q$ (иначе ради Лема 1.5) постоје тривијално сагласне карте, φ у $p \in M$ и ψ у $q \in M$, те $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ имају дисјунктне домене који раздвајају тачке (p, X) и (q, Y) , што доказује Хаусдорфов услов. Због тога тангентно раслојење TM са индукованим атласом јесте глатка многострукост димензије $2n$.

Сечење тангентног раслојења TM је свако пресликавање $X: M \rightarrow TM$ за које важи $\pi \circ X = 1_M$, где је $\pi: TM \rightarrow M$ природна пројекција. **Векторско њоље** на многострукости M је глатко сечење тангентног раслојења TM , односно глатко пресликавање $X: M \rightarrow TM$ које свакој тачки $p \in M$ додељује тангентни вектор $X_p = X(p) \in T_p M$. Скуп свих векторских поља на многострукости M обележавамо са $\mathfrak{X}(M)$.

Нека је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Тада сечење $X: M \rightarrow TM$ има координатну репрезентацију $\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ која се захваљујући (2.4) може изразити са $\varphi(p) \mapsto (\varphi(p), X_p(x_1), \dots, X_p(x_n))$ за $p \in U$. Свако сечење X може се посматрати као пресликавање које глаткој функцији $f \in \mathfrak{F}(M)$ додељује функцију $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$ одређену са $(Xf)(p) = X_p(f)$. Тада је $X_p(x_i) = (Xx_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$, одакле за $v \in \varphi(U)$ имамо

$$(\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(v) = (v, Xx_1 \circ \varphi^{-1}(v), \dots, Xx_n \circ \varphi^{-1}(v)), \quad (2.5)$$

те је сечење X глатко на U ако и само ако су Xx_i глатке функције за $1 \leq i \leq n$.

За свако $1 \leq i \leq n$ дефинишемо i -то **координатно векторско њоље** $\partial_i: U \rightarrow TU$ са $\partial_i(p) = (\partial_i)_p$, а како је $\partial_i(x_j): p \mapsto (\partial_i)_p(x_j) = \delta_{ij}$ за свако $1 \leq j \leq n$, то је $\partial_i(x_j) \in \mathfrak{F}(U)$, те имамо $\partial_i \in \mathfrak{X}(U)$ као основни пример векторског поља.

За $f \in \mathfrak{F}(M)$, координатна репрезентација од ∂f је глатка функција

$$\partial f \circ \varphi^{-1}: \varphi(p) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}(\varphi(p)),$$

одакле следи $\partial f \in \mathfrak{F}(U)$, док у тачки $p \in U$ за сечење $X: M \rightarrow TM$ имамо

$$(Xf)(p) = X_p(f) = \left(\sum_{i=1}^n X_p(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) f = \sum_{i=1}^n X_p(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\sum_{i=1}^n (Xx_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(p),$$

одакле на координатној околини U добијамо

$$Xf = \sum_{i=1}^n (Xx_i) \partial_i f.$$

Уколико је $X \in \mathfrak{X}(M)$, сечење је глатко, те имамо глатке Xx_i , одакле је Xf глатко на U , а како то важи за сваку карту, добијамо $Xf \in \mathfrak{F}(M)$. Свака појединачна функција $X_p: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ је диференцирање у p , те ће се линеарност и Лајбницовост једноставно продужити на глатко сечење $X: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$. Лајбницовост по тачкама даје $X(fh) = f(Xh) + h(Xf)$ за свако $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, а ако је X додатно и линеарно, кажемо да је X **диференцирање**, а доказали смо да свако векторско поље јесте диференцирање.

Обратно, свако диференцирање $X: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ индукује диференцирање у тачки $p \in M$, те је са $X_p(f) = (Xf)(p)$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$ дефинисан тангентни вектор у p , а самим тим и сечење тангентног раслојења $X: M \rightarrow TM$. Како у свакој карти (U, φ) важи $x_i = \pi_i \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$, то је $Xx_i \in \mathfrak{F}(U)$, те из (2.5) видимо да је то сечење глатко на U , а самим тим и на целом M . То комплетира доказ да векторска поља имају дуалну природу коју видимо у наредној теорему.

Теорема 2.18. Диференцирања на мнојострукости су тачно тлајка сечења њеној татјенјној раслојења.

Основне операције на $\mathfrak{X}(M)$ уводимо на природан начин. Сабирање и множење скаларом, $(\alpha X + \beta Y)(h) = \alpha(X(h)) + \beta(Y(h))$ за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h \in \mathfrak{F}(M)$, чине да $\mathfrak{X}(M)$ постане векторски простор над $\mathbb{R}$. Додатно, векторско поље може се множити са $f \in \mathfrak{F}(M)$ преко једнакости $(fX)(h) = fX(h)$, која чини да $\mathfrak{X}(M)$ буде модул над прстеном $\mathfrak{F}(M)$. У складу са уведеним операцијама, аналогно формули (2.1), добијамо разлагање произвољног векторског поља преко координатних векторских поља у некој карти,

$$X = \sum_{i=1}^n Xx_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пример 2.24. Ако је $V \in T_p M$ произвољан тангентни вектор многострукости $M \ni p$, тада постоји векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $X_p = V$. Избором неке карте (U, φ) у $p \in M$ добијамо координатне функције и одговарајуће базне тангентне векторе. Како $V = \sum_i v_i (\partial_i)_p$ важи за неке $v_i = V(x_i) \in \mathbb{R}$, то можемо дефинисати $Y \in \mathfrak{X}(U)$ са $Y = \sum_i v_i \partial_i$, да бисмо добили $Y_p = V$. По Леми 1.18 постоји $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U за коју је $b(p) = 1$. Ако дефинишемо $X = bY$ на U и $X = 0$ на $M \setminus \text{supp}(b)$ добијамо $X \in \mathfrak{X}(M)$ и важи $X_p = b(p)Y_p = V$. $\triangle$

Множење векторских поља $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ уводимо са $(XY)(h) = X(Y(h))$ за $h \in \mathfrak{F}(M)$, што је очигледно $\mathbb{R}$ -линеарно. Међутим, из Лајбницовости за X и Y добијамо

$$XY(fh) = X(Y(fh)) = X(fYh + hYf) = fX(Yh) + (Xf)(Yh) + hX(Yf) + (Xh)(Yf).$$

Пажљивим посматрањем претходне формуле, уочавамо два члана „вишка“, $(Xf)(Yh)$ и $(Xh)(Yf)$. Како у општем случају нема разлога да се они међусобно пониште, XY нема Лајбницовост, те није ни векторско поље. Међутим, ти додатни чланови су симетрични по X и Y , а пократиће се ако израчунамо $YX(fh)$ и одузмемо од $XY(fh)$. Дакле, $XY - YX$ поседује Лајбницовост и самим тим јесте векторско поље, које зовемо **комуџајтор** или **Лијева зајрага** и обележавамо са $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$.

Комутатор на $\mathfrak{X}(M)$ природно поседује неке лепе особине. Из саме дефиниције следи антисиметрија $[Y, X] = -[X, Y]$, док линеарност векторских поља директно повлачи $\mathbb{R}$ -билинеарност $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ и $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Међутим, иако комутатор јесте $\mathbb{R}$ -билинеаран он није $\mathfrak{F}(M)$ -билинеаран. Како за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $X(fY(h)) = fXY(h) + (Xf)(Yh)$, то добијамо корисну формулу

$$X(fY) = fXY + (Xf)Y,$$

из које лако можемо израчунати

$$[fX, hY] = fh[X, Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X. \quad (2.6)$$

Још једно лепо својство векторских поља је **Јакобијев идентитет**,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (2.7)$$

који важи за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, што се може лако проверити, или показати применом Леме А.31 за подалгебру $\mathfrak{X}(M)$ алгебре свих линеарних ендоморфизама $\text{End}(\mathfrak{F}(M))$ векторског простора $\mathfrak{F}(M)$ над пољем $\mathbb{R}$.

Лијева алгебра (над $\mathbb{R}$) је векторски простор над $\mathbb{R}$ опремљен $\mathbb{R}$ -билинеарном антисиметричном операцијом $[-, -]$ која задовољава Јакобијев идентитет. Како векторска поља на произвољној многострукости M поседују све наведене особине, можемо рећи да је $\mathfrak{X}(M)$ Лијева алгебра.

Пример 2.25. Одредимо сва векторска поља $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ за која важи

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, V \right] = V = \left[V, \frac{\partial}{\partial y} \right].$$

Њихов општи облик је $V = a\partial_x + b\partial_y$, где су $a = a(x, y)$ и $b = b(x, y)$ неке глатке функције. Из почетних услова добијамо

$$\begin{aligned} \partial_x(a\partial_x + b\partial_y) - (a\partial_x + b\partial_y)\partial_x &= \frac{\partial a}{\partial x}\partial_x + \frac{\partial b}{\partial x}\partial_y = a\partial_x + b\partial_y, \\ (a\partial_x + b\partial_y)\partial_y - \partial_y(a\partial_x + b\partial_y) &= -\frac{\partial a}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial b}{\partial y}\partial_y = a\partial_x + b\partial_y. \end{aligned}$$

Из $\partial a/\partial x = a$ је $a = f(y)e^x$, док из $\partial b/\partial x = b$ следи $b = h(y)e^x$. Из $-\partial a/\partial y = a$ имамо $-f'(y) = f(y)$, те је $f(y) = Ce^{-y}$, док из $-\partial b/\partial y = b$ следи $-h'(y) = h(y)$, одакле следи $h(y) = De^{-y}$. Одавде добијамо $a = Ce^{x-y}$ и $b = De^{x-y}$ за неке константе C и D . Тражена векторска поља су облика $V = e^{x-y}(C\partial_x + D\partial_y)$, где су C и D произвољне константе. $\triangle$

Пример 2.26. Како изгледају координатна векторска поља $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ у поларним координатама, датим са $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ за $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$? Директан рачун нам даје

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Матрица коефицијената је Јакобијева матрица промене координата, а из њеног инверза

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$\triangle$

Важно је имати у виду да је комутатор свуда једнак нули у два специјална случаја. У првом случају, као последица антисиметрије $[X, X] = 0$ важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. Други случај тиче се координатних векторских поља из исте карте (U, φ) . Парцијални изводи глатких функција су исти у било ком редоследу,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j} \circ \varphi \right) = \frac{\partial}{\partial \pi_i} \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \right) \circ \varphi \\ &= \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \circ \varphi = \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j \partial \pi_i} \circ \varphi = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \end{aligned}$$

одакле следи

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (2.8)$$

Пример 2.27. Посматрајмо два векторска поља у $\mathbb{R}^2$,

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad Y = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рачун даје

$$XY = (1 + x^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad YX = (1 + x^2) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x},$$

одакле добијамо

$$[X, Y] = XY - YX = 2x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Да ли је могуће пронаћи нове координате $(u, v) = f(x, y)$ такве да су X и Y баш координатна векторска поља $\partial/\partial u$ и $\partial/\partial v$? Приметимо да су векторска поља X и Y свуда линеарно независна, али то није довољно добро. Из (2.8) за координатна векторска поља важи $[\partial/\partial u, \partial/\partial v] = 0$, тако да је одговор негативан. $\triangle$

Пример 2.28. Поновимо претходни пример за векторска поља у $\mathbb{R}^2$ на отвореном подскупу где је $xy > 0$,

$$X = \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = 2\sqrt{xy} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Директан рачун показује да су и XY и YX једнаки $2\sqrt{x/y}(\partial/\partial x)$ плус неки други изводи које не морамо да рачунамо јер унапред знамо да ће бити исти, одакле је $[X, Y] = 0$.

Овог пута има смисла тражити промену координата $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ за коју је потребно наместити

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} &= X = \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \\ 2\sqrt{xy} \frac{\partial}{\partial x} &= Y = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

одакле следи

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 2\sqrt{xy}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Најпре видимо да је $y = u + C$ за неку константу C . Затим, $\partial x/x = \partial u/(u + C)$ даје $x = (u + C)f(v)$. Даље је $(u + C)f'(v) = 2\sqrt{(u + C)f(v)(u + C)}$, одакле $f'(v) = \pm 2\sqrt{f(v)}$, те $\sqrt{f} = \pm v + \text{Const}$, односно $f = (v + D)^2$ за неку константу D . Дакле, за произвољне константе C и D , промена координата $x = (u + C)(v + D)^2$, $y = u + C$ даје $X = \partial/\partial u$, $Y = \partial/\partial v$ и добијамо позитиван одговор. $\triangle$

Пример 2.29. Размотримо исто питање као раније, овог пута у случају векторских поља

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Након што установимо да је $[X, Y] = 0$, можемо увести поларне координате $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, што је добро дефинисано за $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. Тада нам рачун даје

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} Y, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} = X.$$

Можемо увести нову промену координата са $\rho = f(r)$, при чему чувамо θ као другу координату, тако да добијемо жељени облик $Y = \partial/\partial \rho$. Како је

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} = f'(r) \frac{\partial}{\partial \rho},$$

потребно нам је $f'(r) = 1/r$, односно $f(r) = \ln r + \text{Const}$, одакле је $r = Ce^\rho$ и промена координата гласи $x = Ce^\rho \cos \theta$, $y = Ce^\rho \sin \theta$, за произвољну константу $C > 0$. $\triangle$

2.6 Глобално тангентно пресликавање

Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости M и N . Ако објединимо тангентна пресликавања од f у свим тачкама из M , добијамо глобално дефинисано пресликавање између тангентних раслојења, $Tf: TM \rightarrow TN$ где је $Tf(X_p) = T_p f(X_p)$ за свако $X_p \in T_p M$. Овако дефинисано пресликавање Tf зовемо **глобално тангентно пресликавање**, а његова рестрикција на сваки од тангентних простора $T_p M \subseteq TM$ је управо тангентно пресликавање $T_p f$.

Глобално тангентно пресликавање Tf гура тангентни вектор $X \in T_p M$ из домен многострукости у тангентни вектор из кодомен многострукости $f_*(X) = T_p f(X)$ који називамо **гурање** (*pushforward*) од X . Гурање вектора X можемо обележавати са $T_p f(X)$, $Tf(X)$ или $f_*(X)$ у зависности од тога на које везе желимо да укажемо, те да ли желимо да нагласимо основну тачку $p = \pi(X)$. Приметимо да за канонске пројекције тангентних раслојења $\pi_M: TM \rightarrow M$ и $\pi_N: TN \rightarrow N$ важи очигледна веза $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Теорема 2.19. *Глобално тангентно пресликавање је глатко.*

Доказ. За глатко $f: M \rightarrow N$ и произвољно $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \varphi$ ($1 \leq j \leq m = \dim M$) и карта (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ ($1 \leq i \leq n = \dim N$), где је $f(U) \subseteq V$ тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. За одговарајуће карте $(TU, \tilde{\varphi})$ на TM и $(TV, \tilde{\psi})$ на TN очигледно важи $Tf(TU) \subseteq TV$. Координатну репрезентацију

$$\tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

глобалног тангентног пресликавања Tf рачунамо користећи формулу (2.2),

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi} \circ Tf \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= (\tilde{\psi} \circ Tf) \left(p, \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) \\ &= \tilde{\psi} \left(f(p), \sum_{j=1}^m \lambda_j T_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = \tilde{\psi} \left(f(p), \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y_i \circ f)}{\partial x_j} (p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)} \right) \\ &= \left((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial (\pi_1 \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j} (\varphi(p)), \dots, \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial (\pi_n \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_j} (\varphi(p)) \right), \end{aligned}$$

што је глатко јер је такво $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, одакле следи да је Tf глатко. $\square$

Ако је $f: M \rightarrow N$ константно пресликавање онда из Примера 2.3 имамо $T_p f = 0$ за свако $p \in M$, те важи $Tf = 0$. Штавише, важи и обрат, али очекивано само на компонентама повезаности.

Лема 2.20. *Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између повезане многострукости M и многострукости N . Ако је глобално тангентно пресликавање $Tf: TM \rightarrow TN$ једнако нули онда је f константно.*

Доказ. Као и раније, за произвољно $p \in M$ бирамо карту (U, φ) у $p \in M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $f(U) \subseteq V$ тако да је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко. Ако $Tf = 0$ применимо на координатне

векторе из $T_q M$, то из формуле (2.2) добијамо

$$\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(q) = \frac{\partial(\pi_i \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial \pi_j}(\varphi(q)) = 0,$$

за свако $q \in U$, $1 \leq j \leq \dim M$ и $1 \leq i \leq \dim N$. Одавде је $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ константно на некој кугли око $\varphi(p)$, те је f константно на некој повезаној околини тачке p , за свако $p \in M$. Посматрајмо затворен скуп $Q = f^{-1}(\{f(q)\})$ који садржи неку фиксирану тачку $q \in M$. Како свака тачка из Q има повезану околину на којој је f константно, то је Q отворен. Једини непразан затворен и отворен подскуп повезаног простора M је само M , те је f константно на целом M . $\square$

Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости M и N . Ако применимо глобално тангентно пресликавање на векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$, свака тачка $p \in M$ има свој одговарајући вектор $T_p f(X_p) \in T_{f(p)} N$. Међутим, у општем случају овако не добијамо векторско поље на N . На пример, ако f није сурјективно тада постоји проблем који вектор доделити тачкама из $N \setminus f(M)$. Са друге стране, ако f није инјективно имамо $f(p) = f(q)$ за неке различите тачке $p, q \in M$, али не постоји разлог зашто би вектори $T_p f(X_p)$ и $T_q f(X_q)$, који припадају истом тангентном простору $T_{f(p)} N = T_{f(q)} N$, били једнаки.

У случају да векторска поља $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ имају особину да за свако $p \in M$ важи $T_p f(X_p) = Y_{f(p)}$, за X и Y кажемо да су **f -везана** (f -related) и пишемо $X \sim_f Y$. Како $(X(h \circ f))(p) = X_p(h \circ f) = (T_p f(X_p))(h)$ и $((Yh) \circ f)(p) = (Yh)(f(p)) = Y_{f(p)}(h)$ важи за $p \in M$ и $h \in \mathfrak{F}(N)$, то имамо наредно тврђење.

Лема 2.21. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости и нека су $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y \in \mathfrak{X}(N)$ векторска поља. Тада $X \sim_f Y$ важи ако и само ако $X(h \circ f) = (Yh) \circ f$ важи за свако $h \in \mathfrak{F}(N)$.

Пример 2.30. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $f(t) = (\cos t, \sin t)$ и $X = d/dt \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Природно се поставља питање да ли постоји $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ такво да је $X \sim_f Y$. За потенцијално решење $Y = \mu(x, y)(\partial/\partial x) + \nu(x, y)(\partial/\partial y)$ по формули (2.2) имамо

$$Y_{f(t)} = T_t f \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \frac{\partial \cos t}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{f(t)} + \frac{\partial \sin t}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{f(t)} = -\sin t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{f(t)} + \cos t \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{f(t)},$$

те нам је потребно $\mu(\cos t, \sin t) = -\sin t$ и $\nu(\cos t, \sin t) = \cos t$, што важи за $\mu(x, y) = -y$ и $\nu(x, y) = x$, при чему добијамо решење $Y = -y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)$.

Приметимо да иако f није сурјективно, решење постоји јер услов из дефиниције тривијално важи за тачке које нису у слици $f(\mathbb{R})$. Међутим, тражено векторско поље Y није једнозначно одређено, на пример $Y = -y(x^2 + y^2)(\partial/\partial x) + x(x^2 + y^2)(\partial/\partial y)$ такође испуњава услове задатка. $\triangle$

Теорема 2.22. Ако је $f: M \rightarrow N$ дифеоморфизам између многострукости M и N , тада за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ постоји јединствено $Y \in \mathfrak{X}(N)$ такво да је $X \sim_f Y$.

Доказ. Како је f бијекција, то сваком $q \in N$ следује јединствено $Y_q = T_{f^{-1}(q)} f(X_{f^{-1}(q)})$, што дефинише сечење $Y = T f \circ X \circ f^{-1}: N \rightarrow TN$, које је глатко као композиција глатких (Tf је глатко по Теорему 2.19), те је $Y \in \mathfrak{X}(N)$. $\square$

Јединствено $Y \in \mathfrak{X}(N)$ из претходне теореме за које је $X \sim_f Y$ зовемо **пурање** (*push-forward*) за f од $X \in \mathfrak{X}(M)$ и обележавамо са $f_* X$. Дакле, $f_* X \in \mathfrak{X}(N)$ је дефинисано само за дифеоморфизме $f: M \rightarrow N$ и може се рачунати формулом $(f_* X)_q = T f(X_{f^{-1}(q)})$, док по Лему 2.21 за свако $h \in \mathfrak{F}(N)$ имамо

$$(f_* X)h \circ f = X(h \circ f). \quad (2.9)$$

Кључна ствар у вези везаних векторских поља је њихова сарадња у односу на комутатор, о чему говори наредна теорема.

Теорема 2.23. Нека је $f: M \rightarrow N$ лангајско пресликавање између многострукости M и N . Ако за векторска поља $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ и $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ важи $X_1 \sim_f Y_1$ и $X_2 \sim_f Y_2$, онда важи и $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

Доказ. Из Леме 2.21 за $h \in \mathfrak{F}(N)$ можемо рачунати $X_1 X_2 (h \circ f) = X_1 ((Y_2 h) \circ f) = (Y_1 Y_2 (h)) \circ f$ и $X_2 X_1 (h \circ f) = (Y_2 Y_1 (h)) \circ f$, те је $[X_1, X_2] (h \circ f) = (Y_1 Y_2 (h)) \circ f - (Y_2 Y_1 (h)) \circ f = ([Y_1, Y_2] h) \circ f$. Доказ завршава поновна примена Леме 2.21, али у супротном смеру. $\square$

Уколико у претходној теорему поставимо дифеоморфизам $f: M \rightarrow N$, тада као последицу имамо да за $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ важи лепа формула

$$f_*[X_1, X_2] = [f_*X_1, f_*X_2]. \quad (2.10)$$

2.7 Задаци

Задатак 2.1. У полуравни $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ је тачка $p \in M$ дата координатама $(x, y) = (0, 2)$. Изразити тангентни вектор $T_p M \ni X = 4\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$ преко $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p$ и $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p$ у поларним координатама.

Задатак 2.2. Показати да је $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $f(x : y) = xy/(x^2 + y^2)$ добро дефинисано и глатко. Одредити максимум од f на $\mathbb{R}P^1$ ако постоји.

Задатак 2.3. Да ли је композиција два пресликавања константног ранга увек константног ранга?

Задатак 2.4. Доказати да се произвољно глатко пресликавање између многострукости може раставити на композицију субмерзије и смештања.

Задатак 2.5. За које $m, n \in \mathbb{N}$ постоји субмерзија $f: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ која није сурјективна?

Задатак 2.6. Нека је $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$ за $n \in \mathbb{N}$ дато са $f(x : y) = (x^n : x^{n-1}y : \dots : xy^{n-1} : y^n)$. Доказати да је f добро дефинисано и испитати да ли је смештање.

Задатак 2.7. Нека је $f: \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ дато са $f((x : y), (z : w)) = (xz : xw : yz : yw)$. Доказати да је f добро дефинисано и испитати да ли је f имерзија, субмерзија или смештање.

Задатак 2.8. За које $r \in \mathbb{R}$ је скуп $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ једнодимензиона подмногострукост од $\mathbb{R}^3$?

Задатак 2.9. Доказати да је $M = \{((x_1 : \dots : x_{n+1}), (y_1 : \dots : y_{n+1})) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n : \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i = 0\}$ подмногострукост од $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$ и одредити $\dim M$.

Задатак 2.10. За многострукост $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ одредити векторско поље $V \in \mathfrak{X}(M)$ ако је

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}, V\right] = 2\frac{x+y}{y^2}\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \left[y\frac{\partial}{\partial x}, V\right] = 0.$$

Задатак 2.11. Одредити $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ за које је $[\partial_x + x\partial_y, [V, \partial_x]] = 0 = [V, \partial_y]$ тако да важи $V_{(0,0)} = (\partial_x)_{(0,0)} + (\partial_y)_{(0,0)}$ и $V_{(1,1)} = 3(\partial_x)_{(1,1)} + 3(\partial_y)_{(1,1)}$.

Задатак 2.12. Одредити све константе $c \in \mathbb{R}$ за које $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ дата са

$$X = (x+1)\frac{\partial}{\partial x} + (y \ln y + y)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad Y = (2x+c)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

дозвољавају промену координата, тако да X и Y постају координатна векторска поља.

Задатак 2.13. Одредити реалне константе a и c за које векторска поља X и Y у $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ дата са

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad Y = a\frac{\partial}{\partial x} + x^c\frac{\partial}{\partial y}$$

дозвољавају промену координата, тако да X и Y постају координатна векторска поља, а затим наћи такву промену координата.

Задатак 2.14. Ако је $f: D \rightarrow f(D)$ дифеоморфизам дат са $(x, y) = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, при чему је $D, f(D) \subset \mathbb{R}^2$, израчунати $(f^{-1})_*(\partial_x)$.

Задатак 2.15. Нека је $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ отворена подмногострукост од $\mathbb{R}^2$ и $f: Q \rightarrow Q$ дата са $(u, v) = f(x, y) = (xy, y/x)$. Показати да је f дифеоморфизам и израчунати $f_*(x\partial_x + y\partial_y)$ и $f_*(y\partial_x)$.

Задатак 2.16. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ дата са $f(x, y) = (x : y : 1)$ и $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Колико има векторских поља $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$ таквих да је $X \sim_f Y$? Записати неко решење (ако постоји) за Y у све три стандардне карте.

ТЕНЗОРСКА РАСЛОЈЕЊА И ПОЉА

3.1 Векторска раслојења

Тангентно раслојење многострукости има сопствену природну структуру глатке многострукости, што је концепт који можемо уопштити. Грубо говорећи, векторско раслојење је фамилија векторских простора, по један за сваку од тачака многострукости, слењених заједно на неки гладак начин.

Нека је n -многострукост M **база раслојења** и нека је фиксирано $r \in \mathbb{N}$ **рані раслојења**. Посматрајмо фамилију реалних векторских простора E_p димензије r индексираних по тачкама $p \in M$, те нека је **йросіор раслојења**

$$E = \bigsqcup_{p \in M} E_p.$$

Пројекција раслојења је природна пројекција $\pi: E \rightarrow M$ дефинисана са $\pi(v) = p$ за $v \in E_p$. **Карта раслојења** на E је пресликавање $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^r$ за које постоји карта (U, φ) на M тако да се $\tilde{\varphi}$ за свако $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам

$$\tilde{\varphi}|_{E_p}: E_p = \pi^{-1}(p) \rightarrow \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r.$$

Айлас раслојења је гладак атлас за E који се састоји од карата раслојења на E . Сваки атлас раслојења за E одређује **комілейан айлас раслојења** који се састоји од свих карата раслојења које су сагласне са свим картама раслојења из датог атласа.

Векіорско раслојење (или **ілайко реално векіорско раслојење**) ранга r над M је глатка многострукост димензије $n + r$ коју генерише скуп E са (комплетним) атласом раслојења за E . Додатни тополошки услови из дефиниције многострукости аутоматски се преносе са базе раслојења M . Како M има пребројив податлас, то и атлас раслојења има пребојив податлас, што оправдава пребројиву базу. Ако је $x \in E_p$ и $y \in E_q$ за $p \neq q$ (случај $p = q$ одмах решава Лема 1.5), то постоје отворени дисјунктни $V_p, V_q \subset M$ који раздвајају $p \in V_p$ и $q \in V_q$, те $\pi^{-1}(V_p)$ и $\pi^{-1}(V_q)$ раздвајају x и y , што доказује Хаусдорфов услов.

Пројекција раслојења $\pi: E \rightarrow M$ је глатко сурјективно пресликавање у којем се крије суштинска информација векторског раслојења, те се често поистовећују. Наравно, кад не постоји опасност од забуне, лакше је поистоветити векторско раслојење са његовим простором раслојења E .

Кључна особина карте раслојења $\tilde{\varphi}$ је да се у тачкама $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам између **влакна** $E_p = \pi^{-1}(p)$ над p које поседује структуру реалног векторског простора и $\mathbb{R}^r$. Као што многострукост M локално личи на отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, то векторско раслојење E над M локално личи на производ отвореног подскопа од $\mathbb{R}^n$ и векторског простора $\mathbb{R}^r$.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^r \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\varphi(U)} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \end{array}$$

За функцију преласка $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^r \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^r$, где су (U, φ) и (V, ψ) одговарајуће карте на M , имамо $\pi_{\psi(U \cap V)} \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \pi_{\varphi(U \cap V)}$, одакле се види да је функција преласка облика

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(x), \tau(x)v),$$

где је $\tau: \varphi(U \cap V) \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R})$. Одавде следи да је за проверу сагласности карата раслојења довољно испитати глаткоћу пресликавања τ .

Пример 3.1. Тангентно раслојење n -многострукости M је основни пример векторског раслојења. За карту (U, φ) на M можемо посматрати глобално тангентно пресликавање $T\varphi: TU \rightarrow T\varphi(U) \cong \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, које се у тачки $p \in U$ рестрикује на линеарни изоморфизам $T_p\varphi: T_pU = T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong \mathbb{R}^n$. Ако је (V, ψ) нека друга карта на M , то имамо $T_p\psi \circ (T_p\varphi)^{-1} = T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})$, одакле следи сагласност карата раслојења $T\psi \circ (T\varphi)^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), T_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$ јер Јакобијева матрица глатко зависи од x . Дакле, произвољан глатак атлас за M генерише атлас раслојења за TM , те је TM векторско раслојење ранга n над M . Приметимо да из једноставног рачуна

$$T_p\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \sum_i \frac{\partial(\pi_i \circ \varphi)}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial \pi_i} \right)_{\varphi(p)} = \sum_i \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_j}(\varphi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial \pi_i} \right)_{\varphi(p)} = \left(\frac{\partial}{\partial \pi_j} \right)_{\varphi(p)}$$

следи да карте раслојења $T\varphi$ одговарају картама из (2.4) које смо оригинално увели кад смо дефинисали тангентно раслојење. $\triangle$

Пример 3.2. Најједноставнији, али свакако важан пример векторског раслојења је **производ раслојење**, које постоји за произвољну n -многострукост M и свако $r \in \mathbb{N}$. У питању је многострукост $E = M \times \mathbb{R}^r$ димензије $n + r$ са природном пројекцијом $\pi_M: M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$, $\pi_M(p, v) = p$. Производ раслојење ранга r над M свакој тачки $p \in M$ додељује влакно $E_p = \pi_M^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$, док су карте раслојења $\varphi \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$, где су φ карте на M . Посебно, цилиндар $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ је производ раслојење над кругом $\mathbf{S}^1$ путем пројекције $\pi_{\mathbf{S}^1}: \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$. $\triangle$

Пример 3.3. Нека је P подмногострукост многострукости M , и нека је $\pi: E \rightarrow M$ векторско раслојење. Тада је његова рестрикција $\pi_P: \pi^{-1}(P) \rightarrow P$ такође векторско раслојење, обележавамо га са $E|_P = \pi^{-1}(P)$ и кажемо да је **рестрикција** од E на P . Ако је (U, φ) карта у $p \in M$, а (U_P, φ_P) карта у $p \in P$ таква да је $U_P \subseteq U$, тада од индуковане карте $\tilde{\varphi}$ на E добијамо индуковану карту $\tilde{\varphi}_P$ на $E|_P$ са

$$\tilde{\varphi}_P = ((\varphi_P \circ \varphi^{-1}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}) \circ \tilde{\varphi}|_{\pi^{-1}(U_P)}: \pi^{-1}(U_P) \rightarrow \varphi_P(U_P) \times \mathbb{R}^r,$$

док је функција преласка $\tilde{\psi}_P \circ (\tilde{\varphi}_P)^{-1}$ глатка као композиција глатких функција. $\triangle$

Пример 3.4. Нека су $\pi_E: E \rightarrow M$ и $\pi_F: F \rightarrow N$ векторска раслојења ранга r_1 и r_2 , онда је њихов Декартов производ $E \times F$ векторско раслојење ранга $r_1 + r_2$ над $M \times N$, чије је влакно у $(p, q) \in M \times N$ векторски простор $E_p \times E_q$. $\triangle$

Пример 3.5. Нека је M многострукост, а $\pi_E: E \rightarrow M$ и $\pi_F: F \rightarrow M$ векторска раслојења ранга r_1 и r_2 над M . **Витнијева сума**¹ од E и F је векторско раслојење $E \oplus F$ над M чије је влакно у тачки $p \in M$ директна сума $E_p \oplus F_p$, односно

$$E \oplus F = \bigsqcup_{p \in M} (E_p \oplus F_p)$$

са очигледном пројекцијом $\pi = \pi_E \circ \pi_1 = \pi_F \circ \pi_2$. За свако $p \in M$ постоји карта (U, φ) у $p \in M$ и карте раслојења $\tilde{\varphi}: \pi_E^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_1}$ и $\tilde{\varphi}: \pi_F^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_2}$, одакле дефинишемо $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ са $\Phi = (\varphi \circ \pi, \pi_{\mathbb{R}^{r_1}} \circ \tilde{\varphi} \circ \pi_1, \pi_{\mathbb{R}^{r_2}} \circ \tilde{\varphi} \circ \pi_2)$. Нека је $\Psi: \pi^{-1}(V) \rightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ друго такво бијективно пресликавање, где је (V, ψ) карта у $p \in M$. Ако функцијама преласка $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ и $\tilde{\bar{\psi}} \circ \tilde{\bar{\varphi}}^{-1}$ одговарају глатка пресликавања $\tau_1: \varphi(U \cap V) \rightarrow \text{GL}(r_1, \mathbb{R})$ и $\tau_2: \varphi(U \cap V) \rightarrow \text{GL}(r_2, \mathbb{R})$, онда функцији преласка $\Psi \circ \Phi^{-1}$ одговара пресликавање $\tau: \varphi(U \cap V) \rightarrow \text{GL}(r_1 + r_2, \mathbb{R})$ где је $\tau(p) = \tau_1(p) \oplus \tau_2(p)$ блок дијагонална матрица са $\tau_1(p)$ и $\tau_2(p)$ на дијагонали, што је глатко по p и доказује да је $E \oplus F$ векторско раслојење над M . $\triangle$

Нека су $\pi_E: E \rightarrow M$ и $\pi_F: F \rightarrow N$ векторска раслојења. За глатко пресликавање $\Phi: E \rightarrow F$ кажемо да је (гладак) **хомоморфизам раслојења** ако постоји пресликавање $f: M \rightarrow N$ које задовољава $\pi_N \circ \Phi = f \circ \pi_M$ такво да је рестрикција $\Phi|_{E_p}: E_p \rightarrow F_{f(p)}$ линеарна на влакнима за свако $p \in M$. У том случају кажемо да је f **базно пресликавање** од Φ , као и да Φ **покрива** f .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Пример 3.6. Ако је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости M и N , тада је глобално тангентно пресликавање $Tf: TM \rightarrow TN$ хомоморфизам раслојења које покрива f . $\triangle$

Уколико је хомоморфизам раслојења $\Phi: E \rightarrow F$ додатно дифеоморфизам (самим тим је и f дифеоморфизам), онда за Φ кажемо да је **изоморфизам раслојења**.

Изоморфизам раслојења $\Phi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^r$ са производ раслојењем из Примера 3.2 зове се **тривијализација** од E , а ако постоји, онда за векторско раслојење E кажемо да је **тривијално**. Свака карта раслојења $\tilde{\varphi}$ дефинише изоморфизам раслојења

$$(\varphi^{-1} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}) \circ \tilde{\varphi}: E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r,$$

који зовемо **локална тривијализација** од E над U . Наравно, свако векторско раслојење је локално тривијално у смислу да тривијализација постоји над неком околинном сваке тачке из базе. Међутим, не можемо очекивати да локална тривијализација постоји за сваки подскуп $U \subseteq M$, али ако се то деси, кажемо да је раслојење **тривијално над** U .

Важан специјалан случај јавља се кад су и E и F векторска раслојења над истом многострукости M . У том случају згодно је корисити нешто рестриктивнију дефиницију која подразумева $f = \mathbb{1}_M$. **Хомоморфизам раслојења над** M је хомоморфизам раслојења који покрива идентичко пресликавање од M и чија је рестрикција на свако влакно линеарна. Ако постоји хомоморфизам раслојења $\Phi: E \rightarrow F$ над M који је такође и изоморфизам раслојења, онда је Φ **изоморфизам раслојења над** M и кажемо да су E и F **изоморфни над** M .

¹Hassler Whitney (1907–1989), амерички математичар

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Phi} & F \\
 \searrow \pi_E & & \swarrow \pi_F \\
 & M &
 \end{array}$$

3.2 Покретни репери

Сечење векторског раслојења $\pi: E \rightarrow M$ над отвореним скупом $U \subseteq M$ је пресликавање $\sigma: U \rightarrow E$ такво да је $\pi \circ \sigma = 1_U$. Зато свакој тачки $p \in U$, сечење σ додељује елемент из влакна E_p . Израз сечење долази из геометријске интерпретације слике $\sigma(U) \subset E$ коју видимо као подскуп простора раслојења E . Основни пример сечења је векторско поље на многострукости M , што је глатко сечење тангентног раслојења TM над M .

Ако је σ глатко сечење векторског раслојења $\pi: E \rightarrow M$, тада $\pi \circ \sigma = 1_M$ повлачи инјективност од σ и $T\sigma$, те из непрекидности од π следи да је σ смештање, а $\sigma(M)$ подмногострукост од E . Посебно, свако векторско раслојење дозвољава канонско сечење које зовемо **нула сечење**, које свакој тачки $p \in M$ додељује нула вектор $0 \in E_p$, што даје природно смештање $M \hookrightarrow E$.

Пример 3.7. Сечење производ раслојења $\pi_M: M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ је $\sigma: M \rightarrow M \times \mathbb{R}^r$ које има облик $\sigma = (1_M, f)$ за неко пресликавање $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$, те је σ глатко ако и само ако је f глатко. Зато је глатко сечење производ многострукости ранга r над M суштински једнако глатком пресликавању $f: M \rightarrow \mathbb{R}^r$. $\triangle$

Скуп свих глатких сечења од E над $U \subseteq M$ означавамо са $\Gamma(U, E)$, док ако је $U = M$ користимо ознаку $\Gamma(E) = \Gamma(M, E)$. Приметимо да је скуп $\Gamma(U, E)$ векторски простор над $\mathbb{R}$ у односу на сабирање и множење скаларом који су дефинисани по тачкама са $(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)(p) = c_1\sigma_1(p) + c_2\sigma_2(p)$ за $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, E)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $p \in U$. Као у случају векторских поља $\mathfrak{X}(U) = \Gamma(TU) = \Gamma(U, TM)$, глатка сечења од E могу се множити глатким функцијама $f \in \mathfrak{F}(U)$ са $(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p)$, те је $\Gamma(U, E)$ модул над прстеном $\mathfrak{F}(U)$.

Нека је M многострукост димензије n , а $U \subseteq M$ неки њен отворен подскуп. Посматрајмо векторско раслојење $\pi: E \rightarrow M$ ранга r . **Локални њокрејни рејер** за E над U је уређена r -торка $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ глатких сечења над U ($\sigma_i \in \Gamma(U, E)$ за $1 \leq i \leq r$) таква да вектори $\sigma_1(p), \dots, \sigma_r(p)$ чине базу влакна E_p за свако $p \in U$. Посебно, локални покретни репер за E над M зовемо **глобални њокрејни рејер** за E .

Најчешће је посматрано векторско раслојење баш тангентно раслојење ($E = TM$), те тада за покретне репере за TM кажемо да су **њокрејни рејери мнојосјруко-сји** M . Другим речима, локални покретни репер многострукости M над U је уређена m -торка векторских поља на U чије вредности у свакој тачки $p \in U$ чине базу тангентног простора T_pM . За многострукост која дозвољава глобални покретни репер кажемо да је **њаралелизабилна**.

Пример 3.8. Ако је (U, φ) произвољна карта многострукости M , а $x_i = \pi_i \circ \varphi$ одговарајуће координатне функције, тада координатна векторска поља чине локални покретни репер многострукости

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

над U и зовемо га **координатни њокрејни рејер**. Наравно, свака тачка многострукости има околину над којом постоји такав локални покретни репер. Координатна векторска поља у оквиру неке карте омогућавају да се векторска поља изразе на згодан начин. $\triangle$

Пример 3.9. Стандардна база $(e_1, \dots, e_r)$ за $\mathbb{R}^r$ са $E_i(p) = (p, e_i)$ за $1 \leq i \leq r$ и $p \in M$ даје глобални покретни репер $(E_1, \dots, E_r)$ за производ раслојење $M \times \mathbb{R}^r$. $\triangle$

Пример 3.10. Нека је $\pi: E \rightarrow M$ векторско раслојење ранга r . Локална тривијализација $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ од E над $U \subseteq M$ генерише локални покретни репер заснован на Примеру 3.9, где дефинишемо $\sigma_i = \Phi^{-1} \circ E_i: U \rightarrow E$ за $1 \leq i \leq r$. Како је $\pi = \pi_U \circ \Phi$ имамо $\pi \circ \sigma_i = \pi \circ \Phi^{-1} \circ E_i = \pi_U \circ E_i = \mathbb{1}_U$, те је σ_i сечење, а оно је глатко јер је Φ дифеоморфизам. Како се Φ рестрикује у изоморфизам и $\Phi \circ \sigma_i = E_i$, то је $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ локални покретни репер за E над U и кажемо да је тај покретни репер **одговарајући за Φ** .

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^r \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_U \\ & U & \\ \sigma_i \nearrow & & \nwarrow E_i \end{array}$$

Обратно, ако је $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ локални покретни репер за E над U , онда је пресликавање $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ дато са $\Phi(\sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i(p)) = (p, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ за свако $p \in U$, локална тривијализација од E над U . $\triangle$

Из претходног примера видимо да је егзистенција локалног покретног репера за E над U еквивалентна са егзистенцијом локалне тривијализације над U . Као последицу имамо наредну теорему.

Теорема 3.1. Векторско раслојење E над многострукошћу M је тривијално ако и само ако постоји глобални покретни репер за E над M . Посебно, тангентно раслојење TM је тривијално ако и само ако је многострукошћ M паралелизабилна.

Пример 3.11. Многострукошћ M димензије n са атласом од само једне карте $\{(M, \varphi)\}$ индукује природну глобалну тривијализацију $(\varphi^{-1} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}) \circ \tilde{\varphi}: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$, одакле следи да је тангентно раслојење TM тривијално, а сама многострукошћ M паралелизабилна. $\triangle$

Пример 3.12. Нека је G Лијева група са неутралом $e \in G$. Посматрајмо $f: G \times T_e G \rightarrow TG$ задато са $f(p, X) = (T_e L_p)(X)$, где је $L_p: G \rightarrow G$ дифеоморфизам дефинисан са $L_p(q) = pq$. Тада је пресликавање f^{-1} глобална тривијализација као дифеоморфизам између TG и $G \times T_e G \cong G \times \mathbb{R}^{\dim G}$, те је свака Лијева група паралелизабилна. $\triangle$

Нека је $\pi: E \rightarrow M$ векторско раслојење. **Подраслојење** од E је подскуп $D \subseteq E$ такав да је рестрикција $\pi|_D: D \rightarrow M$ векторско раслојење, а инклузија $\iota: D \hookrightarrow E$ хомоморфизам раслојења над M . Посебно, **дисприбуција** на M је подраслојење тангентног раслојења, а његова димензија је ранг тог подраслојења. Наредна теорема нам даје критеријум за проверу да ли унија неких потпростора чини подраслојење.

Теорема 3.2. Нека је E векторско раслојење над многострукошћу M и претпоставимо да за свако $p \in M$ имамо k -димензиони линеарни потпростор $D_p \subseteq E_p$. Тада је $D = \bigsqcup_{p \in M} D_p \subseteq E$ подраслојење од E ако и само ако свака тачка из M има околину $U \subseteq M$ над којом постоји локални покретни репер за D .

Доказ. Користимо Пример 3.10 и везу између локалних тривијализација и локалних покретних репера. Ако је D подраслојење онда локална тривијализација лако даје тражени локални покретни репер за D . Са друге стране, нека је $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ локални покретни репер за D над неким отвореним подскупом који садржи $p \in M$. Можемо га допунити до локалног покретног репера $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ за E над неком околином U од p . Тај локални покретни репер је одговарајући за локалну тривијализацију $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ која је дефинисана са $\Phi(\sum_{i=1}^r \lambda_i \sigma_i(q)) = (q, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Међутим, Φ

шаље $D \cap \pi^{-1}(U)$ у подскуп $\{(q, \lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) : q \in U; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \subseteq U \times \mathbb{R}^r$, што је подмногострукост. Штавише, пресликавање $\Psi: D \cap \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ дефинисано са $\Psi(\sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(q)) = (q, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ је локална тривијализација од D , те је D векторско раслојење. $\square$

Претпоставимо да су $\pi_E: E \rightarrow M$ и $\pi_F: F \rightarrow M$ векторска раслојења и да је $\Phi: E \rightarrow F$ хомоморфизам раслојења над M . **Ранг** од Φ у тачки $p \in M$ је ранг линеарног пресликавања $\Phi|_{E_p}$, те уколико је он исти за свако $p \in M$ кажемо да Φ има **константан ранг**. Дефинишимо подскупе $\text{Ker } \Phi \subseteq E$ и $\text{Im } \Phi \subseteq F$ са

$$\text{Ker } \Phi = \bigsqcup_{p \in M} \text{Ker}(\Phi|_{E_p}) \quad \text{и} \quad \text{Im } \Phi = \bigsqcup_{p \in M} \text{Im}(\Phi|_{E_p}).$$

Како влакна раслојења свуда имају исту димензију, да би $\text{Ker } \Phi$ и $\text{Im } \Phi$ били подраслојења, неопходно је да Φ има константан ранг. Међутим, важи и обрат, као што се може видети из наредне теореме која нам омогућава да добијемо нова подраслојења (видети Ли [81, Теорема 10.34]).

Теорема 3.3. Нека су E и F векторска раслојења над многишћу M и нека је $\Phi: E \rightarrow F$ хомоморфизам раслојења над M . Ако Φ има константан ранг, онда је $\text{Ker } \Phi$ подраслојење од E , а $\text{Im } \Phi$ подраслојење од F .

Доказ. Претпоставимо да Φ има константан ранг ρ . За произвољно $p \in M$ можемо изабрати локални покретни репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ за E над околином $U \ni p$. Пресликавања $\Phi \circ \sigma_i: U \rightarrow F$ за $1 \leq i \leq r$ су глатка сечења од F над U . Како та сечења разапињу $(\text{Im } \Phi)|_U$, можемо претпоставити (након што испремештамо индексе уколико је потребно) да елементи $\Phi \circ \sigma_1(p), \dots, \Phi \circ \sigma_\rho(p)$ чине базу за $\text{Im}(\Phi|_{E_p})$. Из непрекидности они остају линеарно независни у некој околини $V \ni p$, те је због константног ранга $(\Phi \circ \sigma_1, \dots, \Phi \circ \sigma_\rho)$ локални покретни репер за $\text{Im } \Phi$ над V , што доказује да је $\text{Im } \Phi$ подраслојење од F .

Посматрајмо подраслојење $E_0 \subseteq E|_V$ разапнуто са $\sigma_1, \dots, \sigma_\rho$. Како је хомоморфизам раслојења $\Phi|_{E_0}: E_0 \rightarrow (\text{Im } \Phi)|_V$ бијективан он је изоморфизам раслојења. Дефинишимо хомоморфизам раслојења $\Psi: E|_V \rightarrow E|_V$ са $\Psi = \mathbb{1} - (\Phi|_{E_0})^{-1} \circ \Phi$ да бисмо видели да је $\Phi \circ \Psi = 0$ како на E_0 , тако и на $(\text{Ker } \Phi)|_V$. Међутим, E_0 и $(\text{Ker } \Phi)|_V$ заједно разапињу $E|_V$, те Ψ своје вредности узима у $(\text{Ker } \Phi)|_V$ одакле је $\text{Im } \Psi = (\text{Ker } \Phi)|_V$ подраслојење од $E|_V$, што доказује да је $\text{Ker } \Phi$ подраслојење од E . $\square$

3.3 Векторска поља на сфери

Питање о томе колико постоји линеарно независних векторских поља на сфери је класичан проблем диференцијалне топологије. Нека $\text{Span}(M) \in \mathbb{N}_0$ означава максималан број линеарно независних векторских поља на многострукости M . Ми смо заинтересовани за вредности $\text{Span}(\mathbf{S}^{n-1})$, тако да посматрамо векторска поља на сфери $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Свакој тачки $x \in \mathbf{S}^{n-1}$ желимо да на гладак начин доделимо вектор $V(x)$ тангентан на x , односно ортогоналан на позициони вектор тачке x . Нула вектор је ортогоналан на све, што нам не одговара (јер нарушава линеарну независност), те тражимо векторска поља која нигде нису нула. Такво векторско поље можемо (глатко) нормирати да добијемо $\|V(x)\| = 1$ за свако x , после чега се потрага своди на глатка пресликавања $V: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ таква да $V(x) \perp x$ важи за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$.

Пример 3.13. Размотримо стандардни тополошки аргумент, где тражено векторско поље V генерише хомотопију $h_t(x) = x \cos(\pi t) + V(x) \sin(\pi t)$ између идентичког

$h_0 = \mathbb{1}_{\mathbf{S}^{n-1}}$ и антиподалног пресликавања $h_1 = -\mathbb{1}_{\mathbf{S}^{n-1}}$. Степен непрекидног пресликавања сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ на саму себе је исти за хомотопна пресликавања, те је $(-1)^n$ (степен антиподалног пресликавања као композиција n рефлексива) једнак 1 (степен идентичког пресликавања), одакле следи да је n парно. Закључујемо да за непарно n тражено векторско поље не постоји, што даје $\text{Span}(\mathbf{S}^{2k}) = 0$. Ова тврдња је добро позната **теорема о чешљању јежа** (*hairy ball theorem*) која каже да не постоји свуда ненула непрекидно векторско поље на парнодимензионим сферама, или слободно је речено, не можемо почешљати јежа а да не остане да штрчи неки чуперак. $\triangle$

Пример 3.14. За парно n можемо идентификовати $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^{n/2}$, те поставити $V(x) = ix$ што очигледно јесте векторско поље на свим сферама непарне димензије, што даје $\text{Span}(\mathbf{S}^{2k+1}) > 0$. У специјалном случају за $n = 2$ добијамо глобални покретни репер на кругу $\mathbf{S}^1$ који се састоји од једног векторског поља датог са $V(x) = ix$, што можемо описати као јединично тангентно векторско поље које је усмерено математички позитивно. $\triangle$

Векторско поље на $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ можемо потражити у облику $V(x) = Ax$ за неку матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Како захтевамо $Ax \perp x$, то имамо

$$x^T Ax = 0 \quad (3.1)$$

за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, а самим тим (одговарајућим скалирањем) и за свако $x \in \mathbb{R}^n$. Поларизацијом (3.1), $0 = (x+y)^T A(x+y) = x^T Ay + y^T Ax = x^T Ay + x^T A^T y = x^T (A + A^T)y$ важи за свако $x, y \in \mathbb{R}^n$, те је $A + A^T = 0$. Дакле, последица услова (3.1) је антисиметрична матрица $A = -A^T$. Важи и обрат јер антисиметрична матрица A повлачи $2x^T Ax = x^T (A + A^T)x = 0$, те закључујемо да траженом векторском пољу једнозначно одговара нека антисиметрична матрица A .

Додатно, како је V нормирано то важи $\|V(x)\| = \|x\|$, што повлачи $(Ax)^T (Ax) = x^T x$, одакле је $x^T (A^T A - \mathbb{1})x = 0$, што одговара услову (3.1) за матрицу $A^T A - \mathbb{1}$ која мора бити антисиметрична. Међутим $A^T A - \mathbb{1}$ је очигледно симетрична, одакле следи $A^T A = \mathbb{1}$, односно $A^2 = -\mathbb{1}$. Тражено векторско поље зависи од антисиметричне ортогоналне матрице A , а како је тада $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(-\mathbb{1}) = (-1)^n$, то можемо додатно потврдити да непарно n не долази у обзир.

Ако постоје $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^{n-1})$ тако да су вектори $V_1(x), \dots, V_k(x) \in T_x \mathbf{S}^{n-1} \cong x^\perp$ линеарно независни за свако $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, тада Грам²–Шмитов³ поступак конструише векторска поља са условом да су $V_1(x), \dots, V_k(x)$ међусобно ортогонални за $x \in \mathbf{S}^{n-1}$. Због тога можемо претпоставити да за одговарајуће матрице $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ додатно важи $A_i x \perp A_j x$ за $1 \leq i \neq j \leq k$. То доноси једначину $x^T (A_i^T A_j)x = 0$, која попут (3.1) повлачи антисиметричност за $A_i^T A_j$. Тако добијамо $-A_i A_j = A_i^T A_j = -(A_i^T A_j)^T = -A_j^T A_i = A_j A_i$. Коначно, претходно наведени услови описују се Хурвицовом⁴ релацијом

$$A_i A_j + A_j A_i = -2\delta_{ij} \mathbb{1}, \quad (3.2)$$

која важи за свако $1 \leq i, j \leq k$.

Класичан проблем је одредити паралелизабилне сфере $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, односно оне за које важи $\text{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) = n - 1$. Користећи методе алгебарске топологије, Бот⁵ и Милнор [27], те независно од њих Кервер [75], доказали су 1958. да су једине паралелизабилне сфере оне са $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Ово питање уско је повезано са егзистенцијом нормираних алгебри са дељењем над реалним бројевима којих укупно има четири, а то су: реални бројеви $\mathbb{R}$, комплексни бројеви $\mathbb{C}$, кватерниони $\mathbb{H}$ и октониони

²Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), дански математичар

³Erhard Schmidt (1876–1959), немачки математичар

⁴Adolf Hurwitz (1859–1919), немачки математичар

⁵Raoul Bott (1923–2005), мађарско-амерички математичар

○. Конкретно, једине паралелизабилне сфере су $\mathbf{S}^0$, $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^3$ и $\mathbf{S}^7$, које редом одговарају алгебрама $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$.

Пример 3.15. У случају $n = 4$ можемо поставити три антисиметричне ортогоналне матрице које испуњавају Хурвицове релације (3.2) са

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На овај начин добијамо три ортонормирана векторска поља на $\mathbf{S}^3$, те је сфера $\mathbf{S}^3$ паралелизабилна. Није тешко приметити да матрице A_1, A_2, A_3 одговарају множењу јединичним кватернионима $i, j, k \in \mathbb{H}$. $\triangle$

Антисиметричне ортогоналне матрице за које важи (3.2) су независно посматрали Хурвиц [73] и Радон⁶ [105] (такође видети Екман⁷ [47]), што је уско повезано са **Хурвиц–Радон функцијом** $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ која је дата са

$$\rho(a \cdot 2^{4b+c}) = 8b + 2^c \quad \text{за} \quad 0 \leq c \leq 3 \quad \text{и} \quad 2 \nmid a. \quad (3.3)$$

Њихова алгебарска конструкција дала је доњу границу, $\text{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) \geq \rho(n) - 1$. Међутим, Адамс⁸ је искористио софистициране технике теорије хомотопије да би омогућио коначно решење 1962. године [1]. Одговор је да не постоји још независних векторских поља сем оних која су већ конструисана.

Теорема 3.4. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\text{Span}(\mathbf{S}^{n-1}) = \rho(n) - 1$.

Последично, једине паралелизабилне сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ су оне за које је $\rho(n) = n$, што се дешава само за $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Пример 3.16. Иако сфера $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ не дозвољава свуда ненула векторско поље, на њој постоји векторско поље које је нула у тачно једној тачки. Стереографској пројекцији која је дата са $\varphi_-(x, y, z) = (x/(1-z), y/(1-z)) = (u, v)$ одговарају координатна векторска поља

$$\frac{\partial}{\partial u} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = (\varphi_-^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \circ \varphi_- \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\}),$$

где је $x_1 = u \circ \varphi_-$. Друга карта, $\varphi_+(x, y, z) = (x/(1+z), y/(1+z)) = (\bar{u}, \bar{v})$ сагласна је са φ_- на пресеку $\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+, p_-\}$, а веза добијена из (1.4) гласи

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right).$$

За $y_1 = \bar{u} \circ \varphi_+$ и $y_2 = \bar{v} \circ \varphi_+$ можемо израчунати

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial(\bar{u} \circ \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{\partial \frac{u}{u^2+v^2}}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2} \circ \varphi_- = (\bar{v}^2 - \bar{u}^2) \circ \varphi_+ = \frac{y^2 - x^2}{(1+z)^2}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial(\bar{v} \circ \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{\partial \frac{v}{u^2+v^2}}{\partial u} \circ \varphi_- = \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2} \circ \varphi_- = (-2\bar{u}\bar{v}) \circ \varphi_+ = \frac{-2xy}{(1+z)^2}, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{y^2 - x^2}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{-2xy}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_2},$$

⁶Johann Karl August Radon (1887–1956), аустријски математичар

⁷Beno Eckmann (1917–2008), швајцарски математичар

⁸John Frank Adams (1930–1989), британски математичар

те се векторско поље $\partial/\partial x_1$ може продужити и на тачку p_+ . Конкретном формулом

$$V_q = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_q & \text{за } q \in \mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\} \\ \left(\frac{y^2 - x^2}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{-2xy}{(1+z)^2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right)_q & \text{за } q \in \mathbf{S}^2 \setminus \{p_-\} \end{cases}$$

се V добро дефинише у свакој тачки сфере $\mathbf{S}^2$, а како је глатко у локалним координатама очигледно имамо $V \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}^2)$. Наравно, $V_{p_+} = 0$, док је $V_q = (\partial/\partial x_1)_q \neq 0$ на $\mathbf{S}^2 \setminus \{p_+\}$. $\triangle$

Наравно, сваких k линеарно независних векторских поља на сфери разапињу k -димензиону дистрибуцију. Међутим, иако свака дистрибуција није одређена на тај начин неким векторским пољима, знамо да сфера $\mathbf{S}^m$ дозвољава k -димензиону непрекидну дистрибуцију за $2k \leq m$ ако и само ако дозвољава k линеарно независних непрекидних векторских поља (видети Стинрод⁹ [115, Теорема 27.16]). Одавде имамо наредну последицу Теореме 3.4.

Теорема 3.5. *Сфера $\mathbf{S}^{n-1}$ за $\rho(n) \leq k \leq n-1-\rho(n)$ не дозвољава k -димензиону дистрибуцију.*

3.4 Ковекторска поља

Кошанјенјни њросјор многострукости M у тачки $p \in M$ је дуални простор тангентног простора,

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Елементи котангентног простора T_p^*M су **ѡанјенјни ковеќјори** у p , што су линеарне функције $\omega_p: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. По узору на векторско поље, желимо да истражимо пресликавање ω које ће свакој тачки $p \in M$ глатко доделити ковеќор ω_p у p .

На пример, за сваку функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ дефинишемо њен **диференцијал** df , тако што тачки $p \in M$ доделимо ковеќор $df_p \in T_p^*M$ дат са $df_p(X_p) = X_p(f)$ за $X_p \in T_pM$. Тангентно пресликавање у овом важном специјалном случају $f \in \mathfrak{F}(M)$ рачунамо у некој карти (U, φ) у $p \in M$ по (2.2), одакле добијамо $T_p f(\partial/\partial x_j)_p = (\partial f/\partial x_j)(p)(d/dt)_{f(p)}$, те из линеарности тангентног пресликавања важи

$$T_p f(X_p) = X_p(f) \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)}$$

за $X_p \in T_pM$. Одавде следи да ако искористимо предности идентификације $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, тада диференцијал df_p природно можемо поистоветити са тангентним пресликавањем $T_p f$.

Нека је M n -многострукост, а (U, φ) карта у произвољној тачки $p \in M$ са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. По Теореме 2.3, вектори $(\partial/\partial x_1)_p, \dots, (\partial/\partial x_n)_p$ чине базу тангентног простора T_pM . Како је $(dx_i)_p(\partial/\partial x_j)_p = (\partial/\partial x_j)_p(x_i) = \delta_{ij}$ за $1 \leq i, j \leq n$, то ковеќори $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ чине базу котангентног простора T_p^*M која је дуална датој бази за T_pM . Додатно, за $\omega_p \in T_p^*M$ и $X_p \in T_pM$, из (2.1) имамо

$$\omega_p(X_p) = \omega_p \left(\sum_{i=1}^n X_p(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^n X_p(x_i) \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{i=1}^n \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (dx_i)_p(X_p),$$

⁹Norman Earl Steenrod (1910–1971), амерички математичар

одакле добијамо

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (dx_i)_p. \quad (3.4)$$

Теорема 3.6. Нека је M n -многострукост, а (U, φ) карта у $p \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Тада ковектори $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ чине базу за T_p^*M и (3.4) важи за свако $\omega_p \in T_p^*M$.

Како желимо да пресликавање $\omega: p \mapsto \omega_p$ буде глатко потребно је да његов кодомен буде многострукост. По узору на тангентно раслојење конструишемо **котангентно раслојење**

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

многострукости M као унију свих котангентних простора. Као у случају тангентног раслојења, котангентно раслојење иде у пакету са пројекцијом $\pi: T^*M \rightarrow M$ која је природно дата са $\pi(\omega_p) = p$ за $\omega_p \in T_p^*M$. Слично конструкцији тангентног раслојења користимо карте (U, φ) са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$ да бисмо направили карте раслојења $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ са

$$\tilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (dx_i)_p \right) = (\varphi(p), \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Ако је $\tilde{\psi}: \pi^{-1}(V) \rightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$ још једно такво пресликавање, овог пута индуковано картом (V, ψ) са координатним функцијама $y_i = \pi_i \circ \psi$, тада из

$$(dx_i)_p = \sum_{j=1}^n \left((dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right) (dy_j)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) (dy_j)_p$$

имамо

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \tilde{\psi} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (dx_i)_p \right) = \tilde{\psi} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right) (dy_j)_p \right) \\ &= \left(\psi(p), \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_1}(p), \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x_i}{\partial y_n}(p) \right). \end{aligned}$$

Одговарајуће пресликавање $\tau: \varphi(U \cap V) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ је облика

$$\tau(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}(p) \end{pmatrix}$$

што је глатко, а заправо је пресликавање које $z \in \varphi(U \cap V)$ шаље у транспонат Јакобијеве матрице $T_{\psi \circ \varphi^{-1}(z)}(\varphi \circ \psi^{-1})$. Зато је T^*M векторско раслојење са атласом раслојења који чине карте раслојења $\tilde{\varphi}$, а самим тим T^*M је и глатка многострукост димензије $2n$.

Сечења котангентног раслојења су пресликавања $\omega: M \rightarrow T^*M$ за која важи $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. **Ковекторско поље** на многострукости M дефинишемо као глатко сечење котангентног раслојења T^*M , а скуп свих ковекторских поља обележавамо са $\mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^*M)$.

Ако је (U, φ) карта на M са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$, тада је свако сечење ω котангентног раслојења T^*U линеарна комбинација $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, за неке функције $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. Глаткоћа тих коефицијент функција зависи од глаткоће сечења јер за карту раслојења $\tilde{\varphi}$ од T^*U важи $\tilde{\varphi} \circ \omega = (\varphi, a_1, \dots, a_n)$, те је ω глатко ако и само ако је $a_i \in \mathfrak{F}(U)$ за све $1 \leq i \leq n$.

Лема 3.7. Ако је (U, φ) карта на n -многообразју M са координатним функцијама x_i , тада је сечење $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ котангентног раслојења T^*U тада и само ако су све коефицијентне функције $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ глатке.

За $f \in \mathfrak{F}(M)$, можемо посматрати диференцијал df који у оквиру карте (U, φ) мора бити облика $df = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$. Применом на координатне векторе добијамо коефицијент функције

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) f = (df) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j,$$

које су очигледно глатке, те имамо ковекторско поље $df \in \mathfrak{X}^*(M)$, као и локално изражавање,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (3.5)$$

Пример 3.17. Диференцијал функције $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x, y) = xy^2 \sin x$ рачунамо по формули (3.5),

$$df = \frac{\partial(xy^2 \sin x)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xy^2 \sin x)}{\partial y} dy = y^2(\sin x + x \cos x) dx + 2xy \sin x dy.$$

△

Пример 3.18. Иако је диференцијал глатке функције ковекторско поље, постоје ковекторска поља која нису диференцијал неке глатке функције. На пример, ако постоји $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$ такво да је $dx + x dy = df$, онда имамо $\partial f / \partial x = 1$ и $\partial f / \partial y = x$, одакле најпре следи $f(x, y) = x + \gamma(y)$, а затим $\gamma'(y) = x$, што је немогуће. △

Из формуле (3.5), директно се можемо уверити да диференцијал $d: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ има лепе особине из наредне леме.

Лема 3.8. За свако $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, $l \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, важи формула (3.5) као и

$$\begin{aligned} d(\alpha f + \beta h) &= \alpha df + \beta dh, \\ d(fh) &= f dh + h df, \\ d(l \circ f) &= (l' \circ f) df. \end{aligned}$$

Наравно, за константно $f \in \mathfrak{F}(M)$ је $df = 0$, док $df = 0$ за повезано M повлачи константно f , што је последица Леме 2.20.

За произвољно сечење ω котангентног раслојења T^*M и векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$, природно дефинишемо функцију $\omega(X): M \rightarrow \mathbb{R}$ са $\omega(X)_p = \omega_p(X_p)$ за $p \in M$. Произвољна функција $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ пролази кроз ω због $\omega(fX)_p = \omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p) = (f\omega(X))_p$, одакле следи $\omega(fX) = f\omega(X)$. У некој карти (U, φ) на M , из формула (3.4) и (2.1) можемо израчунати

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx_i \left(\sum_{j=1}^n X x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) X x_j dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) X x_i.$$

Уколико је ω глатко сечење, Лема 3.7 даје $\omega(\partial_i) \in \mathfrak{F}(U)$, одакле је $\omega(X)$ глатко на произвољној координатној околини, те је $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$. Обратно, ако је $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$, то посебно важи за ∂_i , те је $\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i) dx_i$ глатко по Леми 3.7. Дакле, ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ се може препознати и као пресликавање $\omega: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

Лема 3.9. Сечење ω коїтанїєнїїної раслоїєња T^*M је ілаїїко ако и само ако за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ важи $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$.

Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости M и N . Дуално глобалном тангентном пресликавању $f_* = Tf: TM \rightarrow TN$ које гура векторе из M у N , можемо посматрати пресликавање које окреће стрелицу и враћа назад ковекторе из N у M . **Повлачење** (*pullback*) је фамилија пресликавања $f_p^*: T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ за $p \in M$ дефинисана са

$$(f_p^*(\omega_{f(p)}))(X_p) = \omega_{f(p)}(f_*(X_p))$$

за ковектор $\omega_{f(p)} \in T_{f(p)}^*N$ и вектор $X_p \in T_pM$.

За разлику од векторских поља која у општем случају не можемо гурнути глатким пресликавањем, ковекторска поља се увек могу повући глатким пресликавањем. За $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ дефинишемо **їовлачење** $f^*\omega$ као сечење котангентног раслоїєња T^*M тако да је $(f^*\omega)_p = f_p^*(\omega_{f(p)})$ за $p \in M$, односно да $(f^*\omega)_p(X_p) = \omega_{f(p)}(f_*(X_p))$ важи за свако $X_p \in T_pM$. Такође се могу повлачити и функције $h \in \mathfrak{F}(N)$ тако што дефинишемо $f^*h = h \circ f \in \mathfrak{F}(M)$.

Лема 3.10. За ілаїїко їресликавање $f: M \rightarrow N$ и $\omega, \tau \in \mathfrak{X}^*(N)$, їе $h \in \mathfrak{F}(N)$ важи

$$\begin{aligned} f^*(dh) &= d(f^*h), \\ f^*(\omega + \tau) &= f^*\omega + f^*\tau, \\ f^*(h\omega) &= (f^*h)(f^*\omega). \end{aligned}$$

Доказ. Повлачење и диференцијал комутирају јер за $p \in M$ и $X_p \in T_pM$ имамо

$$(f^*dh)_p(X_p) = (dh)_{f(p)}(f_*(X_p)) = (f_*(X_p))h = X_p(h \circ f) = X_p(f^*h) = (d(f^*h))_p(X_p),$$

док преостале две једнакости лако проверавамо. $\square$

Теорема 3.11. Ако је $f: M \rightarrow N$ ілаїїко и $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ онда је $f^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Доказ. За $p \in M$ имамо карту (U, ϕ) у $p \in M$ са $x_j = \pi_j \circ \phi$ за $1 \leq j \leq m = \dim M$ и карту (V, ψ) у $f(p) \in N$ са $y_i = \pi_i \circ \psi$ за $1 \leq i \leq n = \dim N$, тако да је $f(U) \subseteq V$ и $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ глатко. Како је $\omega|_V = \sum_{i=1}^n a_i dy_i$ за неке $a_i \in \mathfrak{F}(V)$, то из (3.5) имамо

$$(f^*\omega)|_U = \sum_{i=1}^n (f^*a_i) f^*(dy_i) = \sum_{i=1}^n (f^*a_i) d(f^*y_i) = \sum_{i=1}^n (a_i \circ f) d(y_i \circ f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i \circ f) \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j} dx_j.$$

Како су коефицијент функције $\sum_{i=1}^n (a_i \circ f)(\partial(y_i \circ f)/\partial x_j)$ глатке, то је $f^*\omega$ глатко на U по Леми 3.7. Дакле, $f^*\omega$ је глатко у свакој тачки $p \in M$, одакле следи $f^*\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. $\square$

Пример 3.19. Нека је $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $(u, v) = f(x, y, z) = (x^2y, y \sin z)$, а $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$ дато са $\omega = u dv + v du$. Директним рачуном имамо

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (f^*u)(f^*dv) + (f^*v)(f^*du) = (u \circ f) d(v \circ f) + (v \circ f) d(u \circ f) \\ &= (x^2y) d(y \sin z) + (y \sin z) d(x^2y) = x^2y(\sin z dy + y \cos z dz) + y \sin z(2xy dx + x^2 dy), \end{aligned}$$

одакле добијамо $f^*\omega = 2xy^2 \sin z dx + 2x^2y \sin z dy + x^2y^2 \cos z dz$. $\triangle$

3.5 Тензорска поља

Појам тензорског поља на многострукости M уопштава појмове глатких реалних функција $\mathfrak{F}(M)$, векторских поља $\mathfrak{X}(M)$ и ковекторских поља $\mathfrak{X}^*(M)$, те омогућава општије објекте на многострукости. Тензори се јављају у много различитих облика, а њихова општа карактеристика је мултилинеарност.

У општем случају посматрамо модул $\mathcal{V}$ над прстеном K , као и њему дуалан модул $\mathcal{V}^* = \text{Hom}(\mathcal{V}, K)$. **Тензор** типа $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ на $\mathcal{V}$ је K -мултилинеарно пресликавање $A: (\mathcal{V}^*)^r \times (\mathcal{V})^s \rightarrow K$ и кажемо да је **рега** $r + s$. Скуп $\mathfrak{T}_s^r(\mathcal{V})$ свих тензора типа (r, s) на $\mathcal{V}$ је модул над K са уобичајеним дефиницијама сабирања и множења са елементима из K .

Тензорско поље A на многострукости M је тензор на $\mathfrak{F}(M)$ -модулу $\mathfrak{X}(M)$. То значи да је у питању $\mathfrak{F}(M)$ -мултилинеарно пресликавање

$$A: \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_r \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_s \rightarrow \mathfrak{F}(M),$$

те кажемо да је типа $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ и реда $r + s$. Самим тим, скуп $\mathfrak{T}_s^r(M)$ свих тензорских поља на M типа (r, s) је модул над $\mathfrak{F}(M)$.

У специјалном случају $(r, s) = (0, 0)$ тензорска поља су глатке функције на M , $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Штавише, тензорска поља уопштавају појмове векторских и ковекторских поља, што илуструју наредни примери.

Пример 3.20. Свако векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ даје тензорско поље $\bar{X}: \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ са $\bar{X}(\omega) = \omega(X)$. Обратно, за свако $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $Xf = df(X) = \bar{X}(df)$. То доноси природну идентификацију $\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$, те убудуће користимо исту ознаку $\bar{X} = X \in \mathfrak{X}(M)$, односно $X(\omega) = \omega(X)$ важи за свако $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. $\triangle$

Пример 3.21. По Леми 3.9, свако ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ је $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно пресликавање $\omega: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$, што одмах доноси инклузију $\mathfrak{X}^*(M) \subseteq \mathfrak{T}_1^0(M)$. Обратно, нека је $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(M)$. Дефинишемо $\bar{\omega}: M \rightarrow T^*M$ са $\bar{\omega}_p(X_p) = (\omega(X))(p)$ за $p \in M$ и $X_p \in T_pM$, где је $X \in \mathfrak{X}(M)$ произвољно продужење од X_p , које постоји по Примеру 2.24. Нека је (U, φ) карта у $p \in M$ и нека су $x_i = \pi_i \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$ одговарајуће координатне функције. По Леми 1.17 постоји цомбаста функција $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржана у U таква да је $b(p) = 1$. То нам омогућава да посматрамо глобално дефинисане објекте $bX(x_i) \in \mathfrak{F}(M)$ и $b\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$, те имамо

$$(\omega(X))(p) = (b^2\omega(X))(p) = (\omega(b^2X))(p) = \left(\omega \left(\sum_i bX(x_i)b\partial_i \right) \right)(p) = \sum_i X_p(x_i)(\omega(b\partial_i))(p).$$

Посебно, ако је $X_p = 0$ онда је $(\omega(X))(p) = 0$. Због тога, ако $Y \in \mathfrak{X}(M)$ задовољава $Y_p = X_p$, имамо $(\omega(X))(p) = (\omega(Y))(p)$, те је дефиниција од $\bar{\omega}_p$ независна од избора продужења X . Ово доноси идентификацију $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$, те као раније користимо исту ознаку $\bar{\omega} = \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. $\triangle$

Да бисмо доказали да је дато пресликавање $A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ тензорско поље, морамо показати да је $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по сваком аргументу понаособ. Адитивност по сваком аргументу је често очигледна, те је главно питање да ли се функције из $\mathfrak{F}(M)$ могу извући испред A са сваке позиције, односно да ли важи

$$A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, fX_i, \dots, X_s) = fA(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_i, \dots, X_s).$$

Пример 3.22. Размотримо пресликавање $E: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ дефинисано са $E(\omega, X) = \omega(X)$. Оно је очигледно $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по оба аргумента, те је $E \in \mathfrak{T}_1^1(M)$. $\triangle$

Пример 3.23. За фиксирано $0 \neq \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинишемо $F: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ са $F(X, Y) = X(\omega(Y))$. Пресликавање F је $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по првом аргументу, али је по другом само адитивно због $F(X, fY) = X(\omega(fY)) = X(f\omega(Y)) = (Xf)\omega(Y) + fF(X, Y)$, тако да F није тензорско поље. $\triangle$

Пример 3.24. Свако $\mathfrak{F}(M)$ -мултилинеарно пресликавање $A: \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ се природно идентификује са $\bar{A}: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ које је дефинисано са $\bar{A}(\omega, X_1, \dots, X_s) = \omega(A(X_1, \dots, X_s))$, што индукује тензорско поље $\bar{A} \in \mathfrak{T}_s^1(M)$. Због тога користимо исту ознаку $\bar{A} = A$ и подразумевамо да важи $A \in \mathfrak{T}_s^1(M)$. $\triangle$

За тензоре типа $(0, s)$ кажемо да су **коваријантни** реда s , док за тензоре типа $(r, 0)$ кажемо да су **контраваријантни** реда $r \geq 1$. На пример, реалне глатке функције и ковекторска поља су коваријантни тензори, док су векторска поља контраваријантни тензори.

У општем случају (за K -модул $\mathcal{V}$), док природно можемо сабирати само тензоре истог типа, било која два тензора могу се множити. За $A_1 \in \mathfrak{T}_{s_1}^{r_1}(\mathcal{V})$ и $A_2 \in \mathfrak{T}_{s_2}^{r_2}(\mathcal{V})$ дефинишемо $A_1 \otimes A_2: (\mathcal{V}^*)^{r_1+r_2} \times (\mathcal{V})^{s_1+s_2} \rightarrow K$ са

$$\begin{aligned} (A_1 \otimes A_2)(\omega_1, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_1, \dots, X_{s_1+s_2}) \\ = A_1(\omega_1, \dots, \omega_{r_1}, X_1, \dots, X_{s_1}) A_2(\omega_{r_1+1}, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_{s_1+1}, \dots, X_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Тада је $A_1 \otimes A_2$ тензор типа $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ који зовемо **тензорски производ** од A_1 и A_2 .

Посебно за $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ и $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $A \otimes f = f \otimes A = fA$, док за $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$ производ $f_1 \otimes f_2$ даје обично множење функција у $\mathfrak{F}(M)$. Тензорски производ је $\mathfrak{F}(M)$ -линеаран, јер $(f_1 A_1 + f_2 A_2) \otimes B = f_1 A_1 \otimes B + f_2 A_2 \otimes B$ важи за $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$, $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}_{s_1}^{r_1}(M)$, $B \in \mathfrak{T}_{s_2}^{r_2}(M)$, као и сличан идентитет по другом аргументу.

Такође, директно из дефиниције следи да је тензорски производ асоцијативан, те за тензоре A, B, C произвољних типова често пишемо без заграда $A \otimes B \otimes C$. Приметимо да за коваријантан тензор A и контраваријантан тензор B по дефиницији важи $A \otimes B = B \otimes A$. Међутим, иако функције (или општије елементи из K) комутирају са било чим, $f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes (fB)$, тензорски производ у општем случају није комутативан.

Пример 3.25. На координатној околини имамо $(dx_1 \otimes dx_2)(\partial_1, \partial_2) = dx_1(\partial_1) dx_2(\partial_2) = 1$, као и $(dx_2 \otimes dx_1)(\partial_1, \partial_2) = dx_2(\partial_1) dx_1(\partial_2) = 0$, тако да је $dx_1 \otimes dx_2 \neq dx_2 \otimes dx_1$. $\triangle$

По узору на векторско и ковекторско поље, произвољном тензорском пољу A на многострукости M можемо доделити вредност A_p у свакој тачки $p \in M$. Испоставља се да вредност A_p не зависи од целокупних векторских и ковекторских поља, чак ни од њихових вредности у некој околини тачке p , већ искључиво од њихових појединачних вредности у самој тачки p .

Лема 3.12. Ако неко ковекторско поље $\omega_1, \dots, \omega_r$ или неко векторско поље $X_1, \dots, X_s$ има вредности 0 у тачки $p \in M$, тада за $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ важи $A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$.

Доказ. У Примеру 3.21 смо већ доказали ову лему за ковекторска поља. Слично можемо рачунати вредност тензорског поља у карти (U, φ) у $p \in M$ користећи домбасту функцију $b \in \mathfrak{F}(M)$ подржану у U са $b(p) = 1$. Тада нам продужења

$$bX_j(x_i) \in \mathfrak{F}(M), \quad b\partial_i \in \mathfrak{X}(M), \quad b\omega_j(\partial_i) \in \mathfrak{F}(M), \quad bdx_i \in \mathfrak{X}^*(M)$$

омогућавају да напишемо

$$\begin{aligned} b^2 A(\dots, X_j, \dots) &= A(\dots, \sum_{i=1}^n bX_j(x_i) b\partial_i, \dots) = \sum_{i=1}^n bX_j(x_i) A(\dots, b\partial_i, \dots), \\ b^2 A(\dots, \omega_j, \dots) &= A(\dots, \sum_{i=1}^n b\omega_j(\partial_i) bdx_i, \dots) = \sum_{i=1}^n b\omega_j(\partial_i) A(\dots, bdx_i, \dots), \end{aligned}$$

што рачунамо у тачки p . Одатле, ако је $(X_j)_p = 0$ за неко $1 \leq j \leq s$, тада добијамо $A(\dots, X_j, \dots)(p) = 0$, док $(\omega_j)_p = 0$ за неко $1 \leq j \leq r$ даје $A(\dots, \omega_j, \dots)(p) = 0$. $\square$

Теорема 3.13. Вредности $A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p)$ тензорског поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ у тачки $p \in M$ зависи само од појединачних вредности $(\omega_1)_p, \dots, (\omega_r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p$.

Доказ. Нека је $(\omega_i)_p = (\bar{\omega}_i)_p$ за $\omega_i, \bar{\omega}_i \in \mathfrak{X}^*(M)$, $1 \leq i \leq r$ и $(X_j)_p = (\bar{X}_j)_p$ за $X_j, \bar{X}_j \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \leq j \leq s$. Вредност разлике

$$\begin{aligned} A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) - A(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s) \\ = A(\omega_1 - \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) + A(\bar{\omega}_1, \omega_2 - \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \\ + \dots + A(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r, \bar{X}_1, \dots, X_s - \bar{X}_s) \end{aligned}$$

у тачки $p \in M$ једнака је 0 јер се сваки од $r + s$ чланова по Лемми 3.12 анулира у p . $\square$

Из Теореме 3.13 директно следи да тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ има вредност A_p у свакој тачки $p \in M$, што је функција $A_p: (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$A_p((\omega_1)_p, \dots, (\omega_r)_p, (X_1)_p, \dots, (X_s)_p) = A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)(p).$$

Лако је проверити $\mathbb{R}$ -мултилинеарност функције A_p , те рестриковањем тензорског поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ на тачку $p \in M$ добијамо тензор $A_p \in \mathfrak{T}_s^r(T_pM)$. Као што је векторско поље глатко сечење тангентног раслојења, тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ се може посматрати као глатко сечење одговарајућег тензорског раслојења које свакој тачки $p \in M$ додељује тензор A_p . Посебно, ова интерпретација нам омогућава да видимо рестрикцију $A|_U$ тензорског поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ на отворен подскуп $U \subset M$ као добро дефинисано тензорско поље на U , односно $A|_U \in \mathfrak{T}_s^r(U)$.

Нека је (U, ϕ) карта на n -многострукости M и нека су $x_i = \pi_i \circ \phi$ њене координатне функције. Координатне формуле, (2.1) за векторска поља и (3.4) за ковекторска поља, могу се лако проширити на тензорска поља произвољног типа. **Компоненте** тензорског поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ у односу на дату карту су функције

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A \left(dx_{i_1}, \dots, dx_{i_r}, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} \right) \in \mathfrak{F}(U),$$

које су дефинисане за све индексе $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$.

Компоненте ковекторског поља $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ су $\omega_j = \omega(\partial_j)$, што је виђено у формули (3.4), $\omega = \sum_j \omega_j dx_j$. Слично, компоненте векторског поља $X \in \mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ су $X^i = X(dx_i) = dx_i(X) = X(x_i)$, што се појављују у формули (2.1), $X = \sum_i X^i \partial_i$.

Пример 3.26. Уколико је $A \in \mathfrak{T}_s^1(M)$ представљено са $A: \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ као у Примеру 3.24, онда су његове компоненте одређене са

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \right) = \sum_{j=1}^n A_{i_1 \dots i_s}^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

јер је $A(dx_j, \partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) = dx_j(A(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s})) = \sum_k A_{i_1 \dots i_s}^k dx_j(\partial_k) = A_{i_1 \dots i_s}^j$. $\triangle$

Произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ се може изразити у терминима његових компоненти са

$$A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n} (\omega_1)_{i_1} \dots (\omega_r)_{i_r} (X_1)^{j_1} \dots (X_s)^{j_s} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (3.6)$$

те ако искористимо $(\omega_k)_i = \omega_k(\partial_i) = \partial_i(\omega_k)$ и $(X_k)^j = X_k(dx_j) = dx_j(X_k)$, добијамо

$$A = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_s}. \quad (3.7)$$

Можемо приметити да су у фиксираној карти компоненте суме тензора једноставно суме њихових компонената, док су компоненте тензорског производа дате са

$$(A \otimes B)_{j_1 \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_{r+r'}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot B_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}}.$$

Канонско упаривање између векторских и ковекторских поља индукује природну операцију на тензорским пољима која смањује тип тензора за један контраваријантни и један коваријантни индекс. Сама конструкција се заснива на следећем основном случају за тензорска поља типа $(1, 1)$.

Лема 3.14. *Постоји јединствено $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно пресликавање $\mathcal{C}: \mathfrak{T}_1^1(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ такво да је $\mathcal{C}(X \otimes \omega) = \omega(X)$ за све $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Доказ. У координатној околини U , свако $A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ се по формули (3.7) изражава са $A = \sum_{i,j=1}^n A_j^i \partial_i \otimes dx_j$. Како мора бити $\mathcal{C}(\partial_i \otimes dx_j) = dx_j(\partial_i) = \delta_{ij}$, принуђени смо да дефинишемо

$$\mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i = \sum_{i=1}^n A(dx_i, \partial_i).$$

Ова дефиниција доноси пресликавање $\mathcal{C}$ са траженим особинама на U . За проширење пресликавања на целу многострукост довољно је показати да је ова дефиниција независна од избора координатног система. Заиста,

$$\begin{aligned} \sum_k A \left(dy_k, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) &= \sum_k A \left(\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i, \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} A \left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} A \left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_i A \left(dx_i, \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

што комплетира доказ. $\square$

Пресликавање $\mathcal{C}$ из претходне леме зове се $(1, 1)$ **контракција**. Иако је дефинисана за тензорска поља, њена конструкција је по тачкама. Рестрикција тензорског поља на тачку $p \in M$ доноси тензор на векторском простору $T_p M$, где се контракција редукује на траг из линеарне алгебре, што илуструје наредни пример.

Пример 3.27. Нека је $\mathcal{V}$ коначно-димензиони векторски простор и нека је $L \in \text{End}(\mathcal{V})$ линеарни оператор који се по Примеру 3.24 може схватити као тензор типа $(1, 1)$. У односу на неку базу $(e_1, \dots, e_n)$ од $\mathcal{V}$, компоненте тензора $L \in \mathfrak{T}_1^1(\mathcal{V})$ одговарају улазима матрице L , због $L(e_i) = \sum_j L_j^i e_j$ (видети Пример 3.26). Зато је $\mathcal{C}L = \sum_j L_j^j = \text{Tr } L$, што показује да се контракција и траг од L поклапају. $\triangle$

У општем случају, бирамо једно контраваријантно место $1 \leq i \leq r$ и једно коваријантно место $1 \leq j \leq s$. За фиксиране $\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_r \in \mathfrak{X}^*(M)$ и $X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ одређује тензорско поље типа $(1, 1)$ са

$$(\omega_i, X_j) \mapsto A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s).$$

Примена контракције $\mathcal{C}$ на ово тензорско поље доноси глатку функцију на M . Добијамо,

$$(\mathcal{C}_j^i A)(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_s) \in \mathfrak{F}(M),$$

и зато $C_j^i A \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$. Кажемо да је $C_j^i A$ **контракција** од A над позицијама i, j . Компоненте ове контракције су дате са

$$(C_j^i A)_{q_1 \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{r-1}} = \sum_{k=1}^n A_{q_1 \dots q_{j-1} k q_j \dots q_{s-1}}^{p_1 \dots p_{i-1} k p_i \dots p_{r-1}}.$$

Повлачење ковекторског поља може се уопштити на повлачење коваријантног тензора. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости. **Повлачење коваријантног тензора** $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$ дефинишемо са

$$(f^* A)(X_1, \dots, X_s) = A(f_*(X_1), \dots, f_*(X_s))$$

за свако $p \in M$ и све $X_i \in T_p M$. У свакој тачки $p \in M$, повлачење $f^*(A)$ дефинише $\mathbb{R}$ -мултилинеарну функцију из $(T_p M)^s$ у $\mathbb{R}$, односно тензор типа $(0, s)$ на $T_p M$. Координатни рачун показује да је $f^*(A)$ коваријантно тензорско поље на M .

Дакле, за глатко $f: M \rightarrow N$ и свако $s \geq 0$ добијамо $\mathbb{R}$ -линеарно $f^*: \mathfrak{T}_s^0(N) \rightarrow \mathfrak{T}_s^0(M)$. Штавише, за $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$ и $B \in \mathfrak{T}_t^0(N)$ имамо $f^*(A \otimes B) = f^*(A) \otimes f^*(B)$. Коначно, ако је $h: N \rightarrow P$ глатко, онда је $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*: \mathfrak{T}_s^0(P) \rightarrow \mathfrak{T}_s^0(M)$.

У општем случају, преуређивање аргумената тензора не мора нужно имати било какав предвидљив ефекат на његову вредност. Међутим, неки тензори не мењају своју вредност приликом преуређивања аргумената. За коваријантан или контраваријантан тензор (реда бар 2) кажемо да је **симетричан** ако његова вредност остаје непромењена приликом замене било која два аргумента. Уколико свака таква замена проузрокује промену знака, за тај тензор кажемо да је **антисиметричан**.

Симетричан гео коваријантног тензора A реда s је коваријантни тензор $\text{Sym } A$ реда s дефинисан са

$$(\text{Sym } A)(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}),$$

где је S_s симетрична група од s елемената, односно група пермутација скупа $\{1, \dots, s\}$. Лако је видети да је $\text{Sym } A$ симетричан, као и да је A симетричан ако и само ако је $\text{Sym } A = A$.

Ако су A и B симетрични коваријантни тензори, тада $A \otimes B$ није симетричан у општем случају. Међутим, њихов **симетричан производ** дефинисан са

$$AB = \text{Sym}(A \otimes B)$$

јесте симетричан тензор. Лако је проверити да је овај производ комутативан ($AB = BA$) и $\mathbb{R}$ -билинеаран ($(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC$). Посебно, ако су ω и τ ковекторска поља, тада је

$$\omega\tau = \frac{1}{2}(\omega \otimes \tau + \tau \otimes \omega),$$

а често пишемо ω^2 као скраћеницу за симетричан производ $\omega\omega$.

3.6 Извод тензорских поља

До сада је наш фокус био на алгебарским аспектима тензорских поља, те је време да успоставимо њихово диференцирање. **Извод** тензорског поља на многострукости M је фамилија $\mathbb{R}$ -линеарних пресликавања

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M), \quad (r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,$$

која комутирају са контракцијама и задовољавају Лајбницов закон. Посебно, Лајбницов закон узима облик

$$\mathcal{D}(A \otimes B) = (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{D}B), \quad (3.8)$$

за произвољна тензорска поља A и B . Штавише, $\mathcal{D}$ комутира са контракцијама, односно

$$\mathcal{D}(C_j^i A) = C_j^i(\mathcal{D}A), \quad (3.9)$$

за све $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq j \leq s$, кад год је $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Дакле, извод тензорског поља чува тип тензора, поштује Лајбницово правило, комутира са свим контракцијама и јесте $\mathbb{R}$ -линеаран.

Како важи $fA = f \otimes A$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$, то следи $\mathcal{D}(fA) = (\mathcal{D}f)A + f\mathcal{D}A$. Посебно, кад је $(r, s) = (0, 0)$, $\mathcal{D}_0^0$ је диференцирање на $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$, те постоји јединствено векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ такво да је $\mathcal{D}f = Xf$ за свако $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Како извод тензорског поља није $\mathfrak{F}(M)$ -линеаран, у општем случају вредност од $\mathcal{D}A$ у тачки $p \in M$ не може се одредити из самог A_p . Међутим, она се може извући из вредности од A на произвољно малој околини од p . Тај локални карактер извода тензорског поља може се изразити на следећи начин.

Теорема 3.15. *Ако је $\mathcal{D}$ извод тензорског поља на мношћурукости M и $U \subset M$ отворен, онда постоји јединствен извод $\mathcal{D}_U$ на U такав да за свако тензорско поље A на M , рестрикција задовољава $\mathcal{D}_U(A|_U) = (\mathcal{D}A)|_U$.*

Доказ. За свако $p \in U$ по Лемми 1.17 имамо цомбасту функцију $b_p \in \mathfrak{F}(M)$ која је подржана у U и једнака 1 на некој околини $V_p \ni p$. За произвољно тензорско поље $T \in \mathfrak{T}_s^r(U)$ имамо $b_p T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, те дефинишемо вредност тензорског поља $\mathcal{D}_U T$ у p са $(\mathcal{D}_U T)_p = (\mathcal{D}(b_p T))_p$. Најпре се покаже да је ова дефиниција независна од избора цомбасте функције и да $\mathcal{D}_U T$ дефинише тензорско поље на U . Преостаје да се верификује да је $\mathcal{D}_U$ извод тензорског поља на U , да има тражене особине рестрикције, као и да је јединствен. $\square$

Лајбницово правило за изводе тензорског поља може се преобликовати и уопштити да би се описало како се тензорско поље примењује на ковекторска и векторска поља. Размотримо функцију $A(\omega_1, \dots, X_s) \in \mathfrak{F}(M)$ као што је записана у (3.6). Ова функција се може видети као резултат контракције тензора $A \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes X_s \in \mathfrak{T}_{r+s}^{r+s}(M)$, чије су компоненте дате са

$$(A \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s)_{j_1 \dots j_s k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r l_1 \dots l_s} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\omega_1)_{k_1} \dots (\omega_r)_{k_r} (X_1)^{l_1} \dots (X_s)^{l_s}.$$

Након примене $r + s$ контракција, упарујући свако i_a са k_a за $1 \leq a \leq r$ и свако j_b са l_b за $1 \leq b \leq s$, добија се оригинална функција,

$$A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = C_1^1 C_2^2 \dots C_r^r C_1^{r+1} \dots C_s^{r+s} (A \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s).$$

Применом извода $\mathcal{D}$ на ову функцију добија се уопштена Лајбницова формула,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathcal{D}A)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\omega_1, \dots, \mathcal{D}\omega_i, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^s A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из формуле (3.10) следи да се члан који укључује $\mathcal{D}A$ може у потпуности изразити преко $\mathcal{D}$ примењеног на функције, векторска поља и ковекторска поља. Штавише, како

$$(\mathcal{D}\omega)(X) = \mathcal{D}(\omega X) - \omega(\mathcal{D}X) \quad (3.11)$$

важи за свако $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, то је довољно знати само како се $\mathcal{D}$ примењује на функције и векторска поља. Испоставља се да важи и обрат, односно да од одговарајућих информација датих на $\mathfrak{F}(M)$ и $\mathfrak{X}(M)$ можемо конструисати извод тензорског поља.

Теорема 3.16. Нека је $\mathcal{D}_0^0 \in \mathfrak{X}(M)$, а $\mathcal{D}_0^1: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ $\mathbb{R}$ -линеарно пресликавање такво да $\mathcal{D}_0^1(fX) = (\mathcal{D}_0^0 f)X + f\mathcal{D}_0^1 X$ важи за све $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $X \in \mathfrak{X}(M)$. Тада постоји јединствен извод $\mathcal{D}$ тензорског поља на M који продужава $\mathcal{D}_0^0$ и $\mathcal{D}_0^1$.

Доказ. Јединственост следи из формуле (3.10), коју такође користимо да конструисемо преостале компоненте од $\mathcal{D}$. За $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, релација (3.11) захтева да дефинишемо $(\mathcal{D}_1^0 \omega)(X) = \mathcal{D}_0^0(\omega(X)) - \omega(\mathcal{D}_0^1 X)$. Проверава се да је $\mathcal{D}_1^0 \omega$ $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1^0 \omega)(fX) &= \mathcal{D}_0^0(\omega(fX)) - \omega(\mathcal{D}_0^1 fX) = \mathcal{D}_0^0(f\omega(X)) - \omega((\mathcal{D}_0^0 f)X + f\mathcal{D}_0^1 X) \\ &= (\mathcal{D}_0^0 f)\omega(X) + f\mathcal{D}_0^0(\omega(X)) - (\mathcal{D}_0^0 f)\omega(X) - f\omega(\mathcal{D}_0^1 X) = f(\mathcal{D}_1^0 \omega)(X). \end{aligned}$$

Зато је $\mathcal{D}_1^0 \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, те одмах имамо да је $\mathcal{D}_1^0: \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ $\mathbb{R}$ -линеарно. За $r + s \geq 2$ и $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, формула (3.10) повлачи да $\mathcal{D}_s^r A$ задовољава

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_s^r A)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) &= \mathcal{D}_0^0(A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r A(\omega_1, \dots, \mathcal{D}_1^0 \omega_i, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) - \sum_{j=1}^s A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, \mathcal{D}_0^1 X_j, \dots, X_s), \end{aligned}$$

те зато $\mathcal{D}_s^r A$ дефинишемо том формулом. Као и раније, проверава се да је $\mathcal{D}_s^r A$ $\mathfrak{F}(M)$ -мултилинеарно, односно да припада $\mathfrak{T}_s^r(M)$, као и да је $\mathcal{D}_s^r: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$ $\mathbb{R}$ -линеарно. Директан рачун показује да Лајбницево правило $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$ важи за произвољна тензорска поља A и B . Преостаје да се докаже да $\mathcal{D}$ комутира са контракцијама. За контракцију $\mathcal{C}: \mathfrak{T}_1^1(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ имамо

$$\mathcal{D}\mathcal{C}(X \otimes \omega) = \mathcal{D}(\omega(X)) = (\mathcal{D}\omega)(X) + \omega(\mathcal{D}X) = \mathcal{C}(X \otimes \mathcal{D}\omega + \mathcal{D}X \otimes \omega) = \mathcal{C}\mathcal{D}(X \otimes \omega).$$

Зато $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ комутирају на тензорским пољима која су облика $X \otimes \omega$. Локалност од $\mathcal{D}$ омогућава проверу на координатним околима, где је свако тензорско поље типа $(1, 1)$ коначна сума таквих тензорских производа. Након тога, општи случај контракција за тензорска поља произвољног типа одмах следи. $\square$

Пример 3.28. За свако $V \in \mathfrak{X}(M)$, претходна теорема нам допушта да дефинишемо извод $\mathcal{L}_V$ тензорског поља на M са $\mathcal{L}_V(f) = Vf$ за све $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $\mathcal{L}_V(X) = [V, X]$ за све $X \in \mathfrak{X}(M)$. Претпоставке теореме важе јер је $(\mathcal{L}_V)_0^0 = V$ векторско поље, $(\mathcal{L}_V)_0^1 = [V, \cdot]$ је $\mathbb{R}$ -линеарно и $\mathcal{L}_V(fX) = [V, fX] = (Vf)X + f[V, X] = (\mathcal{L}_V f)X + f\mathcal{L}_V X$. Овај извод $\mathcal{L}_V$ зовемо **Лијев извод** у односу на V . $\triangle$

Лема 3.17. Ако $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ онда за Лијев извод важи $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}$.

Доказ. Најпре верификујемо идентитет за функције $f \in \mathfrak{F}(M)$:

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]f = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f = XYf - YXf = [X, Y]f = \mathcal{L}_{[X, Y]}f.$$

Затим посматрамо векторска поља $V \in \mathfrak{X}(M)$, где из Јакобијевог идентитета (2.7) добијемо

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y V - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X V = [X, [Y, V]] - [Y, [X, V]] = [X, [Y, V]] + [X, [V, Y]] + [V, [Y, X]] = [[X, Y], V] = \mathcal{L}_{[X, Y]}V.$$

Зато се $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ и $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ слажу на $\mathfrak{T}_0^0(M)$ и $\mathfrak{T}_0^1(M)$. По Теореме 3.16, довољно је показати да је $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ извод тензорског поља. Очигледно имамо $\mathbb{R}$ -линеарност и чување типа тензора. Да бисмо проверили Лајбницово правило, за произвољна тензорска поља A и B рачунамо:

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y (A \otimes B) = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y A \otimes B + \mathcal{L}_X A \otimes \mathcal{L}_Y B + \mathcal{L}_Y A \otimes \mathcal{L}_X B + A \otimes \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y B.$$

Одузимање аналогног израза са замењеним X и Y доноси

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](A \otimes B) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]A \otimes B + A \otimes [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]B.$$

Коначно, нека је $C = C_j^i$ произвољна контракција. Тада је

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]C = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y C - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X C = C \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - C \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = C[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y],$$

те $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ комутира са контракцијама. Закључак следи из исказа јединствености из Теореме 3.16. $\square$

3.7 Задаци

Задатак 3.1. Доказати да на сфери $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ постоји ковекторско поље које је нула у тачно једној тачки.

Задатак 3.2. На многострукости $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ дата је функција $f \in \mathfrak{F}(M)$ са $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Израчунати диференцијал df како у стандардним, тако и у поларним координатама. Одредити скуп свих тачака $p \in M$ у којима је $df_p = 0$.

Задатак 3.3. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са $(x, y) = f(s, t) = (st, e^t)$. За $\omega = x dy - y dx$ израчунати $f^* \omega$.

Задатак 3.4. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато са

$$(x, y, z) = f(\theta, \varphi) = ((\cos \varphi + 2) \cos \theta, (\cos \varphi + 2) \sin \theta, \sin \varphi).$$

За $\omega = z^2 dx$ израчунати $f^* \omega$.

Задатак 3.5. Нека је M многострукост и $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$. Показати да је $\text{Sym} A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ јединствено симетрично такво да је $(\text{Sym} A)(X, X, \dots, X) = A(X, X, \dots, X)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Задатак 3.6. Показати да је симетричан производ асоцијативан за симетричне коваријантне тензоре.

Задатак 3.7. Нека је M паралелизабилна многострукост димензије 2 са глобалним покретним репером (∂_1, ∂_2) . Пресликавање $\det: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ је дато преко компоненти векторских поља у односу на (∂_1, ∂_2) са $\det(X, Y) = X^1 Y^2 - X^2 Y^1$. Да ли је $\det \in \mathfrak{T}_2^0(M)$? Да ли постоје $\omega, \tau \in \mathfrak{X}^*(M)$ тако да је $\det = \omega \otimes \tau$?

Задатак 3.8. Нека је $\mathcal{D}$ извод тензорског поља на многострукости $\mathbb{R}^n$ такав да за све $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ и $1 \leq i \leq n$ важи $\mathcal{D}f = \partial_1 f$ и $\mathcal{D}(dx_i) = dx_1 + dx_i$. Одредити општи облик за $\mathcal{D}X$, где је $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Посебно записати $\mathcal{D}\partial_1$ и $\mathcal{D}\partial_2$.

ПСЕУДО-РИМАНОВА МЕТРИКА

4.1 Скаларни производ

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор над $\mathbb{R}$ коначне димензије. **Билинеарна форма** на $\mathcal{V}$ је $\mathbb{R}$ -билинеарна функција $g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. За билинеарну форму g на $\mathcal{V}$ кажемо да је **симетрична** ако $g(X, Y) = g(Y, X)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Другим речима, симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ је симетричан коваријантни тензор реда два на $\mathcal{V}$. Она је јединствено одређена одговарајућом квадратном формом $\varepsilon: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ која је дата са

$$\varepsilon_X = g(X, X), \quad (4.1)$$

јер је можемо реконструисати користећи поларизациони идентитет

$$g(X, Y) = \frac{1}{4}(\varepsilon_{X+Y} - \varepsilon_{X-Y}), \quad (4.2)$$

или еквивалентно $g(X, Y) = (\varepsilon_{X+Y} - \varepsilon_X - \varepsilon_Y)/2$.

Кажемо да је симетрична билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ **недегенерисана** ако услов да $g(X, Y) = 0$ важи за свако $Y \in \mathcal{V}$ повлачи $X = 0$. Штавише, ако је $g(X, X) > 0$ за свако $X \neq 0$ онда је g **позитивно дефинитно**. Слично, ако је $g(X, X) < 0$ за свако $X \neq 0$ онда је g **негативно дефинитно**. У случају да је g позитивно дефинитно или негативно дефинитно кажемо да је g **дефинитно**, док је у супротном **недефинитно**. Евидентно, ако је g дефинитно онда је и недегенерисано, док обрат не важи.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ је недегенерисана симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Коначнодимензиони реални векторски простор $\mathcal{V}$ опремљен скаларним производом g на $\mathcal{V}$ зовемо **простор са скаларним производом** $(\mathcal{V}, g)$. Како скаларни производ g и његова одговарајућа квадратна форма ε носе једнаке информације због (4.1) и (4.2), ради једноставности кажемо да је $(\mathcal{V}, g)$ **квадратни простор** (или **квадратни векторски простор**). Посебно, **унутрашњи производ** је позитивно дефинитан скаларни производ, док је у том случају $(\mathcal{V}, g)$ **простор са унутрашњим производом**.

За дату базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$, свака билинеарна форма g на $\mathcal{V}$ има одговарајућу **Грамову матрицу** G са елементима $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ за $1 \leq i, j \leq n$. Билинеарна форма g се изражава из G преко билинеарности, $g(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i, \sum_{j=1}^n \beta_j E_j) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j g_{ij}$, што се у матричној нотацији може записати са $g(X, Y) = X^T G Y$, где су $X, Y \in \mathcal{V}$ идентификовани као колона матрице. Симетричност од g је очигледно еквивалентна симетричности Грамове матрице, $G^T = G$. Коначно, у наредној леми показујемо да недегенерисаност повлачи $\det G \neq 0$, те је Грамова матрица инвертибилна.

Лема 4.1. Симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$ је недегенерисана ако и само ако је њена Грамова матрица у односу на било коју базу од $\mathcal{V}$ инвертибилна.

Доказ. Нека је G Грамова матрица за g у односу на базу $(E_1, \dots, E_n)$. Ако је $\det G = 0$, тада постоји вектор $Y \neq 0$ такав да је $GY = 0$, што повлачи $g(X, Y) = X^T G Y = 0$ за свако $X \in \mathcal{V}$ и нарушава недегенерисаност. Обратно, ако је $\det G \neq 0$, тада $GY \neq 0$ важи за свако $Y \neq 0$, те постоји $1 \leq i \leq n$ такво да је $g(E_i, Y) = E_i^T G Y \neq 0$, одакле је g недегенерисано. $\square$

Пример 4.1. Стандардни пример унутрашњег производа је еуклидски скаларни производ на $\mathbb{R}^n$ дат са $g(X, Y) = X^T Y = \sum_i x_i y_i$, чија је Грамова матрица у односу на канонску базу јединична матрица. Најједноставнији пример недефинитног скаларног производа је дат на $\mathbb{R}^2$ са $g(X, Y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Ова форма g је билинеарна, а њена Грамова матрица у односу на канонску базу је дијагонална са елементима 1 и -1 , те зато симетрична и инвертибилна. $\triangle$

Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни простор. **Норма** или **дужина** вектора $X \in \mathcal{V}$ је ненегативан број $\|X\| = \sqrt{|g(X, X)|}$, док је његова **квадрантна норма** $\varepsilon_X = g(X, X)$, те је $|\varepsilon_X| = \|X\|^2$. Знак од ε_X разврстава све ненула векторе из $\mathcal{V}$ у три типа, описујући **узрочни карактер** вектора. Ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ је **ипроспороан** (*spacelike*) ако $\varepsilon_X > 0$, **временски** (*timelike*) ако $\varepsilon_X < 0$, а **изоипропан** (*свѣтлосни, null*) ако $\varepsilon_X = 0$. Посебно, вектор $X \in \mathcal{V}$ је **дефинитан** (*nonnull*) ако $\varepsilon_X \neq 0$, док је **јединичан** (*unit*) уколико је $\varepsilon_X \in \{-1, 1\}$ (еквивалентно са $\|X\| = 1$).

Напоменимо да смо узрочни карактер нула вектора оставили неодређеним. Природно, нула вектор се може сматрати изотропним, али кад кажемо да је вектор изотропан, прећутно подразумевамо да је ненула. Неки аутори, посебно они који раде у Лоренцовој геометрији (на пример О'Нил [100]), класификују нула вектор као просторан. Једна од могућности је да се нула вектору доделе сва три узрочна карактера (видети Ли [79]).

За два вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ кажемо да су **међусобно ортојонални** ако је $g(X, Y) = 0$, што означавамо са $X \perp Y$. Слично, за подскупе $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$, најчешће потпросторе, кажемо да су **ортојонални** и пишемо $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ако $g(X, Y) = 0$ важи за све $X \in \mathcal{A}$ и $Y \in \mathcal{B}$. Посебно, природно можемо писати $X \perp \mathcal{A}$ кад је $\text{Span}\{X\} \perp \mathcal{A}$. **Ортојонални ипоипроспоро** (или **нормалан ипоипроспоро**) неког потпростора $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ дефинишемо са $\mathcal{W}^\perp = \{X \in \mathcal{V} : X \perp \mathcal{W}\} \leq \mathcal{V}$, што је максимални потпростор од $\mathcal{V}$ ортогоналан на $\mathcal{W}$.

У дефинитном случају, $\mathcal{W}^\perp$ је такође познат као **ортојонални комплемент** од $\mathcal{W}$, јер је тада $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$. Међутим, за недефинитан скаларни производ, $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ може да не разапиње читаво $\mathcal{V}$, те $\mathcal{W}^\perp$, не мора бити комплемент од $\mathcal{W}$. Ипак, ортогонал задржава неколико познатих особина које истичемо у наредне две леме.

Лема 4.2. Нека је $\mathcal{W}$ ипоипроспоро квадрантног ипроспора $\mathcal{V}$. Тада важи $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$.

Доказ. Продужимо базу $(E_1, \dots, E_k)$ од $\mathcal{W}$ до базе $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$. Вектор $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ припада $\mathcal{W}^\perp$ ако и само ако је $0 = g(X, E_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{ij}$ за свако $1 \leq j \leq k$. То даје хомоген систем од $k = \dim \mathcal{W}$ линеарних једначина са $n = \dim \mathcal{V}$ непознатих. По Леми 4.1, врсте од матрице коефицијената су линеарно независне, те је систем ранга k . Последице, простор решења има димензију $n - k$, што се тачно поклапа са $\dim \mathcal{W}^\perp$. $\square$

Лема 4.3. Нека је $\mathcal{W}$ ипоипроспоро квадрантног ипроспора $\mathcal{V}$. Тада важи $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Доказ. Како је $\mathcal{W} \perp \mathcal{W}^\perp$, то свакако важи $\mathcal{W} \leq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$. Са друге стране, по Леми 4.2 имамо $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}^\perp + \dim (\mathcal{W}^\perp)^\perp$, те $\dim (\mathcal{W}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{W}$, одакле следи $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$. $\square$

За потпростор $\mathcal{W}$ квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$, рестрикција $g|_{\mathcal{W}} = g|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}}$ је симетрична билинеарна форма на $\mathcal{W}$. Штавише, ако је g позитивно дефинитно, онда је

$g|_{\mathcal{W}}$ позитивно дефинитан скаларни производ на $\mathcal{W}$. Међутим, ако је g недефинитно, рестрикција не мора бити недегенерисана.

Пример 4.2. Ако је $S \in \mathcal{V}$ просторан, а $T \in \mathcal{V}$ временски вектор, можемо конструисати изотропан вектор N са

$$N = S + \frac{-g(S, T) \pm \sqrt{(g(S, T))^2 - \varepsilon_S \varepsilon_T}}{\varepsilon_S} T,$$

где је коефицијент уз T решење квадратне једначине $\varepsilon_{S+XT} = \varepsilon_S + 2xg(S, T) + x^2\varepsilon_T = 0$. Како недефинитан скаларни производ увек допушта и просторне и временске векторе, такво N постоји. Зато је за $\mathcal{W} = \text{Span}\{N\} \leq \mathcal{V}$, рестрикована форма $g|_{\mathcal{W}}$ дегенерисана. $\triangle$

Кажемо да потпростор $\mathcal{W}$ квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$ има неку особину (на пример да је **недегенерисан**, **позитивно дефинитан** или **негативно дефинитан**) ако рестрикција $g|_{\mathcal{W}}$ има ту особину. **Радикал** од $\mathcal{W}$ је потпростор $\text{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$, што ће нам бити корисно за карактеризацију недегенерисаних потпростора.

Лема 4.4. Нека је $\mathcal{W}$ потпростор квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$. Тада су еквивалентни искази: $\text{rad}(\mathcal{W})$ је тривијалан, $\mathcal{W}$ је недегенерисан, $\mathcal{W}^\perp$ је недегенерисан, $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$.

Доказ. По дефиницији, $\mathcal{W}$ је недегенерисан ако је 0 једини вектор из $\mathcal{W}$ ортогоналан на $\mathcal{W}$, што је еквивалентно са $\text{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. Из Леме 4.3 је $\text{rad}(\mathcal{W}) = \text{rad}(\mathcal{W}^\perp)$, те су недегенерисаности од $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^\perp$ еквивалентне. Из Грасманове¹ формуле имамо $\dim(\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp) = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp$, што је $\dim \mathcal{V}$ по Леми 4.2. Одавде је $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ ако и само ако $\text{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$. $\square$

Наравно, како је скаларни производ недегенерисан, то је $\text{rad}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^\perp = \{0\}$. Ортогоналну директну суму обележавамо са $\oplus$, те за недегенерисан $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ можемо писати $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

Скаларни производ g на $\mathcal{V}$ се дијагонализује једноставном применом Леме 4.4. Као и обично, за скуп међусобно ортогоналних јединичних вектора кажемо да је **ортонормиран**. Сваки скуп који се састоји од $\dim \mathcal{V}$ ортонормираних вектора у $\mathcal{V}$ свакако чини базу од $\mathcal{V}$ и таква база увек постоји.

Лема 4.5. Сваки квадратни векторски простор има ортонормирану базу.

Доказ. Доказ иде индукцијом по $n = \dim \mathcal{V}$, док је случај $\dim \mathcal{V} = 1$ очигледан. За $n > 1$ можемо изабрати дефинитан вектор $X \in \mathcal{V}$ (иначе $\varepsilon_X = 0$ важи за све $X \in \mathcal{V}$, те је $g = 0$ дегенерисано), а његовим скалирањем добијамо јединично $E_1 = (1/\sqrt{|\varepsilon_X|})X$. Једнодимензиони потпростор $\text{Span}\{E_1\}$ је недегенерисан, те је по Леми 4.4 то и $\text{Span}\{E_1\}^\perp$. По индукцијској хипотези, постоји ортонормирана база $(E_2, \dots, E_n)$ од $\text{Span}\{E_1\}^\perp$. Како важи $\mathcal{V} = \text{Span}\{E_1\} \oplus \text{Span}\{E_1\}^\perp$, то је $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ жељена ортонормирана база. $\square$

Недефинитан скаларни производ често има додатно појављивање $\varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за векторе из ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ у формулама које одговарају онима за позитивно дефинитан случај. Ако је $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ тада је $g(X, E_j) = \alpha_j g(E_j, E_j)$, те $\alpha_j = g(X, E_j)/g(E_j, E_j) = \varepsilon_{E_j} g(X, E_j)$, одакле добијамо

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} g(X, E_i) E_i. \quad (4.3)$$

Лема 4.6. Ако је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана база квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$, тада се свако $X \in \mathcal{V}$ јединствено изражава формулом (4.3).

¹Hermann Günther Graßmann (1809–1877), немачки физичар, математичар и лингвиста

Грамова матрица скаларног производа g у односу на ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ је дијагонална матрица јер важи $g_{ij} = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}\varepsilon_{E_i}$. Кад год је то згодно, векторе у ортонормираној бази уређујемо тако да се најпре појаве негативни знаци, $\varepsilon_{E_i} = -1$ за $1 \leq i \leq v$, а затим позитивни, $\varepsilon_{E_i} = 1$ за $v < i \leq n$. Ортонормирана допуна базе и даље је могућа узимајући ове знаке у обзир.

Индекс скаларног производа g на $\mathcal{V}$ је највећи број $\text{Ind}(g) \in \mathbb{N}_0$ који је димензија негативно дефинитног потпростора од $\mathcal{V}$. Број негативних ε_{E_i} једнак је индексу од g што успоставља следећу теорему познату као **Силвестеров закон инерције**².

Теорема 4.7. Број негативних ε_{E_i} не зависи од избора ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ у квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$ и једнак је индексу од g .

Доказ. Ако је $\mathcal{T} \leq \mathcal{V}$ негативно дефинитан, а $\mathcal{S} \leq \mathcal{V}$ позитивно дефинитан, имамо $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{0\}$, одакле Грасманова формула даје $\dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{S} = \dim(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leq \dim \mathcal{V} = n$. Потпростор $\mathcal{S} = \text{Span}\{E_{v+1}, \dots, E_n\}$ је позитивно дефинитан, што даје $\dim \mathcal{T} \leq v$, док је $\dim \mathcal{T} = v$ за негативно дефинитан $\mathcal{T} = \text{Span}\{E_1, \dots, E_v\}$, те добијамо $\text{Ind}(g) = v$. $\square$

Индекс квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$ димензије n је индекс његовог скаларног производа $v = \text{Ind}(\mathcal{V}) = \text{Ind}(g)$, док је **сиџнаџура** уређен пар (p, q) који представља број негативних ε_{E_i} и број позитивних ε_{E_i} . По Теорему 4.7, бројеви $0 \leq p, q \leq n$ не зависе од избора ортонормиране базе и важи $p = v, q = n - v$.

Вреди напоменути да је $(\mathcal{V}, -g)$ такође квадратни простор, а за њега важи $\text{Ind}(-g) = n - \text{Ind}(g)$. Квадратни простори $(\mathcal{V}, g)$ и $(\mathcal{V}, -g)$ размењују бројеве у сигнатури (сигнатура првог је $(\text{Ind}(g), \text{Ind}(-g))$), али разлика између њих није суштинска, те је уобичајено да се индекс нормира са $v \leq n/2$, што би обезбедило да временских координата нема више од просторних.

Нека су $(\mathcal{V}, g^\mathcal{V})$ и $(\mathcal{W}, g^\mathcal{W})$ квадратни простори. Кажемо да линеарно пресликавање $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ чува скаларни производ ако $g^\mathcal{W}(LX, LY) = g^\mathcal{V}(X, Y)$ важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Такво пресликавање L је обавезно инјективно јер $LX = 0$ повлачи $g^\mathcal{V}(X, Y) = 0$ за све $Y \in \mathcal{V}$ одакле следи $X = 0$. Наравно, ако L чува скаларни производ онда чува и одговарајуће квадратне форме, док обрат следи из поларизације. **Линеарна изометрија** је линеарно бијективно пресликавање које чува скаларни производ.

Лема 4.8. Линеарна изометрија $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ постоји ако и само ако квадратни простори $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ имају исту димензију и индекс.

Доказ. Ако је L линеарна изометрија онда је $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ и L пресликава ортонормирану базу од $\mathcal{V}$ у ортонормирану базу од $\mathcal{W}$, те Теорема 4.7 даје $\text{Ind } \mathcal{V} = \text{Ind } \mathcal{W}$. Обратно, можемо преуредити ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ и $(F_1, \dots, F_n)$ од $\mathcal{W}$ тако да је $g^\mathcal{V}(E_i, E_i) = g^\mathcal{W}(F_i, F_i)$, те дефинисати линеарну изометрију са $L(E_i) = F_i$. $\square$

4.2 Изотропни вектори

У квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$, ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ који је ортогоналан на самог себе ($X \perp X$) зове се изотропан вектор. Ако је g дефинитно онда је нула вектор једини вектор са нормом нула, те изотропни вектори постоје само у случају недефинитног g . Скуп свих изотропних вектора $\{X \in \mathcal{V} : X \neq 0, \varepsilon_X = 0\}$ зовемо **изоџропни конус**. Како наша реалност углавном прихвата само позитивно дефинитну метрику, изотропни вектори су прилично незгодни и често контраинтуитивни, али су и кључни у разумевању псеудо-Риманових многострукости.

²James Joseph Sylvester (1814–1897), енглески математичар

Лема 4.9. Сваки квадратни простор $\mathcal{V}$ сићаиуре (p, q) може се раставити као ортогонална сума $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, где је $\mathcal{V}^+$ максималан позитивно дефинитан простор димензије q , а $\mathcal{V}^-$ максималан нејативно дефинитан простор димензије p .

Доказ. Нека је $(T_1, \dots, T_p, S_1, \dots, S_q)$ ортонормирана база у $\mathcal{V}$ са $\varepsilon_{T_i} = -1$ за $1 \leq i \leq p$ и $\varepsilon_{S_j} = 1$ за $1 \leq j \leq q$. Потпростори $\mathcal{V}^- = \text{Span}\{T_1, \dots, T_p\}$ и $\mathcal{V}^+ = \text{Span}\{S_1, \dots, S_q\}$ су међусобно ортогонални и имају тривијалан пресек, при чему је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ + \mathcal{V}^-$. $\square$

Лема 4.9 доноси растављање $N = S + T$ произвољног изотропног $N \in \mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$ са $S \in \mathcal{V}^+$ и $T \in \mathcal{V}^-$. Из $\mathcal{V}^+ \perp \mathcal{V}^-$ је $g(S, T) = 0$, одакле следи $0 = \varepsilon_N = g(S + T, S + T) = \varepsilon_S + \varepsilon_T$. Услов $N \neq 0$ повлачи $S \neq 0$, те $\varepsilon_S \neq 0$ и коначно $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Дакле, произвољан изотропан $N \in \mathcal{V}$ може се раставити као збир $N = S + T$ међусобно ортогоналних S и T , са $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Међутим, претходно растављање није јединствено, чак ни у истој равни $\text{Span}\{S, T\}$.

Лема 4.10. Сваки изотропан N из квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ може се раставити са $N = S + T$, иако да је $S, T \in \mathcal{V}$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1$.

Доказ. Већ смо имали растављање $N = S + T$ са $g(S, T) = 0$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. Посматрајмо $S_1 = \theta S + (1 - \theta)T$ и $T_1 = (1 - \theta)S + \theta T$ за неко $\theta > 1/2$. Тада имамо $S_1, T_1 \in \mathcal{V}$ са $S_1 + T_1 = S + T = N$ и

$$g(S_1, T_1) = g(\theta S + (1 - \theta)T, (1 - \theta)S + \theta T) = \theta(1 - \theta)(\varepsilon_S + \varepsilon_T) = 0.$$

Добијамо да је $\varepsilon_{S_1} = \theta^2 \varepsilon_S + (1 - \theta)^2 \varepsilon_T = (\theta^2 - (1 - \theta)^2) \varepsilon_S = (2\theta - 1) \varepsilon_S > 0$, док $g(S_1, T_1) = 0$ повлачи $\varepsilon_{S_1} + \varepsilon_{T_1} = \varepsilon_{S_1+T_1} = \varepsilon_N = 0$ и зато $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} > 0$. За свако $\theta > 1/2$, ова конструкција, даје ново растављање, те за $\theta = (1 + \varepsilon_S)/(2\varepsilon_S) > 1/2$ добијамо $\varepsilon_{S_1} = -\varepsilon_{T_1} = 1$, и самим тим ново растављање

$$N = \left(\frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S} S + \frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S} T \right) + \left(\frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S} S + \frac{\varepsilon_S + 1}{2\varepsilon_S} T \right)$$

са траженим својствима. $\square$

Пример 4.3. Нова растављања су могућа и ван равни $\text{Span}\{S, T\}$. Ако је $\dim \mathcal{V} > 2$, тада постоји дефинитан $W \in \mathcal{V}$ такав да је $W \perp \text{Span}\{S, T\}$. Тражимо $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ тако да је $S_1 = \alpha S + \beta T + \gamma W$ и $T_1 = (1 - \alpha)S + (1 - \beta)T - \gamma W$, што обезбеђује $S_1 + T_1 = S + T = N$. Из $S_1 \perp T_1$ имамо

$$0 = g(S_1, T_1) = \alpha(1 - \alpha)\varepsilon_S + \beta(1 - \beta)\varepsilon_T - \gamma^2 \varepsilon_W = ((\alpha - \alpha^2) - (\beta - \beta^2))\varepsilon_S - \gamma^2 \varepsilon_W,$$

и зато

$$\gamma^2 \varepsilon_W = (\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S. \quad (4.4)$$

Како је

$$\varepsilon_{S_1} = \alpha^2 \varepsilon_S + \beta^2 \varepsilon_T + \gamma^2 \varepsilon_W = (\alpha^2 - \beta^2)\varepsilon_S + (\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S = (\alpha - \beta)\varepsilon_S,$$

услов $\varepsilon_{S_1} > 0$ важи за $\alpha > \beta$. Изаберимо $\alpha + \beta < 1$ ако је W просторан, или $\alpha + \beta > 1$ ако је W временски. Ово, заједно са $\alpha > \beta$, према (4.4) одређује коначне услове за α и β . Коначно, сваки пар (α, β) који задовољава последње две неједнакости одређује ново растављање, где је $\gamma = \pm \sqrt{(\alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta)\varepsilon_S/\varepsilon_W}$. $\triangle$

За потпростор квадратног простора кажемо да је **поједино изотропан** ако се састоји само од вектора чија је норма нула. Користећи идентитет (4.2) видимо да су свака два вектора у потпуно изотропном потпростору међусобно ортогонална.

Одавде за сваки потпуно изотропан потпростор $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ важи $g|_{\mathcal{W}} = 0$. Зато је $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}^\perp$ и последично $\text{rad}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$.

Вреди напоменути да је радикал произвољног потпростора $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ потпуно изотропан јер важи $\text{rad}(\text{rad}(\mathcal{U})) = \text{rad}(\mathcal{U})$. У најопштијем случају, сваки комплементарни потпростор $\mathcal{W}$ за $\text{rad}(\mathcal{U})$ у смислу уобичајене линеарне алгебре доноси радикално раздвајање $\mathcal{U} = \text{rad}(\mathcal{U}) \oplus \mathcal{W}$. Лако је приметити да је $\mathcal{W}$ далеко од тога да буде јединствен, али је свакако недегенерисан.

Пример 4.4. Нека је $\mathcal{U}$ произвољан потпростор квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$. Претпоставимо да је $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{N}$ ортогонална сума недегенерисаног $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ и потпуно изотропног $\mathcal{N} \leq \mathcal{V}$. Најпре покажимо да је $\mathcal{N}$ јединствено. Са једне стране имамо $\mathcal{N} \leq \mathcal{U}$, док $\mathcal{N} \perp \mathcal{W}$, $\mathcal{N}$ даје $\mathcal{N} \perp \mathcal{U}$, те је $\mathcal{N} \leq \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \text{rad}(\mathcal{U})$. Са друге стране, како недегенерисан и потпуно изотропан потпростор имају тривијалан пресек, то имамо $\dim \text{rad}(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{W} + \text{rad}(\mathcal{U})) - \dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{U} - \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{N}$. Како је $\mathcal{N} \leq \text{rad}(\mathcal{U})$ и $\dim \text{rad}(\mathcal{U}) \leq \dim \mathcal{N}$, то добијамо јединственост, $\mathcal{N} = \text{rad}(\mathcal{U})$, што доноси радикално раздвајање.

Претпоставимо да постоји још једно такво разлагање, $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \text{rad}(\mathcal{U}) = \mathcal{W}' \oplus \text{rad}(\mathcal{U})$ за неки недегенерисан $\mathcal{W}' \leq \mathcal{V}$. Ако је $(E_1, \dots, E_k)$ ортонормирана база за $\mathcal{W}$, тада из $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}' \oplus \text{rad}(\mathcal{U})$ можемо раставити $E_i = E'_i + N_i$ где $E'_i \in \mathcal{W}'$ и $N_i \in \text{rad}(\mathcal{U})$. Међутим, како је $g(E_i, E_j) = g(E'_i + N_i, E'_j + N_j) = g(E'_i, E'_j)$, то је $(E'_1, \dots, E'_k)$ ортонормирана база за $\mathcal{W}'$, при чему $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ имају исту сигнатуру. Тако инваријантно уводимо **сиџнаџуру** потпростора $\mathcal{U}$ квадратног векторског простора $\mathcal{V}$ као уређену тројку (p, q, r) , где је (p, q) сигнатура квадратног векторског простора $(\mathcal{W}, g|_{\mathcal{W}})$, а $r = \dim \text{rad}(\mathcal{U})$. $\triangle$

За потпуно изотропан потпростор $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ Лема 4.2 даје $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$. Како је $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}^\perp$, то следи $\dim \mathcal{W} \leq (\dim \mathcal{V})/2$. Штавише, димензија потпуно изотропног потпростора је одозго ограничена индексом.

Теорема 4.11. *За њоџиуно изоџроџан њоџпротџор $\mathcal{W}$ квадраџноџ протџора $(\mathcal{V}, g)$ је $\dim \mathcal{W} \leq \min(\text{Ind}(g), \dim \mathcal{V} - \text{Ind}(g))$, а њосебно важи $\dim \mathcal{W} \leq (\dim \mathcal{V})/2$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$ растављање из Леме 4.9. Из Грасманове формуле имамо једнакост $\dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{W} + \mathcal{V}^+) + \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+) - \dim \mathcal{V}^+$. Како важи $\mathcal{W} + \mathcal{V}^+ \leq \mathcal{V}$ и $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}^+ = \{0\}$, то добијамо $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{V}^+ = \dim \mathcal{V}^- = \text{Ind}(g)$. Последично, $\dim \mathcal{W} \leq \text{Ind}(-g) = \dim \mathcal{V} - \text{Ind}(g)$. $\square$

Пример 4.5. Ако је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни простор сигнатуре (p, q) , онда он има ортонормирану базу $(T_1, \dots, T_p, S_1, \dots, S_q)$, где су T_i временски, а S_i просторни. Граница из Теореме 4.11 се лако достиже конструкцијом потпуно изотропног потпростора $\text{Span}\{S_1 + T_1, S_2 + T_2, \dots, S_v + T_v\}$, где је $v = \min(p, q)$. Могуће су и многе друге конструкције, јер се елементи базе могу пермутовати, док се појединачни елементи могу мењати супротним вектором. Димензија максималног потпуно изотропног потпростора од $(\mathcal{V}, g)$ назива се **Виџов индекс**³. Приметимо да је Витов индекс v заправо једнак $\min(\text{Ind}(g), \text{Ind}(-g))$. $\triangle$

Сваки потпуно изотропан потпростор квадратног простора има свој изотропан суплемент о чему говори наредна теорема (на пример, видети Кларк [41, Теорема 6.2]).

Теорема 4.12. *Нека је $\mathcal{W}$ њоџиуно изоџроџан њоџпротџор квадраџноџ протџора $(\mathcal{V}, g)$. За сваку базу $(N_1, \dots, N_k)$ од $\mathcal{W}$ њосџоџи одџовараџуџа база $(M_1, \dots, M_k)$ некоџ њоџиуно изоџроџноџ њоџпротџора од $\mathcal{V}$ коџи са $\mathcal{W}$ има џривиџалан пресек џако да $g(N_i, M_j) = \delta_{ij}$ важи за $1 \leq i, j \leq k$.*

³Ernst Witt (1911–1991), немачки математичар

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по k , где је случај $k = 0$ тривијалан. Поставимо $\mathcal{P} = \text{Span}\{N_1, \dots, N_{k-1}\}$. Како $\text{Span}\{N_k\}$ није потпростор од $\mathcal{P}$, то $\mathcal{P}^\perp$ није потпростор од $\text{Span}\{N_k\}^\perp$, те постоји $X \in \mathcal{P}^\perp$ такво да је $g(X, N_k) \neq 0$. Тада је

$$M_k = \frac{-\varepsilon_X}{2(g(X, N_k))^2} N_k + \frac{1}{g(X, N_k)} X$$

изотропан са $g(N_k, M_k) = 1$. Потпростор $\text{Span}\{N_k, M_k\} = \text{Span}\{N_k, X\} \leq \mathcal{P}^\perp$ је недегенерисан јер има ортонормирану базу $((N_k + M_k)/\sqrt{2}, (N_k - M_k)/\sqrt{2})$. Одавде је $\mathcal{P}$ потпростор недегенерисаног простора $\text{Span}\{N_k, M_k\}^\perp$ посматраног као квадратни простор, где индукцијска хипотеза доноси $(M_1, \dots, M_{k-1})$, што заједно са M_k формира базу потпуно изотропног простора са траженим својствима. $\square$

4.3 Псеудо-Риманове многострукости

Метрички тензор или **метрика** на многострукости M је симетрично коваријантно тензорско поље реда два на M које је недегенерисано у свакој тачки и има константан индекс. Другим речима, метрика је пресликавање $g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ које глатко додељује скаларни производ $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ сваком тангентном простору $T_p M$, тако да индекс $\text{Ind}(g_p)$ не зависи од $p \in M$. **Псеудо-Риманова мноїосїрукосї** (*pseudo-Riemannian manifold, semi-Riemannian manifold*) је многострукост M опремљена метриком g .

Строго говорећи, псеудо-Риманова многострукост је уређен пар (M, g) . Две различите метрике на истој многострукости успостављају различите псеудо-Риманове многострукости. Често се дешава да псеудо-Риманова многострукост има подразумевану конкретну метрику, те је тада обележавамо исто као и саму глатку многострукост.

Заједнички индекс $0 \leq \nu = \text{Ind}(g_p) = \text{Ind}(g) = \text{Ind}(M) \leq \dim M = n$ свих скаларних производа g_p зовемо **индекс** псеудо-Риманове многострукости (M, g) . Како разлика између g и $-g$ у псеудо-Римановој многострукости није суштинска, можемо не умањујући општост претпоставити да индекс задовољава $\nu \leq n/2$.

Занимљиво је посматрати неке специјалне случајеве у зависности од индекса. Најчешће се изучава случај $\nu = 0$, где за M кажемо да је **Риманова мноїосїрукосї**. У овом случају g је **Риманова метрика**, а карактерише је то да је g_p позитивно дефинитан скаларни производ на $T_p M$ за свако $p \in M$. Ако је $\nu = 1 \neq n$ онда је M **Лоренцова мноїосїрукосї**⁴, а одговарајућа метрика је **Лоренцова**. Псеудо-Риманова многострукост сигнатуре (ν, ν) је **Клајнова мноїосїрукосї**⁵, она је обавезно парне димензије, док за њену метрику кажемо да је **Клајнова** или **неутрална**.

Нека је (U, φ) карта на псеудо-Римановој n -многострукости (M, g) , где су $x_i = \pi_i \circ \varphi$ њене координатне функције. Компоненте метричког тензора g на U су $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ за $1 \leq i, j \leq n$. Зато, за векторска поља $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ имамо

$$g(X, Y) = g\left(\sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i, \sum_{j=1}^n Y(x_j) \partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^n g(\partial_i, \partial_j) X(x_i) Y(x_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i(X) dx_j(Y),$$

одакле метрички тензор можемо изразити са

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j,$$

⁴Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), холандски физичар

⁵Felix Klein (1849–1925), немачки математичар

где $dx_i dx_j = (dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i)/2$ означава симетричан производ коваријантних тензорских поља.

Пример 4.6. Најједноставнији и најважнији пример Риманове многострукости је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ са **еуклидском метриком** $\bar{g}$ која представља класичан унутрашњи производ на сваком тангентном простору под природном идентификацијом $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. У стандардним координатама можемо записати

$$\bar{g} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} dx_i dx_j = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2, \quad (4.5)$$

односно $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, што даје јединичну Грамову матрицу $G = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Убудуће у било ком геометријском контексту **еуклидски ѝпросѝор** $\mathbb{R}^n$ означава Риманову многострукост $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$. $\triangle$

Пример 4.7. Почевши од стандардне метрике $\bar{g}$ на $\mathbb{R}^n$ из (4.5), за било које $1 \leq v \leq n$ можемо променити првих v знакова из плуса у минус. То доводи до метричког тензора $g = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (dx_i)^2$, где имамо $\varepsilon_i = -1$ за $1 \leq i \leq v$ и $\varepsilon_i = +1$ за $v+1 \leq i \leq n$. Резултујућа псеудо-Риманова многострукост $\mathbb{R}_v^n = (\mathbb{R}^n, g)$ зове се **ѝсеудо-еуклидски ѝпросѝор** индекса v . Посебно, за $n \geq 2$ Лоренцову многострукост $\mathbb{R}_1^n$ зовемо **ѝпросѝор Минковској**⁶, док је $\mathbb{R}_1^4$ најједноставнији пример релативистичког простор-времена. $\triangle$

Пример 4.8. **Вокерова метрика**⁷ дефинише се на неком отвореном подскупу M од $\mathbb{R}^{2n}$ са стандардним координатама $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, задавањем Грамове матрице у односу на природни глобални покретни репер $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{2n})$ са

$$g = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где су $f_{ij} = f_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ за $1 \leq i \leq j \leq n$ произвољне глатке функције на M . Матрица (4.6) је симетрична и инвертибилна, са детерминантом $(-1)^n \neq 0$. Честа потешкоћа у конструкцији псеудо-Риманове многострукости јесте обезбеђивање константности индекса. Из (4.6) следи да је $\mathcal{W}_p = \text{Span}\{(\partial_{n+1})_p, (\partial_{n+2})_p, \dots, (\partial_{2n})_p\}$ n -димензиони потпуно изотропан потпростор квадратног простора $(T_p \mathbb{R}^{2n}, g_p)$ за сваку тачку $p \in M$. Из Теореме 4.11 важи $n = \dim \mathcal{W}_p \leq \text{Ind}(g_p) \leq \dim M - \dim \mathcal{W}_p = n$, одакле следи $\text{Ind}(g_p) = n$. Према томе, g је Клајнова метрика на $\mathbb{R}^{2n}$, чиме се добија велика фамилија псеудо-Риманових многострукости (M, g) сигнатуре (n, n) . $\triangle$

Понекад уместо метричког тензора g посматра се одговарајућа квадратна норма дата са $\varepsilon_X = g(X, X)$ за $X \in TM$, која по (4.2) јединствено одређује метрику. Многи аутори ову квадратну форму ε означавају са ds^2 и зову је **дужински елемент** (*line element*) од M . У координатама то постаје $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$, што значи да је

$$\varepsilon_X = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i(X) dx_j(X) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j.$$

⁶Hermann Minkowski (1864–1909), немачки математичар

⁷Arthur Geoffrey Walker (1909–2001), британски математичар

Са наше тачке гледишта, израз $\sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$ треба сматрати самим метричким тензором g , те зато нећемо користити ознаку ds^2 .

У присуству метричког тензора можемо говорити о ортонормираним векторским пољима. Нека је U отворен подскуп псеудо-Риманове n -многострукости (M, g) . **Локални ортонормирани покретни репер** за M над U је локални покретни репер $(E_1, \dots, E_n)$ за M над U такав да у свакој тачки $p \in U$, вектори $(E_1)_p, \dots, (E_n)_p$ формирају ортонормирану базу тангентног простора $T_p M$. На пример, координатни покретни репер $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ је глобални ортонормирани покретни репер за $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$.

Пример 4.9. Посматрајмо отворен подскуп $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Нека је E_1 јединично векторско поље тангентно на радијалне линије, а E_2 јединично векторско поље тангентно на кругове центриране у координатном почетку. Тада векторска поља

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad E_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

чине локални ортонормирани покретни репер за $\mathbb{R}^2$ над U (видети Пример 2.29 за рачуне). Међутим, (E_1, E_2) не може бити координатни покретни репер у односу на неки избор локалних координата јер важи $[E_1, E_2] = -(\partial/\partial\theta)/r^2 \neq 0$. $\triangle$

Ортонормирани покретни репери су веома корисни у изучавању Риманових и псеудо-Риманових многострукости. У Римановом случају ситуација је праволинијска јер Грам–Шмитов поступак конструише локални ортонормирани покретни репер на гладак начин почевши од произвољног локалног покретног репера. То ради јер вектори чије се норме јављају у имениоцима нигде нису нула. Међутим, кад је метрика недефинитна могу се појавити изотропни вектори и потребна је додатна опрезност.

Теорема 4.13. *Постоји локални ортонормирани покретни репер над околином сваке тачке псеудо-Риманове многострукости.*

Доказ. Нека је (M, g) псеудо-Риманова n -многострукост и $p \in M$. Размотримо локални координатни покретни репер $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ над неком координатном околином $U \ni p$ и фиксирајмо ортонормирану базу $(V_1, \dots, V_n)$ од $T_p M$. Како за неку матрицу преласка $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ важи $(V_1, \dots, V_n) = ((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p)A$, можемо дефинисати нови локални покретни репер $(X_1, \dots, X_n)$ са $((X_1)_q, \dots, (X_n)_q) = ((\partial_1)_q, \dots, (\partial_n)_q)A$ за свако $q \in U$. Онда је $g_p((X_i)_p, (X_j)_p) = g_p(V_i, V_j) = \pm \delta_{ij}$, те како $g(X_i, X_j) \in \mathfrak{F}(U)$, непрекидност повлачи да постоји околина $W \subseteq U$ од p у којој за свако $1 \leq i \neq j \leq n$ имамо

$$|g(X_i, X_i)| > a = \frac{3}{4} + \frac{1}{3n} < 1 \quad \text{и} \quad |g(X_i, X_j)| < b = \frac{1}{6n}.$$

Примена Грам–Шмитовог поступка индуктивно конструише ортогонални покретни репер $(Y_1, \dots, Y_n)$ над W такав да за свако $1 \leq j < k \leq n$ имамо

$$|g(Y_j, Y_j)| > d = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad |g(Y_j, X_k)| < c = \frac{1}{2n}.$$

Нека је $Y_1 = X_1$. Претпоставимо да је $(Y_1, \dots, Y_{j-1})$ већ дефинисано за неко $2 \leq j \leq n$ и дефинишимо

$$Y_j = X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(Y_i, X_j)}{g(Y_i, Y_i)} Y_i.$$

По конструкцији имамо $g(Y_j, Y_i) = 0$ за $1 \leq i \leq j-1$. Штавише,

$$\begin{aligned} |g(Y_j, Y_j)| &= \left| g(X_j, X_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(g(Y_i, X_j))^2}{g(Y_i, Y_i)} \right| \\ &\geq |g(X_j, X_j)| - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|g(Y_i, X_j)|^2}{|g(Y_i, Y_i)|} > a - n \frac{c^2}{d} = d, \\ |g(Y_j, X_k)| &= \left| g(X_j, X_k) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(Y_i, X_j)g(Y_i, X_k)}{g(Y_i, Y_i)} \right| \\ &\leq |g(X_j, X_k)| + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|g(Y_i, X_j)||g(Y_i, X_k)|}{|g(Y_i, Y_i)|} < b + n \frac{c^2}{d} = c, \end{aligned}$$

за свако $1 \leq j < k \leq n$, што комплетира индуктивни корак. Коначно, како је функција $\|Y_i\| = \sqrt{|g(Y_i, Y_i)|} \in \mathfrak{F}(W)$ свуда ненула можемо дефинисати $E_i = Y_i/\|Y_i\| \in \mathfrak{X}(W)$ за свако $1 \leq i \leq n$. Тада је $(E_1, \dots, E_n)$ локални ортонормирани покретни репер над $W \ni p$, као што је тражено. $\square$

Вреди напоменути да услов константног индекса у дефиницији метричког тензора није посебно рестриктиван. Заиста, тај услов није коришћен у доказу претходне теореме, док су конструисане функције $g(E_i, E_i) \in \mathfrak{F}(W)$ непрекидне и узимају вредности 1 или -1 . Следи да је индекс аутоматски константан на свакој компоненти повезаности наше многострукости.

4.4 Повлачење метричких тензора

Кад конструишемо нове многострукости од старих, често постоји природан начин да се на новој многострукости индукује метрика из старе метрике. У ту сврху потребно нам је повлачење коваријантног тензорског поља. Нека је $f: M \rightarrow N$ глатко пресликавање између многострукости M и псеудо-Риманове многострукости (N, g) . Повлачење од $g \in \mathfrak{T}_2^0(N)$ је коваријантно тензорско поље $f^*g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ дефинисано са

$$(f^*g)_p(X_p, Y_p) = g_{f(p)}(f_*(X_p), f_*(Y_p)),$$

за свако $p \in M$ и све $X_p, Y_p \in T_pM$. Како је g симетрично, његово повлачење f^*g је такође симетрично. Међутим, ако f није имерзија, онда f_* није инјективно, те постоји тачка $p \in M$ и ненула вектор $X_p \in T_pM$ тако да је $f_*(X_p) = 0$, што повлачи $(f^*g)_p(X_p, Y_p) = 0$ за све $Y_p \in T_pM$. Зато је $(f^*g)_p$ дегенерисано. Због тога f^*g може бити метрички тензор само уколико је f имерзија. Међутим, у општем случају само овај услов није довољан.

Пример 4.10. Посматрајмо круг S^1 природно смештен у $\mathbb{R}_1^2$ са $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, где је t локална координата угаоне функције из Примера 2.8. Повлачење метричког тензора је $i^*g = -dx^2 + dy^2 = -(-\sin t dt)^2 + (\cos t dt)^2 = \cos 2t dt^2$. Овај тензор i^*g је дегенерисан за $t \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, те не дефинише метрику, а дуж тих тачака се мења индекс. $\triangle$

Међутим, у Римановом случају овај услов је такође и довољан. Ако је f_* инјективно, онда позитивна дефинитност од g повлачи да је f^*g позитивно дефинитно, те и недегенерисано. Зато је f^*g Риманова метрика на M .

Теорема 4.14. *Ако је (N, g) Риманова мноїострукост, а $f: M \rightarrow N$ имерзија, тада је (M, f^*g) Риманова мноїострукост.*

Нека је P подмногострукост псеудо-Риманове многострукости (M, g) , а $\iota: P \hookrightarrow M$ инклузија. Уколико је ι^*g метрика на P , онда кажемо да је (P, ι^*g) **ісеудо-Риманова іогмноїострукост** од (M, g) . Сваки тангентни простор T_pP природно се посматра као потпростор од T_pM , али нема директног разлога зашто би он морао бити недегенерисан у односу на g_p . Штавише, чак и да је то случај у свакој тачки, индекс од $g_p|_{T_pP}$ не мора бити константан на P .

Захваљујући Теорему 4.14 ситуација је много једноставнија у Римановом случају. Ако је P подмногострукост Риманове многострукости (M, g) са инклузијом $\iota: P \hookrightarrow M$, онда је (P, ι^*g) **Риманова іогмноїострукост** од (M, g) . Како за свако $p \in P$ имамо $T_pP \leq T_pM$, Риманова метрика ι^*g на P је једноставно рестрикција од g на T_pP .

Ако знамо координатну репрезентацију имерзије, онда се индукована Риманова метрика може лако израчунати. У некој карти са координатним функцијама x_i , имамо

$$f^*g = f^* \left(\sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \right) = \sum_{ij} f^*(g_{ij}) f^*(dx_i) f^*(dx_j) = \sum_{ij} (g_{ij} \circ f) d(x_i \circ f) d(x_j \circ f),$$

што примењујемо у наредним конкретним примерима.

Пример 4.11. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато са $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, што је имерзија чија је слика хеликоид. Индукована метрика $f^*\bar{g}$ се рачуна са

$$\begin{aligned} f^*\bar{g} &= f^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = d(u \cos v)^2 + d(u \sin v)^2 + d(v)^2 \\ &= (\cos v du - u \sin v dv)^2 + (\sin v du + u \cos v dv)^2 + dv^2 = du^2 + (u^2 + 1) dv^2. \end{aligned}$$

△

За изражавање Риманове метрике у новим координатама, посматрамо идентичко пресликавање записано у различитим координатним системима на домену и кодомену.

Пример 4.12. Еуклидска метрика $\bar{g} = dx^2 + dy^2$ на $\mathbb{R}^2$ изражава се у поларним координатама као повлачење идентичког пресликавања. Како је $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$, то имамо

$$\begin{aligned} \bar{g} &= dx^2 + dy^2 = d(r \cos \theta)^2 + d(r \sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

△

Од Риманове метрике се захтева да буде позитивно дефинитна и то је најчешће изучаван тип метрике. Једна лепа особина Риманових метрика је да их има у изобиљу.

Теорема 4.15. *Свака мноїострукост дозвољава Риманову метрику.*

Доказ. Нека је M многострукост са глатким атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. По Теорему 1.20 постоји разбијање јединице $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ подређено отвореном покривачу $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. У свакој карти постоји Риманова метрика $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \bar{g}$ индукована стандардном еуклидском метриком из (4.5). Због локалне коначности постоји коначно много ненула чланова у околини сваке тачке, те $g = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha g_\alpha$ дефинише симетрично коваријантно тензорско поље реда два. За $0 \neq X \in T_pM$ имамо $g_p(X, X) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(p) (g_\alpha)_p(X, X)$. Како је сваки члан ненегативан, сума је ненегативна, а због $\sum_{\alpha \in \Lambda} \psi_\alpha(p) = 1$, постоји бар један $\alpha \in \Lambda$ такав да је $\psi_\alpha(p) > 0$. Зато важи $g_p(X, X) > 0$, те је g позитивно дефинитна метрика. □

Важно је приметити да постоји огроман избор у конструкцији метрике g на да-тој многострукости. Конкретно, разне метрике на истој многострукости могу имати прилично различите геометријске особине. Међутим, исти поступак не ради у не-дефинитном случају, иако можемо конструисати метрику индекса ν на свакој ко-ординатној околини за произвољно $0 < \nu < n$. Разлог је тај што збир две метрике индекса ν може бити дегенерисан, те зато није нужно метрика.

Пример 4.13. Нека су (M, g_M) и (N, g_N) псеудо-Риманове многострукости, те нека су $\pi_M: M \times N \rightarrow M$ и $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ природне пројекције. На производ многострукости $M \times N$ можемо дефинисати **производ метрику** са

$$g_M \times g_N = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N).$$

Ако искористимо природан изоморфизам $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \times T_q N$ из Примера 2.2, онда је одговарајућа Грамова матрица блок дијагонална, са блоковима који су поје-диначне Грамове матрице. Псеудо-Риманову многострукост $(M \times N, g_M \times g_N)$ зове-мо **псеудо-Риманов производ** од (M, g_M) и (N, g_N) . $\triangle$

Пример 4.14. Општије од претходног примера, за сваку строго позитивну функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ можемо поставити

$$g_M \times_f g_N = \pi_M^*(g_M) + (f \circ \pi_M) \pi_N^*(g_N).$$

Овог пута Грамова матрица у тачки (p, q) је блок дијагонална, где је први блок Гра-мова матрица од g_M у p , а други Грамова матрица од g_N у q множена позитив-ном константом $c = f(p) > 0$. Симетричност и недегенерисаност су очигледне, док $\text{Ind}(c g_N) = \text{Ind}(g_N)$ повлачи $\text{Ind}(g) = \text{Ind}(g_M) + \text{Ind}(g_N)$. Псеудо-Риманову многостру-кост $M \times_f N = (M \times N, g_M \times_f g_N)$ зове-мо **уврнућу производ** (*warped product*), што се у специјалном случају $f = 1$ своди на стандардни псеудо-Риманов производ. $\triangle$

Нека су (M, g_M) и (N, g_N) две псеудо-Риманове многострукости. Глатко преслика-вање $f: M \rightarrow N$ између одговарајућих многострукости је **псеудо-Риманова имерзи-ја** уколико чува метричке тензоре, односно ако је $f^*(g_N) = g_M$, што можемо експли-цитно записати са

$$(g_M)_p(X_p, Y_p) = (g_N)_{f(p)}(T_p f(X_p), T_p f(Y_p))$$

за свако $p \in M$ и $X_p, Y_p \in T_p M$. Свако такво пресликавање је имерзија, што оправдава име и доноси неједнакости $\dim M \leq \dim N$ и $\text{Ind } g_M \leq \text{Ind } g_N$.

Изометрија из (M, g_M) у (N, g_N) је псеудо-Риманова имерзија $f: M \rightarrow N$ која је та-кође дифеоморфизам. Кажемо да су псеудо-Риманове многострукости **изометрич-не** уколико постоји изометрија између њих. Ако је псеудо-Риманова имерзија f само локални дифеоморфизам онда кажемо да је то **локална изометрија**. Како је такво f већ имерзија, за локалну изометрију из Теореме 2.9 следи да је $\dim M = \dim N$.

Лако је увидети да су композиција две изометрије и инверз изометрије такође изометрије, као што је то и идентичко пресликавање. Бити изометричан је зато ре-лација еквиваленције, те можемо рећи да је изометрија нарочита врста пресликава-ња која омогућава појам изоморфизма у категорији псеудо-Риманових многостру-кости. **Псеудо-Риманова изометрија** представља изучавање особина псеудо-Ри-манових многострукости које су инваријантне у односу на локалне или глобалне изометрије.

За фиксирану псеудо-Риманову многострукост M , изометрија $f: M \rightarrow M$ се зове **изометрија од M** . Скуп свих изометрија од M чини групу $\mathcal{I}(M)$, коју зове-мо **група изометрија од M** . Класичан резултат је да $\mathcal{I}(M)$ има структуру Лијеве групе [83, По-слевица 2]. За Риманове многострукости то су установили Мајерс⁸ и Стинрод 1939. године [91].

⁸Sumner Byron Myers (1910–1955), амерички математичар

Пример 4.15. Нека је $f: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ дато са $f(z) = z^2$, где је $\iota: \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$, те $\mathbf{S}^1$ има Риманову метрику $g = \iota^* \bar{g}$. Како је f имерзија, f^*g по Теорему 4.14 дефинише Риманову метрику на $\mathbf{S}^1$. Дакле, f је Риманова имерзија из $(\mathbf{S}^1, f^*g)$ у $(\mathbf{S}^1, g)$, али није изометрија јер f није дифеоморфизам. $\triangle$

Пример 4.16. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ квадратни простор димензије n . Избором базе на $\mathcal{V}$ добијамо бијективно линеарно пресликавање што је хомеоморфизам између $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$, те је $\mathcal{V}$ многострукост. Постоји канонски линеарни изоморфизам $X \mapsto X_Z$ из $\mathcal{V}$ на сваки тангентни простор $T_Z \mathcal{V}$ који је дат као извод по правцу

$$X_Z h = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(Z + tX).$$

Сада $g_Z(X_Z, Y_Z) = g(X, Y)$ дефинише метрички тензор на многострукости $\mathcal{V}$ која тако постаје псеудо-Риманова многострукост. Ако је $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ линеарна изометрија између квадратних простора $(\mathcal{V}, g^\mathcal{V})$ и $(\mathcal{W}, g^\mathcal{W})$, имамо

$$T_Z f(X_Z)(h) = X_Z(h \circ f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(f(Z) + tf(X)) = f(X)_{f(Z)} h,$$

што даје $T_Z f(X_Z) = f(X)_{f(Z)}$, одакле следи

$$\begin{aligned} (f^* g^\mathcal{W})_Z(X_Z, Y_Z) &= g^\mathcal{W}_{f(Z)}(f_* X_Z, f_* Y_Z) = g^\mathcal{W}_{f(Z)}(f(X)_{f(Z)}, f(Y)_{f(Z)}) \\ &= g^\mathcal{W}(f(X), f(Y)) = g^\mathcal{V}(X, Y) = g_Z^\mathcal{V}(X_Z, Y_Z), \end{aligned}$$

што доказује да је f псеудо-Риманова имерзија. Како је линеарно пресликавање глатко, линеарни изоморфизам f је дифеоморфизам, те је f изометрија између псеудо-Риманових многострукости $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Одавде следи да је квадратни простор $\mathcal{V}$ димензије n и индекса ν као псеудо-Риманова многострукост изометрична са $\mathbb{R}_\nu^n$. Заправо, координатни изоморфизам задат произвољном ортонормираном базом у $\mathcal{V}$ јесте изометрија. $\triangle$

4.5 Музички изоморфизми

Није лоше имати у виду да псеудо-Риманова метрика индукује природан изоморфизам између векторских поља и ковекторских поља.

За дату псеудо-Риманову многострукост (M, g) дефинишемо пресликавање $\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ које зовемо **снизилица** (*flat*), а које векторском пољу $X \in \mathfrak{X}(M)$ додељује ковекторско поље $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ дефинисано са $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ за све $Y \in \mathfrak{X}(M)$. За сваку тачку $p \in M$, ова конструкција рестрикује се на линеарно пресликавање $\flat_p: T_p M \rightarrow T_p^* M$, које вектор $X_p \in T_p M$ шаље у ковектор $X_p^\flat \in T_p^* M$ при чему важи $X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$ за све $Y_p \in T_p M$.

Приметимо да је недегенерисаност симетричне билинеарне форме $g_p \in \mathfrak{T}_2^0(T_p M)$ еквивалентан услову $\text{Ker}(\flat_p) = 0$, односно томе да је $\flat_p$ инјективно. Како радимо у коначним димензијама и $\dim T_p M = \dim T_p^* M = \dim M$, инјективност је еквивалентна бијективности. Зато је $\flat_p$ изоморфизам за свако $p \in M$. Последице, псеудо-Риманова метрика увек одређује изоморфизам између тангентних и котангентних простора у свакој тачки, те и између векторских и ковекторских поља на M .

Погледајмо шта се дешава у карти (U, φ) са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, тада

$$X^\flat = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^n g \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i dx_j = \sum_{j=1}^n X_j dx_j,$$

где је $X_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} X^i$. Тако је X^b добијено од X спуштањем индекса, што објашњава назив снизивилица. Како видимо, матрица снизивилице у односу на координатну базу је тачно Грамова матрица G од g .

Са друге стране, инверзни изоморфизам $\sharp = b^{-1}: \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ зовемо **повисивилица** (*sharp*). Повисивилица шаље ковекторско поље $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ у векторско поље $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ тако да је $\omega(X) = b\sharp\omega(X) = g(\omega^\sharp, X)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. У координатама, матрица повисивилице је G^{-1} .

Док су g_{ij} елементи од G , елементе од G^{-1} означимо са g^{jk} , тако да је $\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}$. Компоненте инверзне матрице глатко зависе од почетних компоненти, те су и функције g^{jk} глатке на U . Како је G симетрична, њен инверз G^{-1} је такође симетрична, те је $g^{jk} = g^{kj}$. Сада за $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ имамо $\omega^\sharp = \sum_{j=1}^n \omega^j \partial_j$, где је $\omega^j = \sum_{i=1}^n g^{ij} \omega_i$ и кажемо да је $\omega^\sharp$ добијено од ω дизањем индекса.

Пресликавања $b: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ и $\sharp: \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ називају се **музички изоморфизми**, пријатно име које је пропагирао (и вероватно сковао) Берже⁹ [18].

Вероватно најважнија примена повисивилице је проширење класичног градијента на псеудо-Риманове многострукости. Ако је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и $f \in \mathfrak{F}(M)$, онда је **градијент** од f векторско поље

$$\text{grad} f = \sharp df \in \mathfrak{X}(M)$$

добијено из диференцијала $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ дизањем индекса. Градијент карактерише идентитет $g(\text{grad} f, X) = df(X) = Xf$, који важи за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$. У локалним координатама ово даје

$$\text{grad} f = \sharp df = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Посебно, за природне координате псеудо-еуклидског простора $\mathbb{R}_\nu^n$, координатни покретни репер је ортонормиран, те се горња формула своди на $\text{grad} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_i f \partial_i$, што се слаже са уобичајеним изразом у еуклидском простору, где градијент има исте компоненте као и df .

Снизивилица и повисивилица се могу применити на тензоре произвољног типа и на било којој позицији индекса. У том случају, ради прецизности, потребно је нагласити на које се позиције односе. За тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^{r+1}(M)$ уводимо ознаку $b_b^a A \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$, којом се горњи индекс на позицији $1 \leq a \leq r+1$ спушта на доњу позицију $1 \leq b \leq s+1$. Инверзна операција означава се са $\sharp_b^a$ и њоме се доњи индекс са позиције a подиже на горњу позицију b .

На овај начин контраваријантна и коваријантна тензорска поља могу се међусобно преводити, при чему се тип тензорског поља мења, док се ред тензора чува. Уколико не нагласимо конкретне позиције индекса, подразумевана конвенција је да се узимају највеће могуће вредности a и b . Другим речима, за $A \in \mathfrak{T}_s^{r+1}(M)$, операција $b = b_{s+1}^{r+1}$ спушта последњи горњи индекс на крај доњих индекса, док за $A \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$, операција $\sharp = \sharp_{s+1}^{r+1}$ подиже последњи доњи индекс на крај горњих индекса.

На пример, тензорском пољу $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ можемо снизити горњи индекс и добити коваријантни тензор $bA \in \mathfrak{T}_3^0(M)$, чије су компоненте дате са $A_{ijk} = (bA)_{ijk} = \sum_{l=1}^n g_{kl} A_{ij}^l$.

У општем случају снизивилица се може пренети на одговарајући аргумент. Заиста,

⁹Marcel Berger (1927–2016), француски математичар

коришћењем координатног израза (3.6) добијамо

$$\begin{aligned} b_b^a A(\dots, Z, \dots) &= \sum_i \sum \dots Z^i \dots (b_b^a A) \dots = \sum_i \sum \dots Z^i \dots \sum_j g_{ji} A \dots \\ &= \sum_j \sum \dots \sum_i g_{ji} Z^i \dots A \dots = \sum_j \sum \dots (bZ)_j \dots A \dots = A(\dots, bZ, \dots), \end{aligned}$$

што се потпуно аналогно примењује на повисилицу. Прецизније, за векторска поља $A \in \mathfrak{T}_s^{r+1}(M)$ и $B \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$ и индексе $1 \leq a \leq r+1$ и $1 \leq b \leq s+1$ имамо

$$\begin{aligned} b_b^a A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_{b-1}, Z, X_b, \dots, X_s) &= A(\omega_1, \dots, \omega_{a-1}, bZ, \omega_a, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \\ \sharp_b^a B(\omega_1, \dots, \omega_{a-1}, \tau, \omega_a, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) &= B(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_{b-1}, \sharp\tau, X_b, \dots, X_s) \end{aligned} \quad (4.7)$$

за све $\omega_1, \dots, \omega_r, \tau \in \mathfrak{X}^*(M)$ и $X_1, \dots, X_s, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Посебно, за $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо $bA(X, Y, Z) = A(bZ, X, Y)$.

Још једна важна примена снизилице и повисилице је продужење контракције. У најједноставнијем случају посматрамо тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Подизањем последњег индекса добијамо $\sharp A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, те контракција доноси $\text{tr}_g(A) = C\sharp A \in \mathfrak{F}(M)$. Ова операција tr_g се зове **траг**. У локалним координатама, траг од A у односу на g је дат са

$$\text{tr}_g A = C\sharp A = \sum_{i=1}^n A_i^i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij},$$

што се у случају ортонормиране базе своди на обичан траг одговарајуће матрице.

У општем случају, нека је $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ са $s \geq 2$. За избор коваријантних индекса $1 \leq a, b \leq s$, дефинишемо одговарајући траг од A у односу на g са

$$(\text{tr}_g)_{ab} A = C_a^1 \sharp_b^1 A = C_a^{r+1} \sharp_b^{r+1} A \in \mathfrak{T}_{s-2}^r(M).$$

Како је инверз Грамове матрице симетричан ($g^{jk} = g^{kj}$), следи да је $(\text{tr}_g)_{ab} = (\text{tr}_g)_{ba}$. Уколико коваријантни индекси по којима се врши траг нису наглашени, подразумевана конвенција је $a = 1$ и $b = s$, те је тад траг од A дат са $\text{tr}_g A = C_1^1 \sharp_s^1 A = C_1^{r+1} \sharp_s^{r+1} A$.

Примена музичких изоморфизама омогућава нам да одгонетнемо кад ће нека n -многострукост дозволити метрику унапред одређеног индекса $0 < v < n$.

Теорема 4.16. *Многострукост дозвољава метрику индекса v ако и само ако дозвољава v -димензиону дистрибуцију.*

Доказ. Најпре претпоставимо да је (M, g) псеудо-Риманова n -многострукост индекса $0 < v < n$. По Теореме 4.15 бирамо помоћну Риманову метрику $\bar{g}$ на M и дефинишемо тензорско поље $T \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ са $T(X) = \sharp_{\bar{g}} b_g X$ за $X \in \mathfrak{X}(M)$. Еквивалентно, $T: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ је јединствено $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно пресликавање које задовољава $g(X, Y) = \bar{g}(T(X), Y)$ за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. У односу на $\bar{g}$ -ортонормирани покретни репер, матрица од T поклапа се са Грамовом матрицом од g . Како ова матрица има сопствене вредности $+1$ и -1 чије су вишеструкости редом $n - v$ и v , то је $\det(\lambda \mathbb{1} - T) = (\lambda - 1)^{n-v} (\lambda + 1)^v$. Одавде следи да је $T + \mathbb{1}$ хомоморфизам тангентног раслојења над M константног ранга $n - v$, те по Теореме 3.3 његово језгро дефинише v -димензиону дистрибуцију $\text{Ker}(T + \mathbb{1})$ на M . Штавише, добијамо растављање $TM = \text{Ker}(T + \mathbb{1}) \oplus \text{Ker}(T - \mathbb{1})$.

Обратно, претпоставимо да M допушта v -димензиону дистрибуцију D . Изаберимо Риманову метрику $\bar{g}$ на M , те нека $D^\perp$ означава ортогонални комплемент од D у односу на $\bar{g}$. Тада је $TM = D \oplus D^\perp$ и $T_p M = D_p \oplus D_p^\perp$ за све $p \in M$. Ако запишемо $\bar{g} = \bar{g}_D \oplus \bar{g}_{D^\perp}$ за одговарајуће растављање метрике, тензор $g = (-\bar{g}_D) \oplus \bar{g}_{D^\perp}$ дефинише псеудо-Риманову метрику на M индекса v . $\square$

Иако свуда нонула векторско поље на многострукости директно одређује једнодимензиону дистрибуцију, обрат није очигледан. Ипак, егзистенција ових структура је уско повезана. Алгебарска топологија показује да је постојање свуда нонула векторског поља на многострукости M еквивалентно томе да је M или некомпактна или има Ојлерову¹⁰ карактеристику $\chi(M) = 0$. Овај услов је заузврат еквивалентан постојању једнодимензионе дистрибуције на M (видети О'Нил [100, Пропозиција 5.37]). Због тога, свака некомпактна многострукост дозвољава Лоренцову метрику, док су торус и Клајнова флаша једине компактне дводимензионе многострукости са том особином. Конкретна конструкција Лоренцове метрике из векторског поља дата је у наредном примеру.

Пример 4.17. Претпоставимо да многострукост M допушта свуда нонула векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$. По Теорему 4.15 можемо изабрати Риманову метрику g на M . Посматрајмо симетричан коваријантни тензор $g_L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ дефинисан са

$$g_L = g - \frac{2}{g(X, X)} X^\flat \otimes X^\flat.$$

Јасно је да важи $g_L(X, X) = -g(X, X) < 0$, док $g(X, Y) = 0$ за неко $Y \in \mathfrak{X}(M)$ повлачи $g_L(Y, Z) = g(Y, Z)$ за свако $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Зато у свакој тачки $p \in M$, произволна база од $(T_p M, g_p)$ која садржи X_p остаје ортогонална у односу на $(g_L)_p$, што доказује да је g_L Лоренцова метрика. $\triangle$

4.6 Модел простори

На развој Риманове и псеудо-Риманове геометрије велики утицај имали су одређени високо симетрични простори названи модел простори. Ови простори служе као основни примери омогућавајући нам да апстрактније псеудо-Риманове многострукости упоредимо са једноставнијим добро схваћеним геометријама и идентификујемо заједничке особине. Главна одлика модел простора је њихов висок степен симетрије, што се одражава у постојању велике групе изометрија.

Најважнија примена Лијевих група у геометрији јавља се кроз њихово дејство на многострукости. **Дејство** (слева) групе G на многострукости M је пресликавање $\theta: G \times M \rightarrow M$, где често пишемо $h \cdot p$ уместо $\theta(h, p)$, тако да важи $h_1 \cdot (h_2 \cdot p) = (h_1 h_2) \cdot p$ и $e \cdot p = p$ за све $h_1, h_2 \in G$ и $p \in M$, где e означава јединични елемент од G . За дато дејство од G на M , **група изометрије** (или **стабилизатор**) од G у тачки $p \in M$ је подгрупа $G_p = \{h \in G : h \cdot p = p\}$ која се састоји од свих елемената из G који фиксирају p . Кажемо да је дејство од G на M **слободно** ако су све групе изотропије тривијалне, односно ако $h \cdot p = p$ повлачи $h = e$. **Орбита** тачке $p \in M$ је подскуп $G \cdot p = \{h \cdot p : h \in G\}$ тачака из M које се достижу из p применом дејства од G . Кажемо да је дејство **транзитивно** ако има тачно једну орбиту, или еквивалентно, ако за сваки пар тачака $p, q \in M$ постоји елемент $h \in G$ такав да је $h \cdot p = q$.

Уколико је G Лијева група, дејство $\theta: G \times M \rightarrow M$ је **глатко дејство** ако је пресликавање θ глатко. У том случају, за свако $h \in G$, пресликавање $\theta_h: M \rightarrow M$ дато са $\theta_h(p) = h \cdot p$ је дифеоморфизам, јер је θ_h глатко, а његов инверз дат са $\theta_{h^{-1}}$.

Да бисмо описали симетрије псеудо-Риманове многострукости (M, g) посматрамо њену групу изометрија $\mathcal{I}(M)$ која природно дефинише дејство на M са $f \cdot p = f(p)$ за $f \in \mathcal{I}(M)$ и $p \in M$. Штавише, за свако $f \in \mathcal{I}(M)$, глобално тангентно пресликавање Tf пресликава TM у себе, а у свакој тачки $p \in M$ се рестрикује у линеарну изометрију $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) **хомогена** ако

¹⁰Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар

група изометрија $\mathcal{I}(M)$ дејствује транзитивно на M , односно ако за произвољне две тачке $p, q \in M$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}(M)$ таква да је $f(p) = q$.

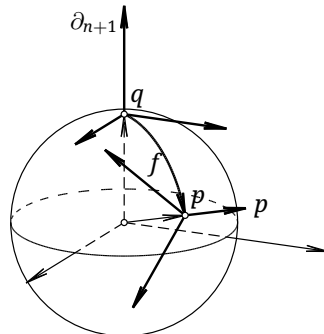
Група изотропије од $\mathcal{I}(M)$ у тачки $p \in M$ је подгрупа $\mathcal{I}_p(M)$ која садржи све $f \in \mathcal{I}(M)$ за које је $f(p) = p$. За $p \in M$ и $f \in \mathcal{I}_p(M)$, линеарно пресликавање $T_p f$ шаље $T_p M$ у себе, што доноси **изотропну репрезентацију** $I_p: \mathcal{I}_p(M) \rightarrow \text{GL}(T_p M)$ дату са $I_p(f) = T_p f$. Кажемо да је M **изотропна у** $p \in M$ ако изотропна репрезентација од $\mathcal{I}_p(M)$ дејствује транзитивно на скупу јединичних вектора из $T_p M$, односно, ако за све јединичне векторе $X, Y \in T_p M$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}_p(M)$ таква да је $f_*(X) = Y$. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост **изотропна** ако је изотропна у свакој тачки.

Хомогена псеудо-Риманова многострукост геометријски изгледа исто кад је посматрамо из произвољне тачке, док она која је изотропна изгледа исто у свим правцима. Наравно, хомогена псеудо-Риманова многострукост која је изотропна у једној тачки је изотропна у свакој тачки. Међутим, испоставља се да је свака изотропна псеудо-Риманова многострукост хомогена (видети Теорему 7.11).

Три модел простора Риманове геометрије су еуклидски простори, сфере и хиперболички простори. Најосновнији и најважнији Риманов модел простор је еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ опремљен еуклидском метриком $\bar{g}$ из (4.5) (видети Пример 4.6). Напоменимо да Пример 4.16 показује да је сваки квадратни простор индекса 0 изометричан са $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$. Изометрије на Римановој многострукости $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ је лако конструисати, свака ортогонална линеарна трансформација на $\mathbb{R}^n$ чува еуклидску метрику, као што то ради и свака транслација.

Наредни модел простор је сфера $\mathbf{S}^n$ чија инклузија $\iota: \mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ индукује Риманову метрику $\hat{g} = \iota^* \bar{g}$ на $\mathbf{S}^n$ коју зовемо **окруила метрика**. Сфера $(\mathbf{S}^n, \hat{g})$ је Риманова многострукост која је и хомогена и изотропна.

Пример 4.18. Линеарно дејство ортогоналне групе $O(n+1)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ чува и еуклидску метрику и јединичну сферу $\mathbf{S}^n$, те његова рестрикција дефинише изометријско дејство на $\mathbf{S}^n$. Нека је $q(0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{S}^n$ северни пол и нека $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ означава стандардну ортонормирану базу од $T_q \mathbf{S}^n$. За произвољну тачку $p \in \mathbf{S}^n$ бирамо ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $T_p \mathbf{S}^n$. Како су ови базни вектори тангентни на сферу, они су ортогонални на p , те је $(E_1, \dots, E_n, p)$ ортонормирана база у $T_p \mathbb{R}^{n+1}$. Нека је $f \in O(n+1)$ ортогонална трансформација чије су колоне управо ти базни вектори. Онда је $f: (\partial_1, \dots, \partial_{n+1}) \mapsto (E_1, \dots, E_n, p)$, те посебно $f(q) = f(\partial_{n+1}) = p$. Штавише, како f дејствује линеарно на $\mathbb{R}^{n+1}$, тангентно пресликавање $T_q f: T_q \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n+1}$ има репрезентацију у стандардним координатама која је дата истом матрицом као и f . Последишно добијамо $f_* \partial_i = E_i$ за $1 \leq i \leq n$.



На овај начин добили смо изометрију f која шаље q у p , док тангентно пресликавање $T_q f$ гура ортонормирану базу од $T_q \mathbf{S}^n$ на изабрану ортонормирану базу од $T_p \mathbf{S}^n$. То доказује да је $\mathbf{S}^n$ хомогена и изотропна. $\triangle$

За глатко пресликавање $f: M \rightarrow N$ између псеудо-Риманових многострукости (M, g_M) и (N, g_N) кажемо да је **конформно** ако $f^*(g_N) = h g_M$ важи за неку позитивну

функцију $h \in \mathfrak{F}(M)$. Ако постоји конформни дифеоморфизам између псеудо-Риманових многострукости кажемо да су оне **конформно еквивалентне**. Две метрике g_1 и g_2 на многострукости M су **конформне** ако постоји позитивна функција $h \in \mathfrak{F}(M)$ таква да је $g_2 = hg_1$, односно ако је идентичко пресликавање између (M, g_1) и (M, g_2) конформно. У Римановој геометрији је познато да су две метрике конформне ако и само ако дефинишу исте углове, док је дифеоморфизам конформни ако и само ако чува углове.

Пример 4.19. Сфера је локално конформно еквивалентна еуклидском простору, а стереографска пројекција је конформни дифеоморфизам између $\mathbf{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ и $\mathbb{R}^n$. Размотримо стереографску пројекцију $\varphi = \varphi_-$ из Примера 1.15 која је дата са

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n), \quad (4.8)$$

и чији инверз је

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}(2y_1, \dots, 2y_n, -1 + y_1^2 + \dots + y_n^2). \quad (4.9)$$

За произвољно векторско поље $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, из

$$\varphi_*^{-1}V = \sum_{i=1}^{n+1}(\varphi_*^{-1}V)(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n+1}V(x_i \circ \varphi^{-1})\frac{\partial}{\partial x_i},$$

можемо израчунати индуковану метрику,

$$(\varphi^{-1})^*\bar{g}(V, V) = \bar{g}(\varphi_*^{-1}V, \varphi_*^{-1}V) = \bar{g}(\varphi_*^{-1}V, \varphi_*^{-1}V) = \sum_{i=1}^{n+1}(V(x_i \circ \varphi^{-1}))^2,$$

где је

$$V(x_i \circ \varphi^{-1}) = V\left(\frac{2y_i}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}\right) = 2 \frac{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)V(y_i) - y_i V(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2}$$

за $1 \leq i \leq n$, са додатном релацијом

$$V(x_{n+1} \circ \varphi^{-1}) = V\left(\frac{-1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}\right) = 2 \frac{V(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2}.$$

Како је $V(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \sum_{i=1}^n 2y_i V(y_i)$, то имамо

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})^*\bar{g}(V, V) &= \frac{4}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^4} \left((V(y_1^2 + \dots + y_n^2))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n ((1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)V(y_i) - y_i V(y_1^2 + \dots + y_n^2))^2 \right) \\ &= 4 \frac{(V(y_1))^2 + \dots + (V(y_n))^2}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} = \frac{4}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} \bar{g}(V, V). \end{aligned}$$

Другим речима, важи

$$(\varphi^{-1})^*\bar{g} = \frac{4}{(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} \bar{g},$$

где $\bar{g}$ репрезентује еуклидску метрику на $\mathbb{R}^n$, те је зато ова стереографска пројекција φ конформни дифеоморфизам. Одавде следи да је сфера **локално конформно равна**, што значи да свака тачка из $\mathbf{S}^n$ има околину која је конформно еквивалентна неком отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$. $\triangle$

Трећу класу модел Риманових многострукости чини хиперболички простор $\mathbf{H}^n$ који дефинишемо са

$$\mathbf{H}^n = \{X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : g(X, X) = -1, x_0 > 0\},$$

као псеудо-Риманову подмногострукост простора Минковског $\mathbb{R}_1^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, g)$. Геометријски гледано, у питању је горњи део дводелног хиперболоида који је задат једначином $x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1$. Нека је $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција $f(X) = g(X, X)$. За свако $X, Y \in \mathbb{R}^{n+1}$, имамо

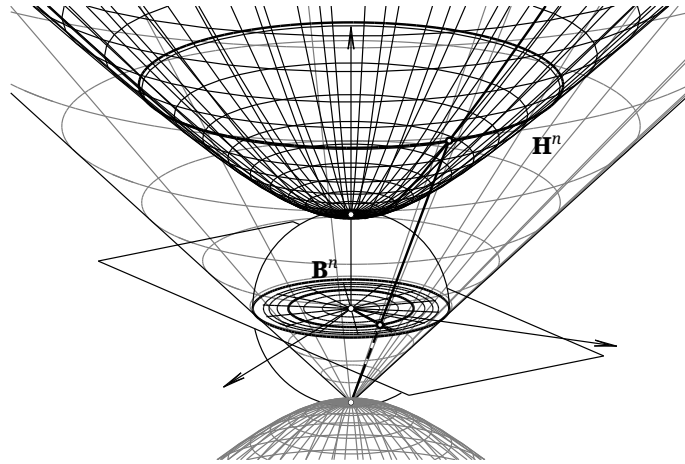
$$df_X(Y_X) = Y_X f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(X + tY) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(X) + 2tg(X, Y) + t^2 f(Y)) = 2g(X, Y) = 2g_X(X_X, Y_X),$$

те је $df_X = 2(X_X)^\flat$ и $T_X f$ има ранг 1 за свако $X \neq 0$. Зато је -1 регуларна вредност од f , те је по Теорему 2.15 регуларни скуп нивоа $f^{-1}(-1)$ подмногострукост кодимензије 1, што важи и за његов отворен подскуп $\mathbf{H}^n$. Штавише, по Леми 2.16 за свако $X \in \mathbf{H}^n$ имамо $T_X \mathbf{H}^n = \text{Ker } T_X f = \text{Ker } X^\flat = X^\perp$. Због $g(X, X) = -1 < 0$, рестрикција амбијентне метрике на $X^\perp$ је позитивно дефинитна, те g индукује Риманову метрику $h = i^* g$ на $\mathbf{H}^n$.

Пример 4.20. Посматрајмо *хиперболичку сфериографску пројекцију* π из $\mathbf{H}^n$ у хиперраван $x_0 = 0$ преко тачке $(-1, 0, \dots, 0)$. Из њене формуле

$$\pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \dots, x_n),$$

видимо да $\|\pi(x_0, x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{(x_0 - 1)/(x_0 + 1)} \nearrow 1$ кад $x_0 \rightarrow +\infty$, те је $\text{Im}(\pi) = \mathbf{B}^n$ јединична отворена кугла у $\mathbb{R}^n$. Због тога нас дифеоморфизам $\pi: \mathbf{H}^n \rightarrow \mathbf{B}^n$ доводи до другог модела који зовео **Поенкареов кула модел** $\mathbf{H}\mathbf{B}^n = (\mathbf{B}^n, (\pi^{-1})^* h)$, где је h метрика на $\mathbf{H}^n$.



Након што израчунамо инверз,

$$\pi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2, 2y_1, \dots, 2y_n),$$

као и раније, посматрамо произвољно векторско поље $V \in \mathfrak{X}(\mathbf{B}^n)$. Из

$$\pi_*^{-1} V = \sum_{i=0}^n (\pi_*^{-1} V)(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^n V(x_i \circ \pi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

добијамо,

$$(\pi^{-1})^*h(V, V) = h(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V) = g(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V) = -(V(x_0 \circ \pi^{-1}))^2 + \sum_{i=1}^n (V(x_i \circ \pi^{-1}))^2,$$

где је

$$V(x_i \circ \pi^{-1}) = V\left(\frac{2y_i}{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}\right) = 2 \frac{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)V(y_i) + y_i V(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2}$$

за $1 \leq i \leq n$, са додатним

$$V(x_0 \circ \pi^{-1}) = V\left(\frac{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}\right) = 2 \frac{V(y_1^2 + \dots + y_n^2)}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2}.$$

Одавде је

$$\begin{aligned} (\pi^{-1})^*h(V, V) &= \frac{4}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^4} \left(- (V(y_1^2 + \dots + y_n^2))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n ((1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)V(y_i) + y_i V(y_1^2 + \dots + y_n^2))^2 \right) \\ &= 4 \frac{(V(y_1))^2 + \dots + (V(y_n))^2}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2} = \frac{4}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2} \bar{g}(V, V), \end{aligned}$$

што даје метрику за $\mathbf{H}\mathbf{B}^n$,

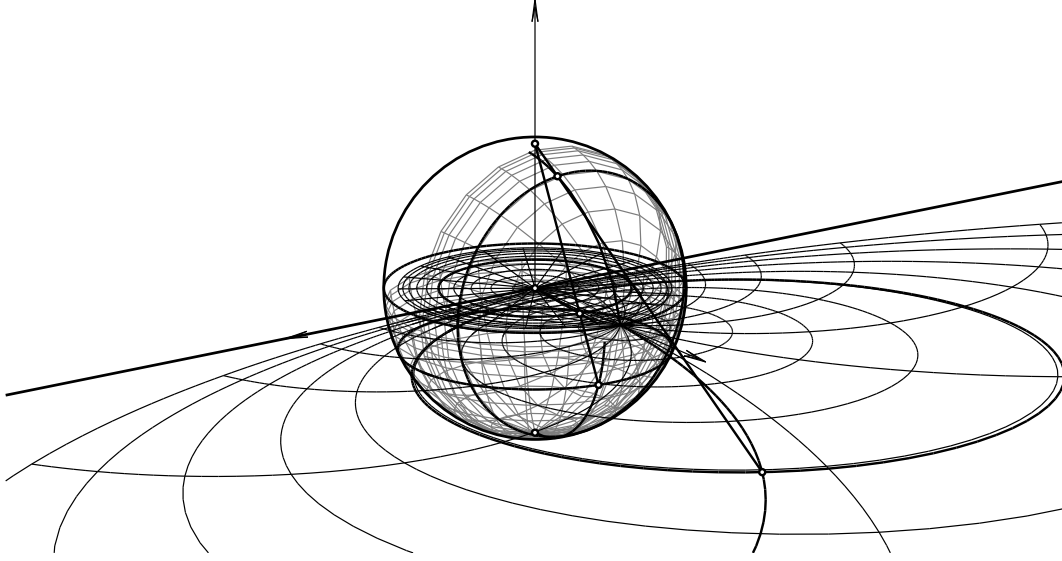
$$h_2 = (\pi^{-1})^*h = 4 \frac{(dy_1)^2 + \dots + (dy_n)^2}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2}. \quad (4.10)$$

На овај начин добили смо Риманове многострукости $\mathbf{H}^n = (\mathbf{H}^n, h)$ и $\mathbf{H}\mathbf{B}^n = (\mathbf{B}^n, h_2)$ које су изометричне. $\triangle$

Пример 4.21. Нека је $\varphi: \mathbf{S}^n \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ стереографска пројекција из Примера 4.19 са формулама (4.8) и (4.9), те нека је $\rho: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ ротација дефинисана једначином $\rho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_{n+1}, x_n)$ која хемисферу $\{x_{n+1} < 0\}$ преводи у хемисферу $\{x_n > 0\}$. Посматрајмо дифеоморфизам

$$\psi = \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$$

и његову рестрикцију из кугле $\mathbf{B}^n$ на полупростор $\mathbf{U}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_n > 0\}$. Тада пресликавање $\psi|_{\mathbf{B}^n}: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{U}^n$ доноси трећи модел хиперболичког простора, **Понкареов полупростор модел** $\mathbf{H}\mathbf{U}^n = (\mathbf{U}^n, (\psi^{-1})^*h_2)$.



Можемо израчунати инверз $f = \psi^{-1} = \varphi \circ \rho^{-1} \circ \varphi^{-1}$ у координатама,

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \varphi \circ \rho^{-1} \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \varphi \circ \rho^{-1} \left(\frac{1}{1 + z_1^2 + \dots + z_n^2} (2z_1, \dots, 2z_n, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2) \right) \\ &= \varphi \left(\frac{1}{1 + z_1^2 + \dots + z_n^2} (2z_1, \dots, 2z_{n-1}, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2, -2z_n) \right) \\ &= \frac{1}{(1 + z_n)^2 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} (2z_1, \dots, 2z_{n-1}, -1 + z_1^2 + \dots + z_n^2). \end{aligned}$$

Добијамо

$$\begin{aligned} f_* \frac{\partial}{\partial z_n} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \\ &= \frac{2((1 + z_n)^2 - z_1^2 - \dots - z_{n-1}^2) \frac{\partial}{\partial y_n} \circ f - 4(1 + z_n) \sum_{i=1}^{n-1} z_i \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f}{((1 + z_n)^2 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2)^2}, \end{aligned}$$

одакле за индуковану метрику $h_3 = f^* h_2$, уз смену $z^2 = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2$, имамо

$$\begin{aligned} h_3 \left(\frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) &= h_2 \left(f_* \frac{\partial}{\partial z_n}, f_* \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \\ &= \frac{4}{(1 - (y_1 \circ f)^2 - \dots - (y_n \circ f)^2)^2} \frac{4((1 + z_n)^2 - z^2)^2 + 16(1 + z_n)^2 z^2}{((1 + z_n)^2 + z^2)^4} \\ &= 16 \frac{((1 + z_n)^2 + z^2)^2}{(((1 + z_n)^2 + z^2)^2 - 4z^2 - (-1 + z^2 + z_n^2)^2)^2} = \frac{1}{z_n^2}. \end{aligned}$$

Међутим, из формуле (4.10) видимо да су метрике h_2 и $\bar{g}$ конформне на $\mathbf{B}^n$, док Пример 4.19 показује да је f^{-1} конформни дифеоморфизам између $(\mathbf{B}^n, \bar{g})$ и $(\mathbf{U}^n, \bar{g})$, одакле следи да су метрике h_3 и $\bar{g}$ конформне на $\mathbf{U}^n$. То је разлог зашто нам је довољно да израчунамо $h_3(V, V)$ за неко добро изабрано векторско поље, на пример за $V = \partial/\partial z_n$. Одавде коначно добијамо

$$h_3 = f^* h_2 = \frac{(dz_1)^2 + \dots + (dz_n)^2}{z_n^2}. \quad (4.11)$$

Како су Риманове многострукости $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{H}\mathbf{B}^n$ и $\mathbf{H}\mathbf{U}^n$ све међусобно изометричне, често користимо једноставну нотацију $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ да укажемо на било који од ових хиперболичких модела, што ће зависити од тога који је у датом контексту најзгоднији. $\triangle$

Пример 4.22. Симетрије од $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ се најлакше виде у хиперболоид моделу $\mathbf{H}^n$. **Лоренцова група** $O(1, n)$ је група линеарних пресликавања из $\mathbb{R}_1^{n+1}$ на себе које чувају метрику Минковског. Сваки елемент из $O(1, n)$ чува хиперболоид $x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1$ који се састоји од две компоненте које су одређене са $\{x_0 > 0\}$ и $\{x_0 < 0\}$. Подгрупа $O^+(1, n)$ која чува смер времена састоји се од пресликавања која шаљу компоненту $\{x_0 > 0\}$ у себе, те зато дејствује на $\mathbf{H}^n$ као изометрија. Аналогно можемо пратити аргументе из Примера 4.18 да бисмо закључили да постоји изометрија из $O^+(1, n)$ која произвољну тачку q шаље у произвољну тачку p , а произвољну ортонормирану базу од $T_q\mathbf{H}^n$ гура у произвољну ортонормирану базу од $T_p\mathbf{H}^n$, те је хиперболички простор $\mathbb{R}\mathbf{H}^n$ хомоген и изотропан. $\triangle$

Еуклидске, сферичне и хиперболичке метрике могу се прилагодити тако да добијемо моделе псеудо-Риманових многострукости. Први пример је псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}_\nu^n$ индекса $\nu > 0$ из Примера 4.7.

За остале примере посматрамо псеудо-Риманову подмногострукост псеудо-еуклидског простора $(\mathbb{R}_\nu^{n+1}, g)$ која је дата са $M = \{X \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : g(X, X) = c\}$ за неки скалар $c = \pm 1$. Слично конструкцији хиперболичког модела $\mathbf{H}^n$ дефинишемо функцију $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(X) = g(X, X)$. Тада важи $df_X = 2X^\flat$, те је c регуларна вредност од f одакле је $M = f^{-1}(c)$ подмногострукост димензије n , док метрику идукујемо из амбијентне метрике g . Како је $T_X M = \text{Ker } T_X f = \text{Ker } X^\flat = X^\perp$ и $g(X, X) = c$, видимо да се индекс смањује за један само уколико је $c < 0$.

Псеудо-Риманова многострукост (M, i^*g) за $c = 1$ има индекс ν и зовемо је **псеудосфера**, док за $c = -1$ има индекс $\nu - 1$ и зовемо је **псеудохиперболички простор**. Посебно, **де Ситтеров простор**¹¹ је псеудосфера $\mathbf{dS}^n$ смештена у $\mathbb{R}_1^{n+1}$, док псеудохиперболички простор $\mathbf{AdS}^n$ смештен у $\mathbb{R}_2^{n+1}$ зовемо **анти-де Ситтеров простор**. На овај начин поставили смо три модел простора Лоренцове геометрије, а то су простори Минковског, де Ситерови и анти-де Ситерови простори.

4.7 Дужина и растојање

На еуклидским просторима већ постоји појам растојања између тачака, тако да је дефинисање дужине криве природно оправдавано њеним апроксимирањем полигоналним путевима и сабирањем дужина њихових сегмената. Међутим, Риманове многострукости нису метрички простори а приори, док псеудо-Риманове многострукости са недефинитном метриком уопште нису метрички простори. Ипак, позитивно дефинитан скаларни производ на сваком тангентном простору Риманове многострукости пружа добро дефинисан појам дужине тангентних вектора. Ово нам омогућава да дефинишемо дужину кривих, а самим тим и растојање између тачака на повезаној Римановој многострукости која тада постаје метрички простор.

Нека је M глатка многострукост. **Крива** (или **илајка** **параметарска крива**) на M је глатко пресликавање $\gamma: I \rightarrow M$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. Како је I отворена подмногострукост реалне праве $\mathbb{R}$, то има идентичку карту која је дата једном координатном функцијом $t = 1_I$. **Брзина** криве $\gamma: I \rightarrow M$ дефинисана је као гурање координатног векторског поља, $\gamma' = T\gamma \circ (d/dt): I \rightarrow TM$. Прецизније, крива γ сваком $t \in I$ додељује **вектор брзине** $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ дат са

$$\gamma'(t) = (T_t \gamma) \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t,$$

¹¹Willem de Sitter (1872–1934), холандски математичар, физичар и астроном

где је $(d/dt)_t \in T_t I$ канонски базни вектор у t који свакој функцији $f \in \mathfrak{F}(I)$ додељује њен класични извод $f'(t)$ у смислу анализе.

Кажемо да је крива γ **регуларна** ако $\gamma'(t) \neq 0$ важи за све $t \in I$, те је γ имерзија. Појам регуларне криве може се продужити на затворен ограничен интервал $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Пресликавање $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ је **регуларни сеіменї криве** ако се продужава на регуларну криву која је дефинисана на неком отвореном интервалу који садржи $[a, b]$. Општије, непрекидно пресликавање $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ је **доушїена крива** (или **гео њо гео регуларни сеіменї криве**) из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ уколико постоји коначан низ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ реалних бројева $t_i \in \mathbb{R}$, који зовемо **разбијање** од $[a, b]$, тако да је рестрикција $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ регуларни сегмент криве за свако $1 \leq i \leq k$.

Уобичајени концепт из анализе о дужини криве у еуклидском простору природно се уопштава на псеудо-Риманову многострукост (M, g) . Постојање метрике g омогућава нам да меримо величину вектора брзине. **Брзина** криве $\gamma \in \mathfrak{F}(I)$ у некој тачки $t \in I$ је магнитуда њеног вектора брзине у t ,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{|g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))|}.$$

Како је растојање које објекат пређе једнако интегралу брзине над временским интервалом, дефинишемо **дужину лука** допуштене криве $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ са

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Функција брзине је ограничена и непрекидна свуда на $[a, b]$ осим евентуално у коначно много тачака у којима γ није глатка, те је интеграбилна у Римановом (или Лебеговом¹²) смислу, тако да је $L(\gamma)$ добро дефинисан коначан ненегативан број.

Рейарамейризација криве $\gamma: I \rightarrow M$ је крива облика $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: I' \rightarrow M$, где је $I' \subseteq \mathbb{R}$ неки интервал, а $\varphi: I' \rightarrow I$ дифеоморфизам. Како су интервали повезани, φ мора бити строго монотона (или растућа или опадајућа) на I' . Кажемо да је $\tilde{\gamma}$ **йарамейризација унаїред** ако је φ растућа ($\varphi' > 0$), док је **йарамейризација уназад** ако је опадајућа ($\varphi' < 0$).

Општије, **рејарамейризација** допуштене криве $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ је допуштена крива облика $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, где је $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ хомеоморфизам за који постоји разбијање $c = t_0 < t_1 < \dots < t_k = d$ од $[c, d]$ такво да је рестрикција $\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ дифеоморфизам на његову слику за свако $1 \leq i \leq k$. Ако извод φ' не мења знак кажемо да је одговарајућа репараметризација **моноїона**.

Важно је приметити да је дужина лука допуштене криве инваријантна у односу на монотоне репараметризације, где за $\varphi' > 0$ имамо

$$L(\gamma \circ \varphi) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt = \sum_{i=1}^k \int_{\varphi(t_{i-1})}^{\varphi(t_i)} \|\gamma'(\varphi(t))\| d(\varphi(t)) = L(\gamma).$$

Иако се дужина лука на Римановој многострукости понаша слично као на еуклидском простору, у случају недефинитне метрике израз дужина може нас навести на странпутицу. На пример, изотропна крива има дужину нула. Да бисмо избегли такве патологије, где изотропан вектор брзине има брзину нула, надаље се фокусирамо на Риманову геометрију.

Нека је (M, g) Риманова многострукост. Тада допуштена крива $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ има позитивну брзину $\|\gamma'(t)\| > 0$ за свако t осим тачака из одговарајућег разбијања од $[a, b]$. Посматрајмо функцију $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ коју називамо **функција дужине лука** од γ , а дефинишемо са

$$s(t) = L(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du,$$

¹²Henri Lebesgue (1875–1941), француски математичар

што је свуда непрекидно, а по основној теореми из анализе је глатко гдегод је то γ , са изводом $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Како $s'(t) > 0$ важи за све глатке тачке $t \in [a, b]$, функција s је строго растућа на $[a, b]$. Тада њен инверз $\phi = s^{-1}: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ одређује репараметризацију унапред $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ од γ , где

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \|\gamma'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t)\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))} \right\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \right\| = 1$$

важи гдегод је γ глатко. Таква репараметризација $\tilde{\gamma}$ има **јединичну брзину**, док њена функција дужине лука има једноставан облик $s(t) = t$. За допуштену криву јединичне брзине чији је интервал параметара облика $[0, b]$ за неко $b > 0$ кажемо да је **параметризована дужином лука**.

Лема 4.17. Свака допуштена крива на Римановој многострукости може се репараметризовати дужином лука јединственом репараметризацијом унапред.

Уведимо концепт растојања између тачака на повезаној Римановој многострукости (M, g) . За сваки пар тачака $p, q \in M$ дефинишемо **јуџни простор** $\Omega_{p,q}$ који се састоји од свих допуштених кривих из p у q . Овај простор није празан, што видимо у наредној леми.

Лема 4.18. Сваке две тачке повезане многострукости могу се повезати допушћеном кривом.

Доказ. Повезана многострукост M је путно повезана, те се сваке две тачке $p, q \in M$ могу повезати непрекидним путем $\gamma: [a, b] \rightarrow M$. Из компактности, постоји разбијање $a = t_0 < \dots < t_k = b$ од $[a, b]$ такво да је $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ садржано у координатној околини која је дифеоморфна еуклидској кугли, за свако $1 \leq i \leq k$. Свако $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ тада можемо заменити праволинијским путем у координатама, што доноси допуштену криву из p у q . $\square$

Претходна лема нам дозвољава да строго дефинишемо **Риманово растојање** $d(p, q)$ између тачака $p, q \in M$ са

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{p,q}\}.$$

Пример 4.23. Инфимум у дефиницији за $d(p, q)$ не мора да се достигне. Посматрајмо избушену раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ као Риманову подмногострукост од $\mathbb{R}^2$. Растојање између тачака $p = (-1, 0)$ и $q = (1, 0)$ је $d(p, q) = 2$, али ово растојање се не реализује ниједном допуштеном кривом, јер свака таква крива који достиже инфимум мора проћи кроз $(0, 0)$. $\triangle$

Из дефиниције директно следи да је $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$ и $d(p, p) = 0$. Додатно, неједнакост троугла $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ за све $p, q, r \in M$ следи из чињенице да се допуштена крива из p у q може добити комбиновањем једне из p у r и друге из r у q (могуће након репараметризације почетног времена), чија дужина је једнака збиру дужина оригиналних допуштених кривих. Да би (M, d) постао метрички простор, преостаје да покажемо да $d(p, q) = 0$ повлачи $p = q$. Због тога уводимо наредно тополошко тврђење.

Лема 4.19. Нека су X и Y тополошки простори, где је Y компактан. За свако непрекидно $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, функција $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ даје са $h(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$ је добро дефинисана и непрекидна.

Доказ. За свако фиксирано $x \in X$, функција $f_x: Y \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f_x(y) = f(x, y)$ је непрекидна са компактним доменом, одакле следи да је $f_x(Y)$ компактан интервал, те добијамо $h(x) = \min f_x(Y)$. За непрекидност од h довољно је проверити да су $h^{-1}(-\infty, a)$ и $h^{-1}(b, \infty)$ отворени. Лако је видети да је $h^{-1}(-\infty, a) = \pi_X \circ f^{-1}(-\infty, a)$ отворен, где је $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ канонска пројекција, која је непрекидна и отворена. Са друге стране, за свако $x \in h^{-1}(b, \infty)$ и $y \in Y$ постоји околина $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq f^{-1}(b, \infty)$. Како је Y компактан то постоје $y_1(x), \dots, y_{k(x)}(x) \in Y$ тако да је $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} V_{x,y_i(x)}$, те добијамо

$$\{x\} \times Y \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{k(x)} U_{x,y_i(x)} \right) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} (U_{x,y_i(x)} \times V_{x,y_i(x)}) \subseteq f^{-1}(b, \infty),$$

одакле следи да је $h^{-1}(b, \infty) = \bigcup_{x \in h^{-1}(b, \infty)} \bigcap_{i=1}^{k(x)} U_{x,y_i(x)}$ отворен. $\square$

Фиксирајмо тачку p из n -многострукости M , те нека је (U, φ) карта центрирана у p са координатним функцијама $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Еуклидска метрика $\bar{g}$ на U дефинисана са $\bar{g}(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$ доноси еуклидско растојање $\bar{d}$ дато са

$$\bar{d}(q, r) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(q) - x_i(r))^2}.$$

Не умањујући општост, координатна околина U може се редуковати на неку куглу $\{q \in U : \bar{d}(p, q) < \varepsilon\}$ за мало $\varepsilon > 0$. Нека је $f: U \times \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција дата са $f(q, V) = g(V, V)(q) = g_q(V, V)$, при чему идентификујемо $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{S}^{n-1}$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i \in \mathfrak{X}(U)$. Како је $\mathbf{S}^{n-1}$ компактан, примена Леме 4.19 доноси добро дефинисане непрекидне позитивне функције $\mu, \nu: U \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане са

$$\begin{aligned} \mu(q) &= \min_{V \in \mathbf{S}^{n-1}} f(q, V) = \min_{\bar{g}_q(V, V)=1} g_q(V, V) = \min_{0 \neq V \in T_q M} \frac{g_q(V, V)}{\bar{g}_q(V, V)} > 0, \\ \nu(q) &= \max_{V \in \mathbf{S}^{n-1}} f(q, V) = \max_{\bar{g}_q(V, V)=1} g_q(V, V) = \max_{0 \neq V \in T_q M} \frac{g_q(V, V)}{\bar{g}_q(V, V)} > 0. \end{aligned}$$

То повлачи

$$\mu(q) \bar{g}_q(V, V) \leq g_q(V, V) \leq \nu(q) \bar{g}_q(V, V)$$

за свако $V \in T_q M$, што нам омогућава да упоредимо две метрике g и $\bar{g}$ за $q \in U$. Нека је $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ допуштена крива из p у $q \in U$ и

$$c = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{\mu(\gamma(t))} > 0, \quad C = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{\nu(\gamma(t))} > 0.$$

Ако γ потпуно лежи у U тада је

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \geq c \int_a^b \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \geq c \bar{d}(p, q).$$

У супротном, γ напушта U , и постоји најмање s такво да $\gamma(s) \notin U$, и поново је

$$L(\gamma) \geq \int_a^s \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \geq c \int_a^s \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \geq c \varepsilon \geq c \bar{d}(p, q).$$

У сваком случају, узимањем инфимума следи $d(p, q) \geq c \bar{d}(p, q)$. Са друге стране, ако је γ праволинијски пут у еуклидској метрици $\bar{g}$, тада он лежи у U и имамо

$$C \bar{d}(p, q) = C \int_a^b \sqrt{\bar{g}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \geq \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = L(\gamma) \geq d(p, q).$$

Као последицу добијамо

$$0 < c\bar{d}(p, q) \leq d(p, q) \leq C\bar{d}(p, q), \quad (4.12)$$

што доказује да је $d(p, q) > 0$ за $q \neq p$. Штавише, (4.12) показује да су еуклидско растојање $\bar{d}$ и Риманово растојање d упоредиви на околини од p , што значи да су метричка топологија и топологија многострукости (која долази од еуклидског растојања) еквивалентне.

Теорема 4.20. *Повезана Риманова многострукост са Римановим растојањем је метрички простор чија је метричка топологија иста као топологија многострукости.*

4.8 Задаци

Задатак 4.1. Нека су $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ простори са унутрашњим производом исте коначне димензије. Ако је $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ пресликавање које чува координатни почетак и растојања (односно $f(0) = 0$ и $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ за све $x, y \in \mathcal{V}$), онда је f линеарна изометрија.

Задатак 4.2. Нека је $(\mathcal{V}, g)$ недефинитан квадратни векторски простор, а b симетрична билинеарна форма на $\mathcal{V}$. Доказати да је $b = cg$ за неко $c \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $b(N, N) = 0$ за сваки изотропан вектор $N \in \mathcal{V}$.

Задатак 4.3. Нека је $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато са $f(x, y) = (\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}, x + y, x - y)$. Израчунати f^*g , где је $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbb{R}^3)$ метрика Минковског, те показати да је то Риманова метрика у $\mathbb{R}^2$.

Задатак 4.4. Доказати да је псеудосфера димензије n , индекса ν и полупречника r дифеоморфна са $\mathbb{R}^\nu \times \mathbf{S}^{n-\nu}$. Доказати да је псеудохиперболички простор димензије n , индекса ν и полупречника r дифеоморфан са $\mathbb{R}^{n-\nu} \times \mathbf{S}^\nu$.

ПОВЕЗАНОСТ

5.1 Коваријантни изводи

У циљу увођења кривине на псеудо-Римановим многострукостима неопходно је проучавати геодезијске, псеудо-Риманова уопштења правих линија. У оригиналном смислу, геодезијска је најкраћа рута између две тачке на површи, те делује примамљиво дефинисати геодезијске као криве које локално минимизују дужину. Међутим, псеудо-Риманове многострукости са недефинитном метриком нису метрички простори, те њихове геодезијске не минимизују растојања. Чак иако се ограничимо на Риманове многострукости, дефинисање геодезијских преко минимизујућег својства има великих техничких потешкоћа.

Зато ћемо прихватити неку другу особину правих линија и уопштити је. Природно својство је да су праве линије у еуклидском простору тачно оне криве које дозвољавају параметризације са убрзањем нула, те продужавамо ту идеју на псеудо-Риманове многострукости.

Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ крива на псеудо-Римановој многострукости (M, g) . Вектор брзине у тренутку $t \in I$ представља извод $\gamma'(t)$, а други извод $\gamma''(t)$ доводи нас до убрзања. Дакле, потребно је направити количник одузимањем вектора $\gamma'(t+h) \in T_{\gamma(t+h)}M$ и $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, што није згодно јер они живе у различитим просторима. У случају апстрактне многострукости ова разлика нема смисла, те нам је потребан начин да упоредимо вредности векторског поља у различитим тачкама, односно да повежемо блиске тангентне просторе. Та повезаност је додатна информација на многострукости која омогућава диференцирање векторских поља као и интерпретацију убрзања криве.

Размотримо најпре дешавања у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$. Функцију $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ можемо диференцирати у тачки $p \in \mathbb{R}^n$ у правцу вектора $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ са

$$D_{X_p}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tX_p) - f(p)}{t} = (f \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0)f = X_p(f), \quad (5.1)$$

где је $\gamma(t) = p + tX_p$. На сличан начин векторско поље $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ диференцирамо у p у правцу X_p са

$$\begin{aligned} D_{X_p}Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tX_p) - Y(p)}{t} = \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y^i(p + tX_p) \partial_i - Y^i(p) \partial_i}{t} \\ &= \sum_{i=1}^n D_{X_p}Y^i \partial_i = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i) \partial_i. \end{aligned} \quad (5.2)$$

У случају произвољне многострукости M , која није нужно смештена у неки еуклидски простор, можемо искористити резултат из (5.1) и диференцирати функцију

$f \in \mathfrak{F}(M)$ у правцу вектора $X_p \in T_p M$ са $\nabla_{X_p} f = X_p(f)$. Међутим, у општем случају не постоји канонска база тангентног простора $T_p M$, те је резултат из (5.2) неупотребљив директно. Како не постоји канонски начин да диференцирамо векторска поља на апстрактној многострукости, користимо формулу (5.2) као модел да установимо особине које $D_{X_p} Y$ задовољава у $\mathbb{R}^n$, да бисмо на њима засновали општу теорију.

За векторско поље $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ дефинишемо $D_X Y$ са $(D_X Y)_p = D_{X_p} Y$ за свако $p \in \mathbb{R}^n$. Како смо из (5.2) установили $(D_X Y)_p = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i)(\partial_i)_p$, то векторска поља X и Y одређују ново векторско поље

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \partial_i \quad (5.3)$$

и $\mathbb{R}$ -билинеарну бинарну операцију $D: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Пресликавање D је очигледно $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ -линеарно по првом аргументу, док по другом аргументу задовољава Лајбницово правило, јер за $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ имамо

$$D_X(fY) = \sum_{i=1}^n X(fY^i) \partial_i = \sum_{i=1}^n (Xf)Y^i \partial_i + \sum_{i=1}^n fX(Y^i) \partial_i = (Xf)Y + fD_X Y.$$

Ове особине нас мотивишу да на произвољној многострукости уведемо појам повезаности.

Повезаност (*конекција, connection, affine connection, linear connection*) на многострукости M је $\mathbb{R}$ -билинеарно пресликавање $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ са ознаком $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, које је $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по првом аргументу, а Лајбницово по другом аргументу. Симбол ∇ читамо „набла“ или „дел“, док $\nabla_X Y$ зовемо **коваријантни извод** од Y у правцу X .

За произвољно $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, можемо записати формуле коваријантног извода на следећи начин. Како је повезаност $\mathfrak{F}(M)$ -линеарна по првом аргументу, то имамо

$$\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z. \quad (5.4)$$

Повезаност није $\mathfrak{F}(M)$ -линеарна по другом аргументу, већ само $\mathbb{R}$ -линеарна,

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (5.5)$$

док одступање од $\mathfrak{F}(M)$ -линеарности видимо кроз Лајбницово правило

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y. \quad (5.6)$$

Модел операција D дефинисана са (5.3) јасно испуњава ове услове и зовемо је **стандардна повезаност** на $\mathbb{R}^n$.

Коваријантни извод ∇_X у правцу векторског поља $X \in \mathfrak{X}(M)$ продужава се за произвољно тензорско поље на M . Природно имамо $\nabla_X f = Xf$ за $f \in \mathfrak{F}(M)$, док $\nabla_X Y$ формулама (5.5) и (5.6) задовољава услове Теореме 3.16, одакле постоји јединствен извод тензорског поља на M који уопштава коваријантни извод.

За произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ имамо $\nabla_X A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Додатно дефинишемо пресликавање $\nabla A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^{s+1} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ са

$$\nabla A(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s, X) = (\nabla_X A)(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s).$$

Како $\nabla_X A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ то ∇A јесте $\mathfrak{F}(M)$ -мултилинеарно по првих $r+s$ аргумената, а из (5.4) је $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по последњем аргументу. Ново тензорско поље $\nabla A \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$ добијено на овакав начин зовемо **појун коваријантни извод** од A . Кажемо да је тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ **паралелно** ако је $\nabla A = 0$.

Пример 5.1. За $f \in \mathfrak{F}(M)$ имамо $(\nabla f)(X) = \nabla_X f = Xf = df(X)$, те се потпун коваријантни извод функције поклапа са њеним диференцијалом, $\nabla f = df$. Штавише, уколико је $\nabla f = 0$, то је $df = 0$, а како се диференцијал поистовећује са тангентним пресликавањем имамо $Tf = 0$. Из доказа Леме 2.20 следи да је f локална константа. Дакле, ако је $\nabla f = 0$, то је функција f локално константна, а на повезаној многострукости M и глобално константна. $\triangle$

Пример 5.2. Коваријантни тензор реда два $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)$ зовемо **Хесијан**¹ од f . Ако са $\mathcal{C}$ обележимо $(1, 1)$ контракцију, рачун даје

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y f) &= \nabla_X(\nabla f(Y)) = \nabla_X(\mathcal{C}(\nabla f \otimes Y)) = \mathcal{C}(\nabla_X(\nabla f \otimes Y)) = \mathcal{C}(\nabla_X \nabla f \otimes Y + \nabla f \otimes \nabla_X Y) \\ &= (\nabla_X \nabla f)(Y) + \nabla f(\nabla_X Y) = \nabla^2 f(Y, X) + \nabla_{\nabla_X Y} f,\end{aligned}$$

одакле следи $\nabla^2 f(Y, X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$. $\triangle$

Иако је повезаност дефинисана на глобалним векторским пољима, она је заправо локални оператор, као што каже наредна теорема.

Теорема 5.1. Нека је ∇ повезаност на многострукости M . Вредности векторског поља $\nabla_X Y$ у $p \in M$ зависи само од вредности од $Y \in \mathfrak{X}(M)$ у околини од p и вредности од $X \in \mathfrak{X}(M)$ у p .

Доказ. Зависност по компоненти Y следи из особине извода тензора у Теореме 3.15, док се зависност по компоненти X може видети из Теореме 3.13: за фиксирано Y посматрамо $\mathfrak{T}_1^1(M) \ni T: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ дато са $T(X) = \nabla_X Y$. То показује да $\nabla_X Y(p)$ зависи само од $X(p)$ и вредности од Y близу p . $\square$

Нека је $V \in T_p M$ тангентни вектор у тачки $p = \pi(V) \in M$, а $Z \in \mathfrak{X}(U)$ векторско поље дефинисано на околини $U \subseteq M$ од p . По Теореме 5.1 можемо добро дефинисати $\nabla_V Z = (\nabla_X Y)_p$, где су $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ произвољна продужења за која важи $X_p = V$ и $Y|_U = Z$.

Нека је ∇ повезаност на n -многострукости M , а $(E_1, \dots, E_n)$ локални покретни репер над отвореним подскупом $U \subseteq M$. Најчешће је то координатни покретни репер са $E_i = \partial_i$, али је корисно размотрити рачун у општем случају. За $1 \leq i, j \leq n$ коваријантни извод $\nabla_{E_i} E_j$ се може изразити у терминима тог покретног репера са

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k,$$

те добијамо n^3 функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U)$ које зовемо **Кристџофелови симболи**² од ∇ у односу на дати покретни репер. Ако је $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ и $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$, онда је

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_j Y^j E_j \right) = \sum_j (X Y^j) E_j + \sum_j Y^j \nabla_{\sum_i X^i E_i} E_j \\ &= \sum_j (X Y^j) E_j + \sum_{ij} X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j = \sum_k (X Y^k) E_k + \sum_{ij,k} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k,\end{aligned}$$

одакле следи

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X Y^k + \sum_{ij=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k,$$

¹Ludwig Otto Hesse (1811–1874), немачки математичар

²Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар и физичар

што значи да је повезаност на U у потпуности одређена својим Кристофеловим симболима. У случају координатног покретног репера, претходна формула се своди на

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X(Y(x_k)) + \sum_{i,j=1}^n X(x_i) Y(x_j) \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (5.7)$$

одакле се лако може видети локалност повезаности у складу са Теоремом 5.1.

Штавише, ако се атлас многострукости састоји од само једне карте, $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ је глобални покретни репер, те се испоставља да произвољан избор n^3 глатких функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(M)$ одређује повезаност ∇ преко формуле (5.7). Најпре приметимо да за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ јасно имамо $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. Такође је очигледно да је ∇ $\mathbb{R}$ -линеарно по Y и $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по X . Преостаје још да се верификује Лајбницово правило по Y што је праволинијски рачун.

Пример 5.3. Ако све Кристофелове симболе поставимо да буду нула, из формуле (5.7) добијамо $\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n X Y^k \partial_k$, што је стандардна повезаност $D_X Y$ на $\mathbb{R}^n$. $\triangle$

Пример 5.4. Произвољан избор функција $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$ дефинише повезаност ∇^α на свакој координатној околини U_α . Коришћењем разбијања јединице ψ_α које је подређено атласу постављамо $\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, што нам даје метод којим конструишемо приличан број повезаности на многострукости M . Лако се проверава глаткоћа, $\mathbb{R}$ -линеарност по Y и $\mathfrak{F}(M)$ -линеарност по X . За Лајбницовост по Y , видимо да неће свака линеарна комбинација повезаности чинити повезаност, али због $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$ имамо $\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha(fY) = \sum_\alpha \psi_\alpha((Xf)Y + f\nabla_X^\alpha Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$. $\triangle$

5.2 Леви-Чивита повезаност

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и нека је ∇ повезаност на M . Кажемо да је повезаност ∇ **метричка** (или да чува метрику) ако је g паралелно тензорско поље, односно ако је $\nabla g = 0$. За метричку повезаност за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$0 = (\nabla g)(Y, Z, X) = (\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

што доноси идентитет,

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (5.8)$$

Пресликавање $\tau: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ дефинисано са $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ зовемо **торзија**. Торзија је евидентно $\mathfrak{F}(M)$ -билинеарно пресликавање и самим тим $\tau \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ (видети Пример 3.24). Кажемо да је повезаност **симетрична** уколико је без торзије, односно $\tau = 0$, што за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ даје једнакост

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \quad (5.9)$$

Како је комутатор координатних векторских поља једнак нули, то се симетричност повезаности огледа у једнакости $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$, односно у симетрији $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ између Кристофелових симбола у односу на координатни покретни репер.

Пример 5.5. У Примеру 5.2 смо са $\nabla^2 f(Y, X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$ изразили Хесијан функције $f \in \mathfrak{F}(M)$, одакле следи $\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = (\tau(X, Y))f$. Зато је симетричност повезаности еквивалентна симетричности Хесијана. $\triangle$

Често захтевамо да повезаност задовољи последња два услова, што води ка новом концепту повезаности у којем учествује метрика. **Леви-Чивитта повезаност**³ на псеудо-Римановој многострукости (M, g) је симетрична метричка повезаност. Другим речима, Леви-Чивита повезаност је пресликавање $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ које задовољава формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) за свако $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ и све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Испоставља се да све њих можемо објединити у један општи идентитет. Посматрајмо следећи израз,

$$X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)).$$

Како је ∇ метричка, након три примене формуле (5.8) добијамо

$$g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Y, \nabla_Z X - \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X).$$

Како је ∇ симетрична, трострука примена формуле (5.9) даје

$$g(X, [Y, Z]) - g(Y, [Z, X]) - g(Z, [X, Y]) + 2g(\nabla_X Y, Z).$$

Одавде добијамо једнакост

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \quad (5.10)$$

коју зовемо **Козилова формула**⁴, а која је веома корисна јер у потпуности одређује Леви-Чивита повезаност.

Теорема 5.2. Пресликавање $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ је Леви-Чивитта повезаност ако и само ако Козилова формула (5.10) важи за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказ. Већ смо се уверили да Леви-Чивита повезаност ∇ задовољава Козилову формулу, јер је изведена из њених особина. Обратно, остаје нам да докажемо формуле (5.4), (5.5), (5.6), (5.8) и (5.9) под претпоставком да (5.10) важи за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Користимо чињеницу да $g(V, X) = g(W, X)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(M)$ повлачи $V^\flat = W^\flat$, те зато $V = W$. У предстојећим рачунима функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ аутоматски излазе испред тензорског поља g , док за комутатор користимо специјалне случајеве од (2.6). На пример, провера Лајбницовости (5.6), за свако $Z \in \mathfrak{X}(M)$ даје

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) \\ &\quad - g(X, [fY, Z]) + g(fY, [Z, X]) + g(Z, [X, fY]) \\ &= X(fg(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(fg(X, Y)) \\ &\quad - g(X, f[Y, Z]) - (Zf)Y + fg(Y, [Z, X]) + g(Z, f[X, Y]) + (Xf)Y \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) + (Xf)g(Y, Z) - (Zf)g(X, Y) + g(X, (Zf)Y) + g(Z, (Xf)Y) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) + 2g((Xf)Y, Z) = 2g(f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z). \end{aligned}$$

Симетрија (5.9) следи из праволинијског рачуна,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\ &\quad - Y(g(X, Z)) - X(g(Z, Y)) + Z(g(Y, X)) + g(Y, [X, Z]) - g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X]) \\ &= g(Z, [X, Y]) - g(Z, [Y, X]) = 2g([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Преостале формуле (5.4), (5.5) и (5.8) верификујемо на сличан начин. □

³Tullio Levi-Civita (1873–1941), италијански математичар

⁴Jean-Louis Koszul (1921–2018), француски математичар

Дефинишимо пресликавање $F(X, Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ са

$$F(X, Y): Z \mapsto X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]).$$

Није тешко показати да је оно $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно, те зато $F(X, Y) \in \mathfrak{X}^*(M)$. По Теореме 5.2, ∇ је Леви-Чивита повезаност ако и само ако $2g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y)Z$ важи за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Овај услов еквивалентан је са $2(\nabla_X Y)^\flat = F(X, Y) \in \mathfrak{X}^*(M)$, односно са

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}F(X, Y)^\sharp,$$

одакле следи егзистенција и јединственост Леви-Чивита повезаности.

Теорема 5.3. *Свака псеудо-Риманова мноґострукост дозвољава јединствену Леви-Чивити повезаност.*

Јединствену Леви-Чивита повезаност на псеудо-Римановој n -многострукости (M, g) можемо изразити тако што израчунамо њене Кристофелове симболе у произвољној карти (U, φ) на M . Применом Козилове формуле на координатна векторска поља добијамо

$$F(\partial_i, \partial_j) = \sum_{l=1}^n F(\partial_i, \partial_j) \partial_l dx_l = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) dx_l,$$

одакле је

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \frac{1}{2}F(\partial_i, \partial_j)^\sharp = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) \partial_k,$$

што нам доноси експлицитну формулу

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right). \quad (5.11)$$

Размотримо понашање јединствене Леви-Чивита повезаности из Теореме 5.3 у случају изометрије $f: M \rightarrow N$. Како је f дифеоморфизам, то користећи формуле (2.9) и (2.10), за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ добијамо

$$\begin{aligned} X(g_M(Y, Z)) &= X(f^* g_N)(Y, Z) = X(g_N(f_* Y, f_* Z) \circ f) = f_* X(g_N(f_* Y, f_* Z)) \circ f, \\ g_M(X, [Y, Z]) &= (f^* g_N)(X, [Y, Z]) = g_N(f_* X, f_* [Y, Z]) \circ f = g_N(f_* X, [f_* Y, f_* Z]) \circ f. \end{aligned}$$

У светлу тога, Козилова формула (5.10) даје

$$2g_N(f_*(\nabla_X Y), f_* Z) \circ f = 2g_M(\nabla_X Y, Z) = 2g_N(\nabla_{f_* X} f_* Y, f_* Z) \circ f,$$

одакле следи

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_* X} f_* Y, \quad (5.12)$$

што значи да се Леви-Чивита повезаност чува изометријама.

Лема 5.4. *Пошћун коваријантни извод метричке повезаности комутира са музичким изоморфизмима.*

Доказ. Посматрајмо тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^{r+1}(M)$. У координатама, применом снизилце $\flat = \flat_{s+1}^{r+1}$ добијамо компоненте

$$(\flat A)_{j_1 \dots j_s k}^{i_1 \dots i_r} = \sum_l A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r l} g_{kl} = \sum_l (A \otimes g)_{j_1 \dots j_s k l}^{i_1 \dots i_r l} = (C_{s+2}^{r+1}(A \otimes g))_{j_1 \dots j_s k}^{i_1 \dots i_r},$$

104

Доказ. Фиксирајмо $t_0 \in I$ и карту (U, φ) у $\gamma(t_0) \in M$ са $x_i = \pi_i \circ \varphi$. У околини $I_0 \subseteq I$ од t_0 таквој да је $\gamma(I_0) \subseteq U$ локално изразимо $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ са $V(t) = \sum_j v_j(t)(\partial_j)_{\gamma(t)}$, где је $v_j(t) = (V(t))(x_j)$. Из $\mathbb{R}$ -линеарности и Лајбницевог правила имамо

$$V' = \sum_{j=1}^n (v_j(\partial_j)_\gamma)' = \sum_{j=1}^n (v_j'(\partial_j)_\gamma + v_j((\partial_j)_\gamma)').$$

Коришћењем (5.13), извод координатних векторских поља дуж γ је

$$((\partial_j)_\gamma)'(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \partial_j = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t) (\nabla_{\partial_i} \partial_j)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) (\partial_k)_{\gamma(t)}.$$

Одавде на I_0 добијамо

$$V' = \sum_{k=1}^n \left(v_k' + \sum_{i,j=1}^n v_j \gamma_i' (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \right) (\partial_k)_\gamma. \quad (5.14)$$

Како је t_0 било произвољно, ова формула јединствено одређује V' у свакој тачки из $\gamma(I)$. За егзистенцију, покривамо $\gamma(I)$ координатним околима и дефинишемо V' локално са (5.14), где јединственост обезбеђује да се ове локалне дефиниције слажу кад се координатне околине преклапају. Коначно, оператор $V \mapsto V'$ дефинисан на овај начин је $\mathbb{R}$ -линеаран и задовољава Лајбницево правило док се такође слаже са амбијентном повезаностју, а верификација ових особина је праволинијска. $\square$

Уобичајено је да оператор из Теореме 5.5 обележимо са ∇/dt , посебно кад желимо да укажемо коју повезаност користимо и дуж ког параметра криве. Кажемо да је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ **паралелно дуж γ** у односу на ∇ ако је $V' = 0$. Испоставља се да је векторско поље $X \in \mathfrak{X}(M)$ паралелно ($\nabla X = 0$) ако и само ако је паралелно дуж сваке криве на M .

Пример 5.6. Посматрајмо стандардну повезаност $D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \partial_i$ на $\mathbb{R}^n$ дату са (5.3). За њу имамо $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, те из (5.14) следи $V' = \sum_k v_k' (\partial_k)_\gamma$. Одавде је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелно дуж γ ако и само ако је $v_k' = 0$ за свако $1 \leq k \leq n$, што значи да су све функције v_k константне. Другим речима, V је константно векторско поље дуж γ . $\triangle$

Основна теорема о паралелним векторским пољима каже да се било који тангентни вектор у произвољној тачки са криве може јединствено продужити на паралелно векторско поље дуж целокупне криве.

Теорема 5.6. За даћу криву $\gamma: I \rightarrow M$, тачку $t_0 \in I$ и вектор $V_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$, постоји јединствено паралелно векторско поље V дуж γ такво да је $V(t_0) = V_0$.

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\gamma(I)$ садржано у једној карти. У координатама те карте, по (5.14) услов да је V паралелно дуж γ је еквивалентан са

$$v_k'(t) = - \sum_{i,j=1}^n v_j(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$$

за свако $1 \leq k \leq n$. Почетни услов $V(t_0) = V_0$ постаје $v_k(t_0) = V_0(x_k)$ за $1 \leq k \leq n$. Добијен је линеарни систем обичних диференцијалних једначина са почетним условом. Стандардна теорија о егзистенцији и јединствености доноси јединствено решења на целом I . Претпоставимо сада да $\gamma(I)$ није садржано у једној карти. Нека је a супремум свих $b > t_0$ за које постоји јединствено паралелно векторско поље дуж γ на $[t_0, b]$ са задатим почетним условом. За b довољно близу t_0 , скуп $\gamma([t_0, b])$ упада

у једну карту, те је $a > t_0$. Ако је $a \in I$ бирамо координатну околину која садржи $\gamma(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за неко $\varepsilon > 0$. На $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ постоји паралелно векторско поље W са $W(a - \varepsilon/2) = V(a - \varepsilon/2)$. Из јединствености на пресеку W се слаже са V на $(a - \varepsilon, a)$, те продужава V након a . То је у супротности са дефиницијом a као супремумом. Сличан аргумент примењујемо за вредности мање од t_0 , те зато постоји јединствено паралелно векторско поље на целом I . $\square$

Векторско поље V дуж криве γ из претходне теореме зовемо **паралелно померање** од V_0 дуж γ . За $a, b \in I$ дефинишемо **оператор паралелног померања** $P_a^b: T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$ са $P_a^b(V_a) = V(b)$, где је V паралелно померање од V_a дуж γ .

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, а $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ векторска поља дуж криве $\gamma: I \rightarrow M$. Нека $g(V, W) \in \mathfrak{F}(I)$ означава функцију дату са $t \mapsto g_{\gamma(t)}(V(t), W(t))$. Кажемо да је повезаност ∇ на (M, g) **компатибилна** са g ако оператор паралелног померања чува метрику. Другим речима, компатибилност повезаности и метрике значи да за сваку криву γ и паралелна векторска поља $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ важи да је функција $g(V, W) \in \mathfrak{F}(I)$ константна. Овај услов је очигледна последица општије једнакости

$$(g(V, W))' = g(V', W) + g(V, W'). \quad (5.15)$$

Лема 5.7. Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако за свака два векторска поља V и W дуж криве $\gamma: I \rightarrow M$ важи једнакост (5.15).

Доказ. Изаберимо ортонормирану базу у $T_{\gamma(t_0)}M$. По Теорему 5.6 продужимо базне векторе на паралелна векторска поља $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Компатибилност ∇ са g за свако $t \in I$ даје ортонормирану базу $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ од $T_{\gamma(t)}M$. За свако $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$ имамо $g(V, W) = \sum_{i,j} v_i w_j \delta_{ij} \varepsilon_i = \sum_i \varepsilon_i v_i w_i$. Са друге стране из $E_i' \equiv 0$ добијамо $V' = \sum_i v_i' E_i$ и $W' = \sum_j w_j' E_j$, одакле је $g(V', W) + g(V, W') = \sum_i \varepsilon_i (v_i' w_i + v_i w_i')$, што повлачи (5.15). $\square$

Теорема 5.8. Повезаност ∇ псеудо-Риманове многострукости (M, g) је компатибилна са g ако и само ако је метричка повезаност.

Доказ. Нека је ∇ компатибилна са g и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = X_p$. По Леми 5.7 имамо $(g(Y_\gamma, Z_\gamma))' = g(Y'_\gamma, Z_\gamma) + g(Y_\gamma, Z'_\gamma)$. Међутим, $(g(Y_\gamma, Z_\gamma))'(t) = ((g(Y, Z) \circ \gamma))'(t) = \gamma'(t)(g(Y, Z))$, те за $t = 0$ добијамо

$$X_p(g(Y, Z)) = g_p(\nabla_{X_p} Y, Z_p) + g_p(Y_p, \nabla_{X_p} Z),$$

што доказује (5.8) у свакој тачки p , те је ∇ метричка повезаност.

Обратно, нека је ∇ метричка повезаност. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ произвољна крива, а $t \in I$ фиксирано. Применом (5.8) на продужење вектора $\gamma'(t) \in T_p M$, где је $p = \gamma(t)$, добијамо

$$\gamma'(t)(g(\partial_i, \partial_j)) = g_p(\nabla_{\gamma'(t)} \partial_i, (\partial_j)_p) + g_p((\partial_i)_p, \nabla_{\gamma'(t)} \partial_j),$$

те имамо $(g(E_i, E_j))'(t) = g(E_i', E_j)(t) + g(E_i, E_j')(t)$, где је $E_i = (\partial_i)_\gamma$ за $1 \leq i \leq n = \dim M$. Произвољна $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ могу се изразити са $V = \sum_i v_i E_i$ и $W = \sum_j w_j E_j$, те

$$\begin{aligned} (g(V, W))' &= \sum_{i,j=1}^n \left(v_i' w_j g(E_i, E_j) + v_i w_j' g(E_i, E_j) + v_i w_j (g(E_i, E_j))' \right), \\ g(V', W) + g(V, W') &= \sum_{i,j=1}^n \left(v_i' w_j g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E_i', E_j) + v_i w_j' g(E_i, E_j) + v_i w_j g(E_i, E_j') \right). \end{aligned}$$

Зато је $(g(V, W))'(t) = g(V', W)(t) + g(V, W')(t)$, што важи за свако t , одакле је ∇ компатибилно са g . $\square$

Нека су $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ паралелна дуж γ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Како је $(\alpha V + \beta W)' = \alpha V' + \beta W' = 0$, имамо $P_a^b(\alpha V(a) + \beta W(a)) = \alpha V(b) + \beta W(b)$, што показује да је оператор паралелног померања P_a^b линеаран. Штавише, ако је $P_a^b(V(a)) = 0$ онда из јединствености имамо $V = 0$, што даје $V(a) = 0$. Зато је P_a^b инјективно, те као линеарно пресликавање између простора једнаких димензија мора бити и бијективно. Имајући у виду Теорему 5.8, долазимо до наредне основне особине паралелног померања.

Теорема 5.9. *Паралелно померање дуж криве је линеарна изометрија у случају Леви-Чивитта повезаности.*

Коваријантни извод дуж криве γ може се изразити у терминима паралелног померања. Пођимо од базних вектора од $T_{\gamma(a)}M$ и продужимо их Теоремом 5.6 на одговарајућа паралелна векторска поља $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\gamma)$, где је $E_j' = 0$ и $E_j(t) = P_a^t E_j(a)$ за $1 \leq j \leq n$. Из $V = \sum_j v_j E_j$ имамо

$$V'(a) = \sum_{j=1}^n (v_j E_j)'(a) = \sum_{j=1}^n v_j'(a) E_j(a) = \lim_{t \rightarrow a} \sum_{j=1}^n \frac{v_j(t) - v_j(a)}{t - a} E_j(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

Лема 5.10. *За векторско поље V дуж криве γ имамо*

$$V'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{(P_a^t)^{-1} V(t) - V(a)}{t - a}.$$

5.4 Геодезијске криве

Нека је ∇ повезаност на многострукости M , а γ крива на M . Коваријантни извод дуж криве омогућава нам да дефинишемо **убрзање** криве γ са $\gamma'' = (\gamma')' \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Кажемо да је крива γ **геодезијска** у односу на ∇ уколико нема убрзања, $\gamma'' = 0$. Другим речима, геодезијска је крива чија је брзина паралелна дуж ње саме.

У некој координатној околини, једнакост (5.14) за $V = \gamma'$ (и последично $v_j = \gamma_j'$ за $1 \leq j \leq n$) постаје

$$\gamma'' = \sum_{k=1}^n \left(\gamma_k'' + \sum_{i,j=1}^n \gamma_j' \gamma_i' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) (\partial_k)_\gamma.$$

Геодезијски услов $\gamma'' = 0$ доноси систем обичних диференцијалних једначина другог реда,

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^n \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \quad (5.16)$$

за свако $1 \leq k \leq n$, што су **локалне геодезијске једначине**. За произвољно $t_0 \in I$, постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ садржано у некој координатној околини, те је γ геодезијска ако и само ако одговарајућа рестрикција задовољава локалне геодезијске једначине у свакој карти чији домен сече слику од γ .

Теорема 5.11. *Нека је ∇ повезаност на многострукости M . За свако $p \in M$ и $V \in T_p M$ постоји отворен интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ са $0 \in I$ и геодезијска $\gamma: I \rightarrow M$ за коју је $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = V$. Сваке две такве геодезијске се слажу на њиховом заједничком домену.*

Доказ. Уобичајен трик је увођење помоћних функција $\xi_k = \gamma_k'$ које преводе локалне геодезијске једначине (5.16) у еквивалентан систем првог реда,

$$\gamma_k'(t) = \xi_k(t), \quad \xi_k'(t) = - \sum_{i,j=1}^n \xi_i(t) \xi_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)),$$

са дупло већим бројем променљивих и једначина. По Пикар⁵–Линделеф⁶ теореме (за систем обичних диференцијалних једначина првог реда са почетним условом), за неко $\varepsilon > 0$ постоји јединствено решење

$$\zeta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \times \mathbb{R}^n, \quad \zeta(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$$

са почетним условом $\zeta(0) = (p, V)$, где је тражена геодезијска $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Што се јединствености тиче, нека су $\gamma_1, \gamma_2: I \rightarrow M$ две геодезијске које задовољавају $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Дефинишемо $a = \inf\{t \in I : t > 0, \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\} > 0$. Тада је $a > 0$ и $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)$ на $(0, a)$, те из непрекидности $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$. Сада су $t \mapsto \gamma_1(a+t)$ и $t \mapsto \gamma_2(a+t)$ геодезијске са почетном брзином $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$, те се γ_1 и γ_2 слажу на неком отвореном интервалу који садржи a , што је контрадикција. Аналогни аргумент користимо за $t < 0$, што комплетира доказ. $\square$

Геодезијска $\gamma: I \rightarrow M$ је **максимална** ако не постоји друга геодезијска са отвореним доменом који строго садржи I , таква да се са γ слаже на I . Из Теореме 5.11 директно следи да за свако $V \in TM$ постоји јединствена максимална геодезијска γ_V са $\gamma_V'(0) = V$.

Уколико је домен сваке максималне геодезијске која пролази кроз тачку $p \in M$ целокупно $\mathbb{R}$, кажемо да је M **геодезијски комплетан у тачки** p . За псеудо-Риманову многострукост кажемо да је **геодезијски комплетан** ако је геодезијски комплетан у свакој тачки. Пример 4.23 показује да постоје многострукости које нису геодезијски комплетне.

Пример 5.7. Посматрајмо псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}_\nu^n$ индекса ν . Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности рачунамо по формули (5.11). Како су коефицијенти метрике константни, то је $\Gamma_{ij}^k = 0$. За геодезијске γ имамо $\sum_k \gamma_k''(t)(\partial_k)_{\gamma(t)} = 0$, одакле је $\gamma_k'' = 0$ за свако $1 \leq k \leq n$. Дакле, геодезијске су облика $t \mapsto p + tV$ за неке $p, V \in \mathbb{R}_\nu^n$. $\triangle$

Пример 5.8. Посматрајмо хиперболичку полураван $\mathbf{H}\mathbf{U}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ са Римановом метриком $g = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$ из Примера 4.21. Компоненте Риманове метрике виде се из наведених матрица,

$$g = \begin{pmatrix} 1/x_2^2 & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} x_2^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Прво рачунамо Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности по формули (5.11), одакле због $g^{ab} = x_2^2 \delta_{ab}$ имамо

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} x_2^2 \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Како је

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} = \delta_{ab} \delta_{c2} \frac{\partial(1/x_2^2)}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2^3} \delta_{ab} \delta_{c2},$$

то добијамо

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{1}{x_2} (\delta_{jk} \delta_{i2} + \delta_{ki} \delta_{j2} - \delta_{ij} \delta_{k2}),$$

одакле следи

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{x_2}. \quad (5.17)$$

⁵Charles Émile Picard (1856–1941), француски математичар

⁶Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), фински математичар

Геодезијске $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ тражимо преко локалних геодезијских једначина (5.16),

$$\gamma_1''(t) + \sum_{ij} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^1(\gamma(t)) = 0, \quad \gamma_2''(t) + \sum_{ij} \gamma_j'(t) \gamma_i'(t) \Gamma_{ij}^2(\gamma(t)) = 0,$$

које заменом (5.17) постају

$$\gamma_1'' - 2\gamma_1'\gamma_2'\frac{1}{\gamma_2} = 0, \quad \gamma_2'' + ((\gamma_1')^2 - (\gamma_2')^2)\frac{1}{\gamma_2} = 0. \quad (5.18)$$

Једначине (5.18) решавамо тумачећи два случаја. У једноставнијем имамо $\gamma_1' = 0$, односно $\gamma_1 = C = \text{Const}$. Прва једначина важи, док друга постаје $\gamma_2'' - (\gamma_2')^2/\gamma_2 = 0$, те након дељења са $\gamma_2 > 0$ добијамо

$$\frac{\gamma_2''\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_2'}{(\gamma_2)^2} = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right)' = 0.$$

Одавде је $\gamma_2'/\gamma_2 = (\ln \gamma_2)' = D$, те $\ln \gamma_2 = Dt + E$ и коначно $\gamma_2 = e^{Dt+E}$. Дакле, први тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = (C, e^{Dt+E}),$$

што представља отворене полуправе нормалне на x_1 -осу.

У другом случају имамо $\gamma_1' \neq 0$, где из прве једначине формуле (5.18) следи

$$\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} - 2\frac{\gamma_2'}{\gamma_2} = (\ln |\gamma_1'| - 2 \ln \gamma_2)' = \left(\ln \frac{|\gamma_1'|}{\gamma_2^2}\right)' = 0,$$

одакле је $\gamma_1' = C\gamma_2^2$. Када то заменимо у другу једначину, после дељења са $\gamma_2 > 0$ имамо

$$\frac{\gamma_2''\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_2'}{(\gamma_2)^2} + C^2\gamma_2^2 = \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right)' + C^2\gamma_2^2 = 0.$$

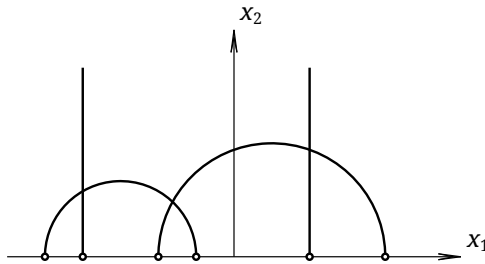
Увођењем смене $f = \gamma_2'/\gamma_2 = (\ln \gamma_2)'$, једначина постаје $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$, одакле следи $f' < 0$. Диференцирањем добијамо $f' + 2C^2\gamma_2\gamma_2' = f' - 2ff = (f - f^2)' = 0$, што даје $f = f^2 - A^2$ за неку константу $A^2 > 0$. Раздвајањем променљивих и интеграцијом имамо,

$$B + \int dt = \int \frac{df}{f^2 - A^2} = -\frac{1}{A} \int \frac{d(f/A)}{1 - (f/A)^2} = -\frac{1}{A} \operatorname{arth} \left(\frac{f}{A} \right),$$

одакле је $f = -A \operatorname{th}(A(t+B)) = (\ln \gamma_2)'$. Даље је $\gamma_2 = r/(\operatorname{ch}(A(t+B)))$ за неку константу $r > 0$. Из $f' + C^2\gamma_2^2 = 0$ добијамо везу $A^2 = C^2r^2$, при чему можемо ускладити знак од A тако да је $A = Cr$. Повратком на $\gamma_1' = C\gamma_2^2$ добијамо $\gamma_1 = (Cr^2/A) \operatorname{th}(A(t+B)) + l$. Дакле, други тип геодезијских су криве облика

$$\gamma(t) = \left(r \operatorname{th}(A(t+B)) + l, \frac{r}{\operatorname{ch}(A(t+B))} \right),$$

за које важи $(\gamma_1 - l)^2 + \gamma_2^2 = r^2$, што су полукругови са центром $(l, 0)$ полупречника r .



△

5.5 Експоненцијално пресликавање

Нека је ∇ произвољна повезаност на многострукости M . По Теореме 5.11 почетни вектор брзине $V \in TM$ одређује јединствену максималну геодезијску γ_V са $\gamma'_V(0) = V$ и $\gamma_V(0) = \pi V$. За дубље разумевање геодезијских важно је анализирати како зависе од почетног тангентног вектора. Геодезијске са пропорционалним почетним брзинама су блиско повезане, о чему говори наредна лема о рескалирању.

Лема 5.12. *За свако $V \in TM$ и $c, t \in \mathbb{R}$ важи $\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct)$ кад год је нека од стране t и c једнакости дефинисана.*

Доказ. Претпоставимо $c \neq 0$, јер за $c = 0$ обе стране су једнаке πV . Довољно је доказати лему у случају да је дефинисана десна страна једнакости, јер обрат добијемо када V, t, c заменимо редом са $cV, ct, 1/c$. Нека је $\gamma = \gamma_V: I \rightarrow M$, а нову криву $\psi: (1/c)I \rightarrow M$ дефинишемо са $\psi(t) = \gamma(ct)$, те имамо $\psi(0) = \gamma(0) = \pi V$. У некој карти (U, φ) са $x_i = \pi_i \circ \varphi$ поставимо $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ и $\psi_i = x_i \circ \psi$. Тада је $\psi'_i(t) = (d/dt)\gamma_i(ct) = c\gamma'_i(ct)$, те посебно важи $\psi'(0) = c\gamma'(0) = cV$. Како је γ геодезијска, то је $\gamma'' = 0$, те имамо

$$\psi''_k(t) + \sum_{ij} \psi'_j(t) \psi'_i(t) \Gamma_{ij}^k(\psi(t)) = c^2 \gamma''_k(ct) + c^2 \sum_{ij} \gamma'_j(ct) \gamma'_i(ct) \Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) = 0.$$

Зато је ψ геодезијска са почетним условом $\psi'(0) = cV$, што даје $\psi = \gamma_{cV}$. $\square$

Нека је $\mathcal{E} \subseteq TM$ скуп свих тангентних вектора $V \in TM$ таквих да је геодезијска γ_V дефинисана на интервалу који садржи $[0, 1]$. Пресликавање $\exp: \mathcal{E} \rightarrow M$ дефинисано са $\exp V = \gamma_V(1)$ зовемо **експоненцијално пресликавање**. Исто име користимо и за његову рестрикцију $\exp_p: \mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p M \rightarrow M$ у тачки $p \in M$.

Лема 5.12 показује да од дате максималне геодезијске можемо добити нову геодезијску чији је домен интервал произвољно велики тако што довољно смањимо почетни вектор. Ако је $tV \in \mathcal{E}$, онда је $\gamma_{tV}(1)$ дефинисано, одакле следи да геодезијска γ_V има облик

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp(tV).$$

Дакле, максимална геодезијска која пролази кроз $p \in M$ са почетним вектором $V \in T_p M$ је облика $t \mapsto \exp_p tV$. Посебно, праве линије тангентног простора $T_p M$ које пролазе кроз координатни почетак $0_p \in T_p M$ се са $\exp_p$ сликају на геодезијске. За ове геодезијске кажемо да су **радијалне геодезијске** кроз p . Сасвим слично можемо говорити о радијалним геодезијским сегментима и радијалним геодезијским полу-правама које извиру из p .

Стандардни резултати из обичних диференцијалних једначина гарантују да $\exp_p(V)$ глатко зависи и од V и од p , тако да је $\exp_p$ добро дефинисано и глатко на некој околини координатног почетка $0_p \in T_p M$.

Нека је $\tau: I \rightarrow T_p M$ крива тангентног простора дефинисана са $\tau(t) = tV$. Лако је приметити да за $V_{0_p} = \tau'(0) \in T_{0_p}(T_p M)$ имамо

$$(T_{0_p} \exp_p)(V_{0_p}) = (T_{0_p} \exp_p)(\tau'(0)) = (\exp_p \circ \tau)'(0) = \gamma'_V(0) = V,$$

те је $T_{0_p} \exp_p: T_{0_p}(T_p M) \rightarrow T_p M$ канонско пресликавање $V_{0_p} \mapsto V$, које постаје идентичко пресликавање при идентификацији $T_{0_p}(T_p M) \cong T_p M$.

Лема 5.13. *Нека је p произвољна тачка псеудо-Риманове многострукости M . Тангентно пресликавање експоненцијално пресликавања $\exp_p$ у координатном почетку $0_p \in T_p M$ је идентичко пресликавање при канонској идентификацији.*

Како је тангентно пресликавање $T_{0_p} \exp_p$ изоморфизам, то теорема о инверзној функцији (Теорема 2.8) повлачи да је $\exp_p$ локални дифеоморфизам у координатном почетку 0_p .

Теорема 5.14. Нека је ∇ повезаност на мнојострукости M и $p \in M$. Тада постоји околина $0_p \in \mathcal{U} \subseteq T_p M$ и околина $p \in U \subseteq M$, тако да је $\exp_p|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow U$ дифеоморфизам.

За подскуп $\mathcal{U} \ni 0$ векторског простора $\mathcal{V}$ кажемо да је **звездастог облика** око 0 ако $V \in \mathcal{U}$ повлачи да $tV \in \mathcal{U}$ важи за свако $t \in [0, 1]$. Приметимо да је $\mathcal{E}_p$ звездастог облика око $0_p \in T_p M$. Уколико је домен $\mathcal{U}$ дифеоморфизма из Теореме 5.14 звездастог облика око 0_p онда се његова слика $U = \exp_p(\mathcal{U})$ зове **нормална околина** од p .

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост димензије n и $p \in M$ произвољна тачка. Избор ортонормиране базе $(E_1, \dots, E_n)$ квадратног векторског простора $(T_p M, g_p)$ еквивалентан је изометрији $L: T_p M \rightarrow \mathbb{R}_p^n$ датој са $L(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ако је U нормална околина од $p \in M$, тада је $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ дато са $\phi = L \circ \exp_p^{-1}|_U$ карта у $p \in M$. За координате $x_i = \pi_i \circ \phi$ кажемо да су **нормалне координате** центриране у $p \in M$. Нормалне координате су веома корисне јер доносе веома једноставну репрезентацију геодезијских.

Теорема 5.15. Нека је (M, g) псеудо-Риманова n -мнојострукост, ∇ њена Леви-Чивитта повезаност, а (U, ϕ) карта са нормалним координатама центрираним у $p \in M$. Тада за свако $1 \leq i, j, k \leq n$ важи

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \partial_k g_{ij}(p) = 0.$$

Доказ. Сваки вектор $0 \neq V = \sum_{i=1}^n v_i E_i \in T_p M$ одређује радијалну геодезијску γ_V кроз p која је облика $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$ за $t \in I$ где је $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ неки отворен интервал. У нормалним координатама центрираним у p је $\phi \circ \gamma_V(t) = L(tV) = (tv_1, \dots, tv_n)$, одакле добијамо $\gamma_i(t) = x_i \circ \gamma_V(t) = tv_i$ за $1 \leq i \leq n$, што мора задовољити локалне геодезијске једначине (5.16), те важи $\sum_{i,j} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(\gamma_V(t)) = 0$ за $1 \leq k \leq n$. То свакако ради за $t = 0$ где је $\gamma_V(0) = p$, одакле произвољан избор вектора $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ доноси

$$\sum_{i,j=1}^n v_i v_j \Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

за све $1 \leq k \leq n$. Погодан избор је $V = E_i$ одакле добијамо $\Gamma_{ii}^k(p) = 0$, а након тога за $V = E_i + E_j$ имамо $\Gamma_{ii}^k(p) + \Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) + \Gamma_{jj}^k(p) = 0$, одакле следи $\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0$, те како је ∇ симетрична добијамо $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, што доказује да се сви Кристофелови симболи анулирају у тачки p .

Преостале особине је лако видети. Из $V(x_i) = (\gamma_V'(0))(x_i) = (x_i \circ \gamma_V)'(0) = \gamma_i'(0) = v_i$ имамо $V = \sum_{i=1}^n v_i (\partial_i)_p$, што за $V = E_i = (\partial_i)_p$ доноси $g_p(\partial_i, \partial_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Како је повезаност метричка, то важи $\partial_k g_{ij} = g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j) = \sum_l (\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il})$, те и $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ јер је ∇ симетрична. $\square$

У Теореме 5.14 смо показали да свака тачка псеудо-Риманове многострукости има нормалну околинду. За нормалну околинду кажемо да је **појединачно нормална** ако је она нормална околина сваке своје тачке.

Теорема 5.16. Свака тачка псеудо-Риманове многострукости има појединачно нормалну околинду.

Доказ. Полазимо од нормалне координатне околине $U \subseteq M$ тачке $p \in M$. Дефинишемо пресликавање $E: \mathcal{E}_U \rightarrow U \times U$ са $E(q, V) = (q, \exp_q V)$, где је $\mathcal{E}_U = \mathcal{E} \cap TU \subseteq U \times \mathbb{R}^n$. Јакобијева матрица тангентног пресликавања од E у тачки $0_p = (p, 0)$ је блок доња троугаона матрица са идентичким матрицама на дијагонали (друга од њих долази из Леме 5.13) и самим тим је инвертибилна. По теореме о инверзној функцији (Теорема 2.8) постоји околина $W \subseteq TU$ тачке 0_p таква да је $E|_W$ дифеоморфизам на околинду од

$(p, p) \in U \times U$. Како је E непрекидно, можемо претпоставити да је $E|_W(W) = U_\epsilon \times U_\epsilon$ за неко $\epsilon > 0$, где је $U_\epsilon = \{q \in U : \sum_{i=1}^n (x_i(q))^2 < \epsilon\}$ еуклидска кугла у односу на нормалне координате $(x_1, \dots, x_n)$. Нека је тензор $b \in \mathfrak{T}_2^0(U_\epsilon)$ дефинисан својим компонентама у односу на нормалне координате са

$$b_{ij} = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k x_k.$$

Он је очигледно симетричан и позитивно дефинитан у p , те можемо смањити $\epsilon > 0$ тако да b буде позитивно дефинитно на целом U_ϵ . За произвољну тачку q из таквог U_ϵ и $W_q = W \cap T_q M$ знамо да је $E|_{W_q}$ дифеоморфизам на $\{q\} \times U_\epsilon$, што значи да је $\exp_q|_{W_q}$ дифеоморфизам на U_ϵ , те је U_ϵ нормална околина сваке своје тачке q уколико докажемо да је W_q звездастог облика око 0_q .

Нека је $q \neq s \in U_\epsilon$ и $E(q, V) = (q, s)$, што значи да је $\gamma_V: [0, 1] \rightarrow M$ геодезијска из q у s . Ако поставимо њене компоненте са $\gamma_i = x_i \circ \gamma_V$ за $1 \leq i \leq n$, користећи геодезијске једначине (5.16) можемо израчунати

$$\begin{aligned} 0 < 2b(\gamma'_V, \gamma'_V) &= 2 \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \gamma'_i \gamma'_j = 2 \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^n \gamma_k (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_V) \right) \gamma'_i \gamma'_j \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (\gamma'_i)^2 - 2 \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_k \gamma'_i \gamma'_j (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_V) = 2 \sum_{k=1}^n (\gamma'_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \gamma_k \gamma''_k = \sum_{k=1}^n (2\gamma_k \gamma'_k)' = \sum_{k=1}^n (\gamma_k^2)'', \end{aligned}$$

одакле следи да је функција $\sum_{k=1}^n \gamma_k^2$ конвексна и не може имати максимум на интервалу $(0, 1)$. Због тога је $\gamma_V([0, 1]) \subseteq U_\epsilon$, те је W_q звездастог облика око 0_q и U_ϵ је нормална околина тачке q што комплетира доказ. $\square$

5.6 Геодезијске и минимизујуће криве

Двоипараметарско пресликавање је глатко пресликавање $f: I \times J \rightarrow M$, где су $I, J \subseteq \mathbb{R}$ отворени интервали. Векторско поље дуж криве можемо природно уопштити на векторска поља дуж двоипараметарског пресликавања. Тако је векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(f)$ дуж f глатко пресликавање $Z: I \times J \rightarrow TM$ такво да је $\pi \circ Z = f$. Парцијалне брзине $(\partial f / \partial t)$ и $(\partial f / \partial s)$ су векторска поља дуж $f = f(t, s)$ дефинисана са

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = T_{(t,s)} f \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,s)} = (f_s)'(t), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = T_{(t,s)} f \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)} = (f^t)'(s),$$

где су $f_s: I \rightarrow M$ и $f^t: J \rightarrow M$ дати са $f_s(t) = f(t, s) = f^t(s)$. У некој координатној околини, из (2.2) имамо

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_* \frac{\partial}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f,$$

где је $f_j = x_j \circ f$, одакле из формуле (5.14) следи

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial s} (\Gamma_{ij}^k \circ f) \right) \partial_k \circ f.$$

У случају симетричне повезаности важи $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, одакле добијамо

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (5.19)$$

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, а ∇ њена Леви-Чивита повезаност. Приметимо да како је ∇ симетрична, формула (5.19) важи. Фиксирајмо $p \in M$, те нека су $V, W \in T_p M$ тако да је $0 \neq V \in \mathcal{E}_p$. Размотримо двопараметарско пресликавање $\tau: I \times J \rightarrow T_p M$, $\tau(t, s) = tV + tsW$ и његову експоненцијалну слику у M , $f: I \times J \rightarrow M$, $f(t, s) = \exp_p(tV + tsW)$. Није тешко приметити да можемо пронаћи мало $\varepsilon > 0$ тако да за интервале $I = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ и $J = (-\varepsilon, \varepsilon)$ имамо $tV + tsW \in \mathcal{E}_p$. За свако $s \in J$, крива $f_s: I \rightarrow M$, $f_s(t) = f(t, s)$ је рестрикција максималне геодезијске γ_{V+sW} , те имамо

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(t, s) = g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)(0, 0) = g_p(V + sW, V + sW), \quad \frac{\nabla \partial f}{dt \partial t} \equiv 0.$$

Међутим, употребом $\nabla g = 0$ и симетрије (5.19) добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) &= g\left(\frac{\nabla \partial f}{dt \partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\nabla \partial f}{dt \partial s}\right) \\ &= g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\nabla \partial f}{ds \partial t}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = g_p(V + sW, W), \end{aligned}$$

што даје

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) = t g_p(V + sW, W) + g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)(0, 0) = t g_p(V + sW, W).$$

Како је

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(t, s) = (V + sW)_{tV+tsW}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial s}(t, s) = (tW)_{tV+tsW},$$

то имамо

$$\begin{aligned} T_V \exp_p(V_V) &= T_V \exp_p \circ T_{(1,0)} \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = T_{(1,0)}(\exp_p \circ \tau) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t}(1, 0), \\ T_V \exp_p(W_V) &= T_V \exp_p \circ T_{(1,0)} \tau \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = T_{(1,0)}(\exp_p \circ \tau) \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0), \end{aligned}$$

те је зато

$$g_{\exp_p V}(T_V \exp_p(V_V), T_V \exp_p(W_V)) = g_p(V, W). \quad (5.20)$$

Овај резултат је познат као **Гаусова лема**.

Лема 5.17. Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, $p \in M$ и $V, W \in T_p M$ тако да $0 \neq V \in \mathcal{E}_p$, њада важи једнакост (5.20).

Најважнији случај тиче се повезане Риманове многострукости (M, g) , што је метрички простор чија је метричка топологија иста као топологија многострукости (Теорема 4.20). Фиксирајмо тачку $p \in M$. У простору са унутрашњим производом $(T_p M, g_p)$ дефинишемо **шанијенне сфере** и **шанијенне куле** полупречника $r > 0$ са

$$S_r(0_p) = \{X \in T_p M : \|X\| = r\}, \quad B_r(0_p) = \{X \in T_p M : \|X\| < r\}.$$

За довољно мало r , $B_r(p) = \exp_p B_r(0_p)$ је нормална околина од p , и онда кажемо да је $B_r(p)$ **геодезијска кула** (или **нормална кула**) у M центрирана у p , док за свако $\varepsilon < r$ кажемо да је $S_\varepsilon(p) = \exp_p S_\varepsilon(0_p)$ **геодезијска сфера** (или **нормална сфера**) у M центрирана у p . Гаусова лема (Лема 5.17) тврди да је геодезијска сфера $S_\varepsilon(p)$ ортогонална на све геодезијске које извиру из p , и омогућава да експоненцијално пресликавање схватимо као радијалну изометрију.

За допуштену криву $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ Риманове многострукости M кажемо да је **минимизујућа** ако је $L(\gamma) \leq L(\psi)$ за сваку допуштену криву ψ из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$. Наравно, γ је минимизујућа ако и само ако је $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ (под условом да је M повезана, што овде и претпостављамо).

Теорема 5.18. Нека је $B_\varepsilon(p)$ геодезијска кула у Римановој мнојострукости M центрирана у $p \in M$ и $p \neq q \in B_\varepsilon(p)$. Радијална геодезијска из p у q је до на репараметризацију јединствена минимизујућа крива из p у q на M .

Доказ. За јединствену радијалну геодезијску $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ из p у q ($\gamma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$) имамо да важи $L(\gamma) = \|\exp_p^{-1}(q)\| = r < \varepsilon$. Нека је $\psi: [a, b] \rightarrow M$ допуштена крива из p у q . Нека је $a_0 \in [a, b]$ највеће t такво да је $\psi(t) = p$, а $b_0 \in [a_0, b]$ најмање t такво да је $\psi(t) \in S_r(p)$. За $t \in [a_0, b_0]$ можемо изразити

$$\psi(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)),$$

где је $\rho: [a_0, b_0] \rightarrow [0, 1]$ и $V: [a_0, b_0] \rightarrow S_r(0_p)$. Тада је

$$\psi' = T_{\rho V} \exp_p \circ (\rho V)' = T_{\rho V} \exp_p(\rho' V_{\rho V} + \rho V'_{\rho V}) = \rho' T_{\rho V} \exp_p(V_{\rho V}) + \rho T_{\rho V} \exp_p(V'_{\rho V}),$$

где $V' = \nabla V/dt$ има особину $2g(V, V') = (g(V, V))' = (r^2)' = 0$. Гаусова лема повлачи

$$g(\psi', \psi') = (\rho')^2 g(V, V) + 2\rho' \rho g(V, V') + \rho^2 g(V', V') = (\rho' r)^2 + \rho^2 g(V', V') \geq (\rho' r)^2,$$

те је зато

$$L(\psi) \geq \int_{a_0}^{b_0} \|\psi'(t)\| dt \geq \int_{a_0}^{b_0} |\rho' r| dt \geq r \int_{a_0}^{b_0} \rho' dt = r(\rho(b_0) - \rho(a_0)) = r,$$

што доказује $L(\psi) \geq L(\gamma) = d(p, q)$.

Да бисмо имали једнакост $L(\psi) = r$, неопходно је да важи $a_0 = a$ и $b_0 = b$, а онда $V' = 0$ и $\rho' > 0$. То значи да је V константно док ρ расте, те је ψ експоненцијална слика дужи која спаја 0_p и $\exp_p^{-1}(q)$. Тако је ψ монотона репараметризација од γ , те имају исту слику, $\gamma([a, b]) = \psi([a, b])$. $\square$

Теорема 5.19. Свака геодезијска на Римановој мнојострукости је локално минимизујућа.

Доказ. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска на Римановој многострукости M дефинисана за неки отворен интервал I . За $t \in I$ по Теорему 5.16 постоји потпуно нормална околина $U \ni \gamma(t)$. За $a, b \in \gamma^{-1}(U)$, тачка $\gamma(b)$ се налази у нормалној околини U центрираној у $\gamma(a)$, те је по Теорему 5.18 радијална геодезијска из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ минимизујућа између те две тачке. Међутим, рестрикција од γ на $[a, b]$ је такође геодезијски сегмент из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ који лежи у U , те се $\gamma|_{[a, b]}$ поклапа са том минимизујућом геодезијском. $\square$

Из претходних теорема видимо да локално посматрано, геодезијска (односно њена репараметризација) која спаја две тачке јесте најкраћа таква крива. Међутим, глобално посматрано то не мора да важи.

Пример 5.9. Посматрајмо сферу, где знамо да су слике геодезијских велики кругови сфере, а две тачке са великог круга одређују два лука од којих је један дужи (осим ако нису у питању антиподадне тачке).

Занимљивији је случај цилиндра где су слике геодезијских хеликси. За две блиске тачке постоји бесконачно много геодезијских (са различитим сликама) које их спајају, али само је једна (до на репараметризацију) чија слика лежи у нормалној околини једне од тих тачака. $\triangle$

Теорема 5.20. Свака минимизујућа крива на Римановој мнојострукости је до на репараметризацију геодезијска.

Доказ. Нека је $\psi: [a, b] \rightarrow M$ минимизујућа допуштена крива параметризована дужином лука. За свако $t \in [a, b]$ постоји потпуно нормална околина $U_t \ni \psi(t)$, те се слика $\psi([a, b])$ може покрити са коначно много потпуно нормалних околлина. У свакој околини U_t , јединствена минимизујућа крива је радијална геодезијска, те ψ задовољава геодезијске једначине. Како то важи за сваку тачку из $[a, b]$, ψ је геодезијска. $\square$

5.7 Комплетност

Псеудо-Риманова многострукост (M, g) је геодезијски комплетна у тачки $p \in M$ ако се свака геодезијска кроз p може бесконачно продужавати. Како је максимална геодезијска за неко $V \in T_p M$ облика $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$, јасно је да је горњи услов еквивалентан са тим да је $T_p M$ домен од $\exp_p$. Тако је M геодезијски комплетна ако и само ако је целокупно TM домен експоненцијалног пресликавања. На пример, отворена подмногострукост $U \subset \mathbb{R}_V^n$ псеудо-еуклидског простора није геодезијски комплетна јер постоје геодезијске које достижу границу за коначно време.

Сваке две различите тачке потпуно нормалне околине могу се повезати минимизујућом геодезијском, што је особина која не мора да важи за произвољне две тачке Риманове многострукости. Међутим, ако је многострукост геодезијски комплетна у једној од тих тачака, имамо наредну леме.

Лема 5.21. *Ако је $p \in M$ тачка повезане Риманове многострукости M таква да је $\exp_p$ дефинисано на целокупном $T_p M$, онда за свако $q \in M$ постоји минимизујућа геодезијска из p у q .*

Доказ. Нека је x тачка (компактне) геодезијске сфере $S_\epsilon(p)$ у којој непрекидна функција $S_\epsilon(p) \ni s \mapsto d(s, q)$ достиже минимум. Тада је $x = \exp_p(\epsilon V)$ за неко јединично $V \in T_p M$ и можемо посматрати геодезијску γ_V која је за свако $t \in \mathbb{R}$ дефинисана са $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$. Свака допуштена крива из p у q мора да прође кроз $S_\epsilon(p)$, те је

$$r = d(p, q) = \min_{s \in S_\epsilon(p)} (d(p, s) + d(s, q)) = \epsilon + \min_{s \in S_\epsilon(p)} d(s, q) = \epsilon + d(x, q),$$

одакле следи $d(x, q) = r - \epsilon$. Скуп $I = \{t \in [\epsilon, r] : d(\gamma_V(t), q) = r - t\}$ је непразан (због $\epsilon \in I$), затворен и ограничен, те достиже максимум $t_0 \in I$. За $y = \gamma_V(t_0)$ постоји тачка z геодезијске сфере $S_\delta(y)$ за $0 < \delta < r - t_0$ у којој функција $S_\delta(y) \ni s \mapsto d(s, q)$ достиже минимум. Добијамо $d(z, q) = r - t_0 - \delta$, одакле имамо

$$d(p, z) \geq d(p, q) - d(z, q) = r - (r - t_0 - \delta) = t_0 + \delta = d(p, y) + d(y, q),$$

те је $d(p, z) = d(p, y) + d(y, q)$, што значи да минимизујућа крива из p у z пролази кроз y . Како је минимизујућа крива по Теорему 5.20 геодезијска, то је $z = \exp_p((t_0 + \delta)V)$ и зато $t_0 + \delta \in I$, што је немогуће, осим ако је $t_0 = r$. Тако добијамо $\gamma_V(r) = q$, те је γ_V минимизујућа геодезијска из p у q . $\square$

Нека је (M, g) повезана Риманова многострукост. По Теорему 4.20, M са Римановим растојањем чини метрички простор чија је метричка топологија једнака топологији од M . Природно се поставља питање да ли је M комплетна као метрички простор.

Претпоставимо да је $K \subseteq M$ затворен и ограничен подскуп метричког простора (M, d) . Ако је M геодезијски комплетна у тачки $p \in M$, по Леми 5.21 за свако $q \in M$ постоји минимизујућа геодезијска из p у q , те се ограничен скуп K налази у некој довољно великој геодезијској кугли $B_r(p)$. Дакле, постоји $r > 0$ такво да је $K \subset \exp_p(\overline{B_r(0_p)})$, а како је затворен подскуп компактног скупа компактан, следи да је K компактан. Скуп тачака Кошијевог⁷ низа је ограничен, те је његово затворење компактно, што значи да Кошијев низ има конвергентан подниз и самим тим је конвергентан.

На овај начин смо доказали да ако је M геодезијски комплетна, онда је M комплетна као метрички простор. Међутим, важи и обрат, што значи да су геодезијска

⁷Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар

комплетност и метричка комплетност еквивалентни појмови, што је познато као Хопф⁸–Ринов⁹ теорема из 1931. године [71].

Теорема 5.22. *Повезана Риманова мнојострукост је геодезијски комплетна ако и само ако је метричка простор.*

Доказ. Нека је $p \in M$ и $V \in T_p M$ јединични вектор. Посматрамо максималну геодезијску $\gamma_V : I \rightarrow M$. Захваљујући Теорему 5.11 интервал I је отворен. Нека је $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b = \sup I < \infty$. Како је $d(\gamma_V(t_i), \gamma_V(t_j)) \leq |t_i - t_j|$, то је $\{\gamma_V(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ у M , те уз претпоставку да је M комплетна имамо тачку $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_V(t_n) \in M$. Постоји $\epsilon > 0$ такво да је $B_{2\epsilon}(q)$ геодезијска кугла. Изаберимо $a \in \mathbb{R}$ такво да је $0 < b - a < \epsilon$, те за $W = \gamma'_V(a)$ поставимо геодезијску γ_W . Тада је $\gamma_W(t) = \gamma_V(a + t)$, те је γ_V дефинисано за $a + \epsilon > b$, што је контрадикција. Зато је интервал I затворен, одакле следи $I = \mathbb{R}$, што доказује да је M геодезијски комплетно у тачки p . Како је p било произвољно, следи да је M геодезијски комплетна. $\square$

5.8 Задаци

Задатак 5.1. Нека је (M, g) Риманова многострукост, а $P, Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ паралелна тензорска поља. Ако је $T \in \mathfrak{T}_4^0(M)$ дефинисано са $T(X, Y, Z, W) = P(X, Y)Q(Z, W)$ за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, доказати да је и T паралелно.

Задатак 5.2. На $\mathbb{R}^3$ са уобичајеном еуклидском метриком уводимо повезаност ∇ која је у стандардним координатама дата са $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$ и $\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$, док су сви остали Кристофелови симболи једнаки нули. Да ли је ∇ компатибилна са еуклидском метриком? Одредити геодезијске у односу на ∇ . Да ли је ∇ Леви-Чивита повезаност?

Задатак 5.3. Направити (Белтрами-Клајнов) модел хиперболичког простора користећи централну пројекцију $s: \mathbf{H}_r^n \rightarrow \mathbf{K}_r^n$ која тачку $P \in \mathbf{H}_r^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ шаље у продор праве OP кроз хиперраван $x_0 = r$. Показати да је s дифеоморфизам и израчунати индуковану метрику у природним координатама од $\mathbf{K}_r^n$.

Задатак 5.4. Одредити геодезијске у Белтрами-Клајновом диск моделу (M, g) , где је $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

⁸Heinz Hopf (1894–1971), немачки математичар

⁹Willi Ludwig August Rinow (1907–1979), немачки математичар

КРИВИНА

6.1 Тензор кривине

Важно питање псеудо-Риманове геометрије је да ли постоје локалне инваријанте које се чувају изометријама. Неке корисне структуре у диференцијалној геометрији немају локалне инваријанте. На пример, свако свуда ненула векторско поље може се локално записати као парцијални извод, те су сва она локално еквивалентна. Такође, Риманове 1-многострукости су све локално изометричне са $\mathbb{R}$. Међутим, сфера $\mathbb{S}^2$ и раван $\mathbb{R}^2$ нису локално изометрични, што видимо у наредном примеру.

Пример 6.1. Ако на сфери $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ без затвореног скупа $\{(x, y, z) : x \leq 0, y = 0\}$ уведемо сферне координате са $x = \sin \varphi \cos \theta$, $y = \sin \varphi \sin \theta$, $z = \cos \varphi$, за инклинацију $0 < \varphi < \pi$ и азимут $-\pi < \theta < \pi$, њена метрика наслеђена из $\mathbb{R}^3$ је

$$\dot{g} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2.$$

Рачун за Кристофелове симболе Леви-Чивита повезаности доноси

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = -\sin \varphi \cos \varphi,$$

одакле се види да су меридијани $\theta = \operatorname{Const}$ геодезијске на сфери, јер је очигледно да криве облика $\gamma(t) = (t, \theta)$ задовољавају геодезијске једначине. Како за коваријантне изводе координатног векторског поља ∂_{φ} важи

$$\nabla_{\partial_{\varphi}} \partial_{\varphi} = 0, \quad \nabla_{\partial_{\theta}} \partial_{\varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \partial_{\theta},$$

то је оно паралелно дуж сваког меридијана, али и дуж екватора ($\varphi = \pi/2$). Посматрајмо тачку p са координатама $(\varphi, \theta) = (\pi/2, 0)$ и вектор $(\partial_{\varphi})_p$. Ако постоји паралелно продужење тог вектора на неку околину тачке p то једино може бити ∂_{φ} (паралелно померање дуж екватора, а затим дуж одговарајућег меридијана), али $\nabla \partial_{\varphi} \neq 0$. У еуклидском простору, сваки тангентни вектор има паралелно продужење на цео простор, што не важи за сферу, те сфера и раван нису локално изометрични. $\triangle$

За псеудо-Риманову 2-многострукост (M, g) постоји очигледан покушај да задати вектор $Z_p \in T_p M$ продужимо на паралелно векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(M)$. У локалним координатама (x_1, x_2) неке карте центриране у p можемо поставити паралелно векторско поље дуж x_1 -осе, а онда добијене векторе паралелно померити дуж координатних линија које чувају x_1 координату. Тако конструисано векторско поље Z је паралелно дуж сваке x_2 -координатне линије, као и дуж x_1 -осе. Поставља се питање да ли је $\nabla_{\partial_1} Z = 0$, односно да ли је Z паралелно дуж x_1 -координатних линија које нису сама x_1 -оса. Услов $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} Z = 0$ одређује јединствено паралелно померање $\nabla_{\partial_1} Z$ дуж x_2 -координатних линија за неки почетни вектор, али како се $\nabla_{\partial_1} Z$ поништава

у тачкама $x_2 = 0$, то следи $\nabla_{\partial_1} Z = 0$. Са друге стране је $\nabla_{\partial_2} Z = 0$, те и $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} Z = 0$, што решава проблем уколико ∇_{∂_1} и ∇_{∂_2} комутирају.

Директан рачун даје $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_2} (\sum_i \partial_1 Z^i \partial_i) = \sum_i \partial_2 \partial_1 Z^i \partial_i$, за стандардну повезаност $\nabla = D$ у $\mathbb{R}^2$, те како парцијални изводи комутирају следи $D_{\partial_2} D_{\partial_1} Z = D_{\partial_1} D_{\partial_2} Z$. Међутим, то не важи у општем случају, јер та некомутативност коваријантних извода омогућава локално разликовање сфере од равни из Примера 6.1. Да бисмо изразили некомутативност на координатно инваријантан начин можемо посматрати $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$, где у $\mathbb{R}^n$ имамо $D_X D_Y Z = D_X (\sum_i Y Z^i \partial_i) = \sum_i X Y Z^i \partial_i$, одакле добијамо да важи $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = \sum_i (X Y - Y X) Z^i \partial_i = D_{[X, Y]} Z$.

Претходна анализа нас мотивише да на псеудо-Римановој многострукости (M, g) дефинишемо **оператор кривине** $\mathcal{R}: \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ са

$$\mathcal{R}(X, Y)(Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, где је ∇ одговарајућа Леви-Чивита повезаност. Другим речима, оператор кривине је пресликавање $\mathcal{R}(X, Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ задато као разлика комутатора набли и набле комутатора, $\mathcal{R}(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$. Напоменимо да неки аутори дефинишу оператор кривине са супротним знаком, што је разлика која суштински није битна, али свакако треба бити пажљив.

Из саме дефиниције очигледна је антисиметрија

$$\mathcal{R}(Y, X) = -\mathcal{R}(X, Y), \quad (6.1)$$

као и њен специјални случај $\mathcal{R}(X, X) = 0$. Повезаност и комутатор су $\mathbb{R}$ -билинеарни, те је такав и оператор кривине $\mathcal{R}$, одакле следи адитивност по сва три аргумента. Штавише, $\mathcal{R}$ је $\mathfrak{X}(M)$ -мултилинеарно. За $\mathfrak{X}(M)$ -линеарност по првом аргументу имамо,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(fX, Y) &= [\nabla_{fX}, \nabla_Y] - \nabla_{[fX, Y]} = [f\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{f[X, Y] - (Yf)X} \\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y] - (Yf)\nabla_X - f\nabla_{[X, Y]} + (Yf)\nabla_X = f\mathcal{R}(X, Y), \end{aligned}$$

што због (6.1) ради и по другом аргументу. За трећи аргумент користимо особине (5.6) и (5.5), одакле добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} (fZ) \\ &= \nabla_X (f\nabla_Y Z + (Yf)Z) - \nabla_Y (f\nabla_X Z + (Xf)Z) - (f\nabla_{[X, Y]} Z + ([X, Y]f)Z) \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + (XYf)Z - f\nabla_Y \nabla_X Z \\ &\quad - (Yf)\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y Z - (YXf)Z - f\nabla_{[X, Y]} Z - ([X, Y]f)Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X, Y]} Z = f\mathcal{R}(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Дакле, оператор кривине $\mathcal{R}: \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ је $\mathfrak{X}(M)$ -мултилинеаран, те га уобичајено третирамо као тензорско поље $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}_3^1(M)$. Вишеструком применом симетричности повезаности (5.9) добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X [Y, Z] + \nabla_Y [Z, X] + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]], \end{aligned}$$

те из Јакобијевог идентитета (2.7) следи

$$\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0, \quad (6.2)$$

што је формула позната као **Бјанкијев идентитет**¹.

¹Luigi Bianchi (1856–1928), италијански математичар

Теорема 6.1. За оператор кривине $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ усеудо-Риманове мноїости M , формуле (6.1) и (6.2) важе за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

У локалним координатама имамо $\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l \mathcal{R}_{ijk}^l \partial_l$ (видети Пример 3.26), те компоненте оператора кривине можемо изразити преко Кристофелових симбола. Из

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} \partial_k \\ &= \nabla_{\partial_i} \sum_m \Gamma_{jk}^m \partial_m - \nabla_{\partial_j} \sum_m \Gamma_{ik}^m \partial_m \\ &= \sum_m (\partial_i \Gamma_{jk}^m) \partial_m + \sum_m \Gamma_{jk}^m \nabla_{\partial_i} \partial_m - \sum_m (\partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m - \sum_m \Gamma_{ik}^m \nabla_{\partial_j} \partial_m \\ &= \sum_m (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m + \sum_{m,l} (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \partial_l, \end{aligned}$$

добиамо

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l \left((\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l) + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \right) \partial_l,$$

одакле важи

$$\mathcal{R}_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l). \quad (6.3)$$

Спуштањем индекса добијамо **тензор кривине** $R = \mathcal{R}^b \in \mathfrak{T}_4^0(M)$, што је коваријантно тензорско поље

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l$$

са компонентама $R_{ijkl} = \sum_m g_{lm} \mathcal{R}_{ijk}^m$, при чему за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ важи

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$

Из (6.1) директно следи идентитет

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W), \quad (6.4)$$

док као последицу од (6.2) имамо **први Бјанкијев идентитет**,

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0. \quad (6.5)$$

Како је Леви-Чивита повезаност метричка, из (5.8) следи

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) &= Xg(\nabla_Y Z, Z), \\ g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) &= Yg(\nabla_X Z, Z), \\ 2g(\nabla_W Z, Z) &= g(\nabla_W Z, Z) + g(Z, \nabla_W Z) = Wg(Z, Z), \end{aligned}$$

где нас у последњој једнакости занимају случајеви $W \in \{Y, X, [X, Y]\}$. Одавде имамо

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= \frac{1}{2}XYg(Z, Z) - \frac{1}{2}YXg(Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]g(Z, Z) = 0, \end{aligned}$$

те поларизацијом из

$$R(X, Y, Z + W, Z + W) = R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) + R(X, Y, W, W)$$

добиамо

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z). \quad (6.6)$$

Теорема 6.2. За тензор кривине $R \in \mathfrak{T}_4^0(M)$ усеудо-Риманове мнојосірукостіи M , формуле (6.4), (6.6) и (6.5) важе за свако $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Сличне особине можемо извести за потпун коваријантни извод тензора кривине ∇R . Како је

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, V) = & V(R(X, Y, Z, W)) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_V Y, Z, W) \\ & - R(X, Y, \nabla_V Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_V W), \end{aligned}$$

то особине (6.4) и (6.6) одмах дају

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, V) &= -\nabla R(Y, X, Z, W, V), \\ \nabla R(X, Y, Z, W, V) &= -\nabla R(X, Y, W, Z, V). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Са друге стране, из вишеструке примене (6.2) и (6.5)

$$\begin{aligned} & \nabla R(X, Y, Z, W, V) + \nabla R(Y, Z, X, W, V) + \nabla R(Z, X, Y, W, V) \\ &= V(R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W)) \\ & \quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V X, Y)Z + \mathcal{R}(Z, \nabla_V X)Y + \mathcal{R}(Y, Z)\nabla_V X, W) \\ & \quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V Y, Z)X + \mathcal{R}(X, \nabla_V Y)Z + \mathcal{R}(Z, X)\nabla_V Y, W) \\ & \quad - g(\mathcal{R}(\nabla_V Z, X)Y + \mathcal{R}(Y, \nabla_V Z)X + \mathcal{R}(X, Y)\nabla_V Z, W) \\ & \quad - g(\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y, \nabla_V W) = 0, \end{aligned}$$

те добијамо коваријантни извод првог Бјанкијевог идентитета

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) + \nabla R(Y, Z, X, W, V) + \nabla R(Z, X, Y, W, V) = 0. \quad (6.8)$$

Претходни рачуни се могу упростити. Фиксирајмо произвољну тачку $p \in M$ и рачунајмо у нормалним координатама центрираним у p . По Теореме 5.15, имамо $(\nabla_{\partial_i} \partial_j)_p = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) (\partial_k)_p = 0$. Одавде Лема 3.12 даје $R(\nabla_{\partial_m} \partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)(p) = 0$, те добијамо

$$(\nabla R)_{ijklm}(p) = (\nabla_{\partial_m} R_{ijkl})(p) = (\partial_m)_p R_{ijkl}.$$

Зато (6.5) даје $((\nabla R)_{ijklm} + (\nabla R)_{jkilm} + (\nabla R)_{kijlm})(p) = (\partial_m)_p (R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl}) = 0$, што показује да $T_{ijklm} = (\nabla R)_{ijklm} + (\nabla R)_{jkilm} + (\nabla R)_{kijlm}$ дефинише нула тензорско поље $T \in \mathfrak{T}_5^0(M)$. Међутим, $T = 0$ је еквивалентно са идентитетом (6.8).

Компликованије је дефинисати $T \in \mathfrak{T}_5^0(M)$ са $T_{ijklm} = (\nabla R)_{ijklm} + (\nabla R)_{jmkli} + (\nabla R)_{miklj}$. У овом случају користимо (5.8), $(\nabla_{\partial_m} \partial_l)_p = 0$ и $[\partial_i, \partial_j] = 0$ да израчунамо

$$\begin{aligned} (\nabla R)_{ijklm}(p) &= (\partial_m)_p R_{ijkl} = ((\partial_m)g(\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l))(p) \\ &= g(\nabla_{\partial_m}(\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l))(p) + g_p((\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k)_p, (\nabla_{\partial_m} \partial_l)_p) \\ &= g(\nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_l)(p), \end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned} T_{ijklm}(p) &= (\nabla R)_{ijklm}(p) + (\nabla R)_{jmkli}(p) + (\nabla R)_{miklj}(p) \\ &= g((\nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k + \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_m} \partial_k - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_j} \partial_k + \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_m} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_m} \partial_k) \partial_l)(p) \\ &= R(\partial_m, \partial_i, \nabla_{\partial_j} \partial_k, \partial_l)(p) + R(\partial_i, \partial_j, \nabla_{\partial_m} \partial_k, \partial_l)(p) + R(\partial_j, \partial_m, \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_l)(p) = 0. \end{aligned}$$

Ово доказује $T = 0$, што је еквивалентно са наредном формулом, коју зовемо **гпуїи Бјанкијев идентіиїейї**,

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) + \nabla R(Y, V, Z, W, X) + \nabla R(V, X, Z, W, Y) = 0. \quad (6.9)$$

Теорема 6.3. За йоййун коваријантйни извод йтензора кривине $\nabla R \in \mathfrak{T}_5^0(M)$ йсеудо-Риманове мноїосйрукосйи M , формуле (6.7), (6.8) и (6.9) важе за $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(M)$.

Пример 6.2. Други Бјанкијев идентитет се може израчунати директно (без нормалних координата). Ако искористимо (5.8) да бисмо израчунали $\nabla R(X, Y, Z, W, V)$, добијамо

$$\begin{aligned} \nabla R(X, Y, Z, W, V) &= V(g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)) - R(X, Y, Z, \nabla_V W) \\ &\quad - R(X, Y, \nabla_V Z, W) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_V Y, Z, W) \\ &= g(\nabla_V \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_V \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_V \nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ &\quad - g(\nabla_X \nabla_Y \nabla_V Z - \nabla_Y \nabla_X \nabla_V Z - \nabla_{[X, Y]} \nabla_V Z, W) \\ &\quad - g(\nabla_{\nabla_V X} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{\nabla_V X} Z - \nabla_{[\nabla_V X, Y]} Z, W) \\ &\quad - g(\nabla_X \nabla_{\nabla_V Y} Z - \nabla_{\nabla_V Y} \nabla_X Z - \nabla_{[X, \nabla_V Y]} Z, W). \end{aligned}$$

То се може записати са

$$\nabla R(X, Y, Z, W, V) = g((\mathcal{T}_1(X, Y, V) + \mathcal{T}_2(X, Y, V) + \mathcal{T}_3(X, Y, V))Z, W),$$

где су $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ дефинисани са

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(X, Y, V) &= \nabla_V \nabla_X \nabla_Y - \nabla_V \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y \nabla_V + \nabla_Y \nabla_X \nabla_V = [\nabla_V, [\nabla_X, \nabla_Y]]; \\ \mathcal{T}_2(X, Y, V) &= \nabla_Y \nabla_{\nabla_V X} - \nabla_{\nabla_V X} \nabla_Y + \nabla_{\nabla_V Y} \nabla_X - \nabla_X \nabla_{\nabla_V Y} + \nabla_{[X, Y]} \nabla_V - \nabla_V \nabla_{[X, Y]} \\ &= [\nabla_Y, \nabla_{\nabla_V X}] + [\nabla_{\nabla_V Y}, \nabla_X] + [\nabla_{[X, Y]}, \nabla_V]; \\ \mathcal{T}_3(X, Y, V) &= \nabla_{[X, \nabla_V Y]} + \nabla_{[\nabla_V X, Y]}. \end{aligned}$$

Јакобијев идентитет из Леме А.31 примењен на алгебру свих линеарних ендоморфизама $\text{End}(\mathfrak{X}(M))$ модула $\mathfrak{X}(M)$ над прстеном $\mathfrak{F}(M)$, даје

$$\mathcal{T}_1(X, Y, V) + \mathcal{T}_1(Y, V, X) + \mathcal{T}_1(V, X, Y) = [\nabla_V, [\nabla_X, \nabla_Y]] + [\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_V]] + [\nabla_Y, [\nabla_V, \nabla_X]] = 0.$$

Из једнакости (5.9) имамо

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2(X, Y, V) + \mathcal{T}_2(Y, V, X) + \mathcal{T}_2(V, X, Y) \\ = [\nabla_{\nabla_V Y} - \nabla_Y \nabla_V - [V, Y], \nabla_X] + [\nabla_{\nabla_V X} - \nabla_X \nabla_V - [X, V], \nabla_Y] + [\nabla_{\nabla_V X} - \nabla_X \nabla_V - [X, V], \nabla_V] = 0. \end{aligned}$$

Једнакост (5.9) и Јакобијев идентитет (2.7) доносе

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3(X, Y, V) + \mathcal{T}_3(Y, V, X) + \mathcal{T}_3(V, X, Y) \\ = \nabla_{[X, \nabla_V Y]} + \nabla_{[\nabla_V X, Y]} + \nabla_{[Y, \nabla_X V]} + \nabla_{[\nabla_X Y, V]} + \nabla_{[V, \nabla_Y X]} + \nabla_{[\nabla_Y V, X]} \\ = \nabla_{[X, \nabla_V Y - \nabla_Y V]} + \nabla_{[Y, \nabla_X V - \nabla_V X]} + \nabla_{[V, \nabla_Y X - \nabla_X Y]} \\ = \nabla_{[X, [V, Y]] + [Y, [X, V]] + [V, [Y, X]]} = 0. \end{aligned}$$

Коначно, обједињавањем претходних резултата добијамо идентитет (6.9). $\triangle$

Нека је $f: M \rightarrow N$ изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Како се Леви-Чивита повезаност чува у смислу формуле (5.12), то се чува и оператор кривине коју она индукује,

$$f_*(\mathcal{R}(X, Y)Z) = \mathcal{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z.$$

Веома је важно разумети понашање изометрија и локалних изометрија. Разни концепти псеудо-Риманове геометрије које смо до сада дефинисали се изометријама чувају у одговарајућем смислу. Како су ти концепти конструисани из метричког тензора употребом алата теорије многострукости, те како изометрије чувају и тензор и те алате, природно је очекивати да су у питању инваријанте изометрије.

Пример 6.3. Нека је $f: M \rightarrow N$ локална изометрија између псеудо-Риманових многострукости. Коваријантни извод дуж криве γ се чува у смислу да је

$$T_{\gamma(t)}f \frac{\nabla V}{dt} = \frac{\nabla f_* V}{dt}$$

за $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ где је $(f_* V)(t) = T_{\gamma(t)}f(V(t))$ за свако t . Због тога се паралелно померање дуж криве чува у смислу да је

$$T_{\gamma(b)}f \circ P_\gamma = P_{f \circ \gamma} \circ T_{\gamma(a)}f,$$

где $P_\gamma = P_a^b$ означава паралелно померање из $\gamma(a)$ у $\gamma(b)$ дуж γ у M , а $P_{f \circ \gamma}$ означава паралелно померање из $f(\gamma(a))$ у $f(\gamma(b))$ дуж $f \circ \gamma$ у N . Зато, ако је γ геодезијска у M , онда је $f \circ \gamma$ геодезијска у N . Прецизније, геодезијске се чувају у смислу да је

$$f \circ \gamma_V = \gamma_{T_p f(V)}, \quad (6.10)$$

кад год су обе стране дефинисане (домен за $\gamma_{T_p f(V)}$ може бити већи од домена за γ_V), где је $\gamma_V(0) = p$ и $\gamma'_V(0) = V$. Експоненцијално пресликавање се чува се

$$f \circ \exp_p = \exp_{f(p)} \circ T_p f, \quad (6.11)$$

кад год су обе стране дефинисане. $\triangle$

6.2 Алгебарски тензор кривине

У теорији псеудо-Риманових многострукости, често је згодно радити у чисто алгебарском окружењу. Рестриковањем псеудо-Риманове многострукости (M, g) на произвољну тачку $p \in M$ добијамо векторски простор $\mathcal{V} = T_p M$ са скаларним производом g_p , а природни тензори доводе нас до концепта алгебарског тензора кривине. За тензор $R \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ на квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је **алгебарски тензор кривине** ако за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ задовољава симетрије

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W), \quad (6.4 \text{ поновљено})$$

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z), \quad (6.6 \text{ поновљено})$$

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0. \quad (6.5 \text{ поновљено})$$

Важно је напоменути да се ова дефиниција лепо слаже са Теоремом 6.2. Тензор кривине у свакој тачки псеудо-Риманове многострукости је алгебарски тензор кривине. Због тога, сваки резултат који важи за алгебарски тензор кривине може се пренети на тензор кривине псеудо-Риманове многострукости.

Ако применимо (6.6), затим (6.5) и коначно (6.4) и (6.6), имамо

$$\begin{aligned} & 2R(X, Y, Z, W) - 2R(Z, W, X, Y) \\ &= R(X, Y, Z, W) - R(X, Y, W, Z) - R(Z, W, X, Y) + R(Z, W, Y, X) \\ &= (-R(Y, Z, X, W) - R(Z, X, Y, W)) - (-R(Y, W, X, Z) - R(W, X, Y, Z)) \\ &\quad - (-R(W, X, Z, Y) - R(X, Z, W, Y)) + (-R(W, Y, Z, X) - R(Y, Z, W, X)) \\ &= -R(Y, Z, X, W) - R(Y, Z, W, X) - R(Z, X, Y, W) + R(X, Z, W, Y) \\ &\quad + R(Y, W, X, Z) - R(W, Y, Z, X) + R(W, X, Y, Z) + R(W, X, Z, Y) = 0, \end{aligned}$$

одакле добијемо симетрију по паровима

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \quad (6.12)$$

која важи за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ и која се последично преноси и за тензор кривине на многострукости. Имајући ово у виду, једнакост (6.6) из дефиниције алгебарског тензора кривине можемо заменити са (6.12), јер (6.6) је директна последица (6.4) и (6.12).

Нека је R алгебарски тензор кривине на квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . Ради једноставнијег изражавања, особине скаларног производа преносимо на сам тензор. Тако можемо рећи да је R Риманов или позитивно дефинитан (ако је $\text{Ind } g = 0$), дефинитан ($\text{Ind } g = 0$ или $\text{Ind } g = n$), недефинитан ($1 \leq \text{Ind } g \leq n - 1$), Лоренцов ($\text{Ind } g = 1$), n -димензион ($\dim \mathcal{V} = n$), и тако даље.

Пример 6.4. Основни пример алгебарског тензора кривине на квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$ је тензор $R^1 \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ дат са

$$R^1(X, Y, Z, W) = g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W) \quad (6.13)$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Лако је видети да R^1 задовољава $\mathbb{Z}_2$ симетрије (6.4) и (6.6), као и први Бјанкијев идентитет (6.5). $\triangle$

Нека је $J: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ линеарни оператор на квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$. За J кажемо да је **самоадјунгован** или **симетричан** ако $g(JX, Y) = g(X, JY)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Сасвим слично, J је **косоадјунгован** или **кососиметричан** ако $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Самоадјунговани и косоадјунговани ендоморфизми нам омогућавају да добијемо даље примере алгебарских тензора кривине.

Пример 6.5. Самоадјунгован ендоморфизам $J: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X, Y, Z, W) = g(JX, W)g(JY, Z) - g(JX, Z)g(JY, W),$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. То се може проверити директно. Приметимо да је R^1 специјални случај за $J = 1 \cdot 1$. $\triangle$

Пример 6.6. Косоадјунгован ендоморфизам $J: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$ генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ дефинисан са

$$R^J(X, Y, Z, W) = g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) + 2g(JX, Y)g(JZ, W), \quad (6.14)$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$, што се лако да проверити. $\triangle$

Пример 6.7. Нека су $R_1, \dots, R_k \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ алгебарски тензори кривине на квадратном простору $(\mathcal{V}, g)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i R_i \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$$

такође алгебарски тензор кривине, јер очигледно задовољава једнакости (6.4), (6.6) и (6.5). На овај начин, нови алгебарски тензор кривине може се направити као линеарна комбинација постојећих тензора. Посебно, kR^1 је алгебарски тензор кривине за свако $k \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Дизањем последњег индекса имамо **афини ојератор кривине** $\mathcal{R} = R^\sharp \in \mathfrak{T}_3^1(\mathcal{V})$, дефинисан са

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W),$$

за свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Намерно смо кроз рестрикцију задржали нотацију коришћену на многострукости, R за тензор кривине и $\mathcal{R}$ за оператор кривине. То нам омогућава да усвојимо и преузмемо глобалну терминологију.

Чест начин да се изрази алгебарски тензор кривине R је преко компоненти тензора кривине $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ у односу на неку базу $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ у $\mathcal{V}$. Испоставља се да нам је потребно само $n^2(n^2 - 1)/12$ компоненти, што поручује наредна теорема (видети Вајнберг² [123, стр.142–143]).

Теорема 6.4. *Димензија простора алгебарских тензора кривине на квадратном простору димензије n је $n^2(n^2 - 1)/12$.*

Доказ. Размотримо компоненте R_{ijkl} као уређене парове индекса (i, j) и (k, l) . Како важи (6.4) имамо $\binom{n}{2}$ независних избора за први пар, а из (6.6) тај исти број за други пар. Међутим, симетрија по паровима (6.12) додатно повезује ове изборе, што значи да имамо $\binom{n}{2} + \dots + 2 + 1$ различитих могућности. Први Бјанкијев идентитет (6.5) уводи $\binom{n}{4}$ додатних веза међу компонентама, на пример то су оне са $i < j < k < l$. Зато је број независних компоненти R_{ijkl} једнак

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} + \dots + 2 + 1 - \binom{n}{4} &= \frac{1}{2} \binom{n}{2} \left(\binom{n}{2} + 1 \right) - \binom{n}{4} \\ &= \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

□

Јакобијев оператор и сродни оператори играју значајне улоге у нашој теорији. **Поларизован Јакобијев ојерајтор** је линеарно пресликавање $\mathcal{J}: \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ дефинисано са

$$\mathcal{J}(X, Y)(Z) = \frac{1}{2} (\mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Z, Y)X), \quad (6.15)$$

за све $X, Y, Z \in \mathcal{V}$. **Јакобијев ојерајтор** за $X \in \mathcal{V}$ је линеарно пресликавање $\mathcal{J}_X: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ дефинисано са $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}(X, X)$, а често га записујемо са

$$\mathcal{J}_X(Y) = \mathcal{R}(Y, X)X. \quad (6.16)$$

Како (6.6) повлачи $g(\mathcal{J}_X(Y), X) = R(Y, X, X, X) = 0$ имамо $\mathcal{J}_X(Y) \perp X$, те је $X^\perp$ кодомен Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$. У случају дефинитног X ($\varepsilon_X \neq 0$), ортогонал $X^\perp$ је недегенерисан потпростор у $\mathcal{V}$, док (6.4) даје $\mathcal{J}_X(X) = \mathcal{R}(X, X)X = 0$. Зато је Јакобијев оператор за дефинитно $X \in \mathcal{V}$ потпуно одређен својом рестрикцијом

$$\tilde{\mathcal{J}}_X = \mathcal{J}_X|_{X^\perp}: X^\perp \rightarrow X^\perp,$$

коју зовемо **редукован Јакобијев ојерајтор**.

Из (6.12), (6.4) и (6.6) имамо $R(Y, X, X, Z) = R(Z, X, X, Y)$, те је Јакобијев оператор самоадјунгован,

$$g(\mathcal{J}_X(Y), Z) = g(\mathcal{J}_X(Z), Y).$$

Слично, из (6.4) и (6.6) имамо $R(Y, X, X, Y) = R(X, Y, Y, X)$, одакле добијамо **комјатабилност** Јакобијевих оператора,

$$g(\mathcal{J}_X(Y), Y) = g(\mathcal{J}_Y(X), X). \quad (6.17)$$

Дакле, Јакобијеви оператори су самоадјунговани ендоморфизми на $\mathcal{V}$ за које важи компатибилност (6.17).

Нека је $(E_1, \dots, E_n)$ нека ортонормирана база квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . За сваки вектор $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ имамо $\mathcal{J}_X(E_j) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{J}_X(E_j), E_i) E_i$, те можемо израчунати улазе матрице од $\mathcal{J}_X$ у односу на дату базу,

$$(\mathcal{J}_X)_{ij} = \varepsilon_{E_i} g(\mathcal{J}_X(E_j), E_i) = \varepsilon_{E_i} R(E_j, X, X, E_i) = \varepsilon_{E_i} \sum_{p,q=1}^n R_{jpqi} x_p x_q,$$

²Steven Weinberg (1933), амерички теоријски физичар

одакле се јасно види да су они хомогени полиноми степена 2 (квадратне форме) са n променљивих $x_1, \dots, x_n$. Наравно, то такође важи и у односу на базе које нису ортонормиране, јер је $M^{-1} \mathcal{J}_X M$ матрица од $\mathcal{J}_X$ у новој бази, где је M матрица преласка.

Лема 6.5. Улази матрице од $\mathcal{J}_X$ су хомогени полиноми степена 2 у коефицијентима од X .

Иако смо Јакобијев оператор дефинисали користећи квадратни простор $\mathcal{V}$, важно је напоменути да увек можемо узети $\mathcal{V} = T_p M$, где је p нека тачка псеудо-Риманове многострукости M . Такође, можемо продужити појам Јакобијевог оператора на целокупно $\mathfrak{X}(M)$ (или барем на тангентно раслојење TM) и задржати нашу терминологију.

6.3 Секциона кривина

Тензор кривине R псеудо-Риманове многострукости (M, g) је прилично компликован, те уводимо често коришћену једноставнију величину коју зовемо секциона кривина. **Тангентна равна** σ на M у тачки $p \in M$ је дводимензиони потпростор тангентног простора $T_p M$. **Секциона кривина** κ недегенерисане тангентне равни $\sigma = \text{Span}\{X, Y\}$ у $T_p M$ је дата са

$$\kappa(\sigma) = \kappa(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2}.$$

Приметимо да је именилац $\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2 = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(Y, X)$ заправо детерминанта Грамове матрице за $g|_\sigma$ у односу на базу $X, Y \in T_p M$ у $\sigma = \text{Span}\{X, Y\}$. Како по дефиницији посматрамо само недегенерисане σ , наш именилац по Лему 4.1 није нула. Штавише, за Риманове многострукости он представља квадрат површине паралелограма одређеног паром вектора $X, Y \in T_p M$.

Потребно је проверити да вредност $\kappa(X, Y)$ зависи само од (недегенерисане) равни разапнуте векторима X и Y . Нека $X_1 = \alpha X + \beta Y$ и $Y_1 = \gamma X + \delta Y$ чине другу базу у σ . Промена базе за билинеарну форму g даје

$$\begin{pmatrix} g(X_1, X_1) & g(X_1, Y_1) \\ g(Y_1, X_1) & g(Y_1, Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(X, X) & g(X, Y) \\ g(Y, X) & g(Y, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

те је зато $\varepsilon_{X_1} \varepsilon_{Y_1} - (g(X_1, Y_1))^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2)$. Са друге стране, користимо симетрије од R , те добијамо

$$\begin{aligned} R(X_1, Y_1, Y_1, X_1) &= R(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y, Y_1, X_1) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma) R(X, Y, \gamma X + \delta Y, \alpha X + \beta Y), \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 R(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Како детерминанта матрице преласка није нула имамо $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, одакле добијамо $\kappa(X_1, Y_1) = \kappa(X, Y)$, што значи да је секциона кривина добро дефинисана.

Напоменимо да за дводимензиону Риманову многострукост, постоји само једна секциона кривина у свакој тачки, што је добро позната Гаусова кривина. Иако секциона кривина делује једноставније од тензора кривине R , она ипак садржи комплетну информацију у алгебарском смислу.

Најпре видимо да оператор кривине зависи само од Јакобијевих оператора, јер користећи (6.1) и (6.2) имамо

$$\begin{aligned}
 3\mathcal{R}(X, Y)Z &= \mathcal{R}(X, Y)Z + (-\mathcal{R}(Y, X)Z) + (-\mathcal{R}(Y, Z)X - \mathcal{R}(Z, X)Y) \\
 &= (\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(X, Z)Y) - (\mathcal{R}(Y, X)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X) \\
 &= \mathcal{R}(X, Y+Z)(Y+Z) - \mathcal{R}(X, Y)Y - \mathcal{R}(X, Z)Z \\
 &\quad - \mathcal{R}(Y, X+Z)(X+Z) + \mathcal{R}(Y, X)X + \mathcal{R}(Y, Z)Z \\
 &= \mathcal{J}_{Y+Z}X - \mathcal{J}_YX - \mathcal{J}_ZX - \mathcal{J}_{X+Z}Y + \mathcal{J}_XY + \mathcal{J}_ZY.
 \end{aligned}$$

Како је $R(W, Z, Y, X) = R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)$, то је

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3}g((\mathcal{J}_{Y+Z} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_Z)W - (\mathcal{J}_{Y+W} - \mathcal{J}_Y - \mathcal{J}_W)Z, X), \quad (6.18)$$

што показује да Јакобијеви оператори у потпуности одређују тензор кривине.

Такође, тензор кривине се да изразити само преко вредности $\mu(X, Y) = R(X, Y, Y, X)$. Како из поларизације

$$2R(Y, X, X, W) = R(Y+W, X, X, Y+W) - R(Y, X, X, Y) - R(W, X, X, W)$$

следи

$$2g(\mathcal{J}_XY, W) = \mu(Y+W, X) - \mu(Y, X) - \mu(W, X),$$

то се $R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W)$ може расписати помоћу 18 чланова

$$\begin{aligned}
 6R(X, Y, Z, W) &= \mu(X+W, Y+Z) - \mu(X, Y+Z) - \mu(W, Y+Z) \\
 &\quad - \mu(X+W, Y) + \mu(X, Y) + \mu(W, Y) \\
 &\quad - \mu(X+W, Z) + \mu(X, Z) + \mu(W, Z) \\
 &\quad - \mu(Y+W, X+Z) + \mu(Y, X+Z) + \mu(W, X+Z) \\
 &\quad + \mu(Y+W, X) - \mu(Y, X) - \mu(W, X) \\
 &\quad + \mu(Y+W, Z) - \mu(Y, Z) - \mu(W, Z),
 \end{aligned}$$

где се 4 члана поништавају у паровима за коначан резултат,

$$\begin{aligned}
 6R(X, Y, Z, W) &= \mu(X+W, Y+Z) - \mu(X, Y+Z) - \mu(W, Y+Z) \\
 &\quad - \mu(X+W, Y) + \mu(W, Y) - \mu(X+W, Z) + \mu(X, Z) \\
 &\quad - \mu(Y+W, X+Z) + \mu(Y, X+Z) + \mu(W, X+Z) \\
 &\quad + \mu(Y+W, X) - \mu(W, X) + \mu(Y+W, Z) - \mu(Y, Z).
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Алтернативно, можемо израчунати

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} R(X+sW, Y+tZ, Y+tZ, X+sW) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} (R(X, Y+tZ, Y+tZ, W) + R(W, Y+tZ, Y+tZ, X) + 2sR(W, Y+tZ, Y+tZ, W)) \\
 &= 2R(X, Y+tZ, Y+tZ, W),
 \end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{t=0, s=0} R(X+sW, Y+tZ, Y+tZ, X+sW) \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} (R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, Y, W) + 2tR(X, Z, Z, W)) \\
 &= 2(R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, Y, W)),
 \end{aligned}$$

те користећи неке од симетрија изражавамо R преко μ на другачији начин,

$$\begin{aligned} 6R(X, Y, Z, W) &= 2(R(X, Y, Z, W) + (-R(X, Y, W, Z)) + (-R(Y, Z, X, W) - R(Z, X, Y, W))) \\ &= 2(R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, Y, W)) - 2(R(X, Y, W, Z) + R(X, W, Y, Z)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=0, t=0} (R(X + sW, Y + tZ, Y + tZ, X + sW) - R(X + sZ, Y + tW, Y + tW, X + sZ)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=0, t=0} (\mu(X + sW, Y + tZ) - \mu(X + sZ, Y + tW)), \end{aligned}$$

одакле је

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=0, t=0} (\mu(X + sW, Y + tZ) - \mu(X + sZ, Y + tW)), \quad (6.20)$$

што је познато из Ли [79, Пропозиција 13.27].

Овим смо, на два начина, показали да свеукупне вредности за μ у потпуности одређују тензор кривине. У случају недегенерисане равни $\text{Span}\{X, Y\}$, њена секциона кривина одређује $\mu(X, Y) = R(X, Y, Y, X) = (\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2) \kappa(X, Y)$. Међутим, вредности μ у дегенерисаном случају $\varepsilon_X \varepsilon_Y = (g(X, Y))^2$ следе из непрекидности.

Дегенерисана раван σ садржи изотропан вектор N , иначе би била недегенерисана као дефинитна. Ако је $\sigma = \text{Span}\{N, X\}$, онда $\varepsilon_N = 0$ повлачи $g(N, X) = 0$. Постоји вектор $Z \in \mathcal{V}$ такав да је $g(N, Z) \neq 0$, те зато $\varepsilon_N \varepsilon_{X+tZ} - (g(N, X+tZ))^2 = -t^2(g(N, Z))^2 \neq 0$ за све ненула $t \in \mathbb{R}$. Зато је $\text{Span}\{N, X+tZ\}$ недегенерисана раван за $t \neq 0$, те добијамо

$$\mu(N, X) = \lim_{t \rightarrow 0} (\mu(N, X) + 2tR(N, X, Z, N) + t^2\mu(N, Z)) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(N, X + tZ).$$

Штавише, за $Y = \alpha N + \beta X$, такође добијамо $\mu(Y, X) = \alpha^2 \mu(N, X)$. Дакле, два алгебарска тензора кривине који имају једнаке секционе кривине морају и сами бити једнаки.

Теорема 6.6. *Вредности $\mu(X, Y) = R(X, Y, Y, X)$ у потпуности одређују тензор кривине. Секциона кривина у потпуности одређује тензор кривине у тачкама где је скаларни производ познат.*

Иако секциона кривина изгледа једноставније од тензора кривине, њена важност произлази из чињенице да познавање свих секционих кривина у потпуности одређује тензор кривине (у тачкама где је скаларни производ познат). Ово се односи и на Јакобијеве операторе, који такође садрже исте информације као и тензор кривине. Ови добро познати резултати дају јединственост тензора кривине и чисто су алгебарске природе.

Природно се поставља питање егзистенције тензора кривине за дате Јакобијеве операторе. Овај проблем је посматрао и решио Андрејић³ 2022. године [11, Теорема 1], а ми следимо аргументе из [14], где су исправљени пропусти из оригиналног рада, а сама теорема је уопштена на псеудо-Риманов случај.

Претпоставимо да знамо самоадјунговане ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, који су компатибилни у смислу да важи (6.17). Постоји ли алгебарски тензор кривине R на $(\mathcal{V}, g)$, такав да је $\mathcal{J}_X = \mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$?

Посматрајмо услов $\mathcal{J}_X X = 0$ који важи за све Јакобијеве операторе. Међутим, конструкција $\mathcal{K}_X = \varepsilon_X \mathbb{1}$ даје самоадјунговане ендоморфизме на $\mathcal{V}$ који су компатибилни, $g(\varepsilon_X \mathbb{1} Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y = g(\varepsilon_Y \mathbb{1} X, X)$, али $\varepsilon_X \mathbb{1} X = \varepsilon_X X \neq 0$ важи за дефинитно $X \in \mathcal{V}$. Зато додајемо природан услов да

$$\mathcal{K}_X X = 0, \quad (6.21)$$

³Владаца Андрејић (1978), српски математичар

важи за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$.

Први корак је продужити фамилију $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$. Природно продужење је $\mathcal{K}_0 = 0$, што комплетира фамилију у Римановом окружењу. Међутим, ако је скаларни производ недефинитан, онда је потребно дефинисати $\mathcal{K}_X$ за свако изотропно $X \in \mathcal{V}$.

Нека су $X, Y, X+Y, X-Y \in \mathcal{V}$ дефинитни. Коришћењем (6.17), из

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_{X \pm Y}Z, Z) &= g(\mathcal{K}_Z(X \pm Y), X \pm Y) = g(\mathcal{K}_ZX, X) \pm 2g(\mathcal{K}_ZY, Y) + g(\mathcal{K}_YZ, Y) \\ &= g(\mathcal{K}_XZ, Z) \pm 2g(\mathcal{K}_ZY, Y) + g(\mathcal{K}_YZ, Z), \end{aligned}$$

следи $g(\mathcal{K}_{X+Y}Z, Z) + g(\mathcal{K}_{X-Y}Z, Z) = 2g(\mathcal{K}_XZ, Z) + 2g(\mathcal{K}_YZ, Z)$ за свако дефинитно $Z \in \mathcal{V}$. Поларизација $Z = V + W$ даје $g((\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} - 2\mathcal{K}_X - 2\mathcal{K}_Y)V, W) = 0$, кадгод је $\varepsilon_V \varepsilon_W \varepsilon_{V+W} \neq 0$. Ако је $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ ортонормирана база за $(\mathcal{V}, g)$, онда можемо посматрати ортогоналну базу $(E_1, 2E_2, \dots, nE_n)$, што омогућава $\varepsilon_{iE_i} = i^2 \varepsilon_{E_i} \neq 0$ и $\varepsilon_{iE_i + jE_j} = i^2 \varepsilon_{E_i} + j^2 \varepsilon_{E_j} \neq 0$ за $1 \leq i \neq j \leq n$. Зато

$$\mathcal{K}_{X+Y} + \mathcal{K}_{X-Y} = 2\mathcal{K}_X + 2\mathcal{K}_Y \quad (6.22)$$

важи кадгод је $\varepsilon_X \varepsilon_Y \varepsilon_{X+Y} \varepsilon_{X-Y} \neq 0$.

Једнакост (6.22) нас мотивише да дефинишемо $\mathcal{K}_N$ за свако изотропно $N \in \mathcal{V}$ са

$$2\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X,$$

кадгод је десна страна дефинисана, што одмах показује да је $\mathcal{K}_N$ самоадјунгован ендоморфизам од $\mathcal{V}$. Због (6.22), ако је $\varepsilon_X \varepsilon_Y \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \varepsilon_{N+Y} \varepsilon_{N-Y} \neq 0$, онда имамо

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X) &= (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N+X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) + (\mathcal{K}_{N-X+Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_Y) - 4\mathcal{K}_X \\ &= (\mathcal{K}_{N+X+Y} + \mathcal{K}_{N-X+Y} - 2\mathcal{K}_X) + (\mathcal{K}_{N+X-Y} + \mathcal{K}_{N-X-Y} - 2\mathcal{K}_X) - 4\mathcal{K}_Y \\ &= 2(\mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y), \end{aligned}$$

кадгод је $\varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N+Y} \varepsilon_{N+X-Y} \varepsilon_{N-X} \varepsilon_{N-X-Y} \neq 0$. у супротном, можемо искористити

$$\mathcal{K}_{N+X} + \mathcal{K}_{N-X} - 2\mathcal{K}_X = \mathcal{K}_{N+tX} + \mathcal{K}_{N-tX} - 2\mathcal{K}_{tX} = \mathcal{K}_{N+Y} + \mathcal{K}_{N-Y} - 2\mathcal{K}_Y,$$

где t није корен од

$$\varepsilon_{tX} \varepsilon_{N+tX} \varepsilon_{N-tX} \varepsilon_{N+X+tX} \varepsilon_{N-X+tX} \varepsilon_{N+X-tX} \varepsilon_{N-X-tX} \varepsilon_{N+Y+tX} \varepsilon_{N-Y+tX} \varepsilon_{N+Y-tX} \varepsilon_{N-Y-tX} = 0,$$

што је полиномијална једначина степена 22. То доказује да $\mathcal{K}_N$ не зависи од избора X , те је зато $\mathcal{K}_N$ добро дефинисано.

Ако употребимо $Z \in \mathcal{V}$ које задовољава $\varepsilon_{N+Z} \varepsilon_{N-Z} \varepsilon_Z \neq 0$, онда једнакост

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{K}_N X, X) &= g((\mathcal{K}_{N+Z} + \mathcal{K}_{N-Z} - 2\mathcal{K}_Z)X, X) \\ &= g(\mathcal{K}_X(N+Z), N+Z) + g(\mathcal{K}_X(N-Z), N-Z) - 2g(\mathcal{K}_X Z, Z) = 2g(\mathcal{K}_X N, N) \end{aligned}$$

важи за свако изотропно N и свако дефинитно X , што значи да су ендоморфизми $\mathcal{K}_N$ и $\mathcal{K}_X$ компатибилни. Са тим на уму, видимо да та иста једнакост важи кад су и N и X изотропни. На тај начин, добили смо $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$, док је та продужена фамилија остала компатибилна.

Нека је $N \in \mathcal{V}$ изотропно. За свако $X \in \mathcal{V}$ такво да важи $\varepsilon_X \varepsilon_{N+X} \varepsilon_{N-X} \neq 0$, коришћењем особина (6.21) и (6.17) имамо

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{K}_N N, X) &= g(\mathcal{K}_{N+X}N + \mathcal{K}_{N-X}N - 2\mathcal{K}_X N, X) = -g(\mathcal{K}_{N+X}X, X) + g(\mathcal{K}_{N-X}X, X) - 2g(\mathcal{K}_X X, N) \\ &= -g(\mathcal{K}_X(N+X), N+X) + g(\mathcal{K}_X(N-X), N-X) = 0. \end{aligned}$$

Ако је $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ ортонормирана база за $(\mathcal{V}, g)$, можемо направити ортогоналну базу $(mE_1, mE_2, \dots, mE_n)$, где је $m > \max_{1 \leq i \leq n} |2g(N, E_i)|$, да бисмо омогућили $\varepsilon_{mE_i} \neq 0$ и $\varepsilon_{N \pm mE_i} \neq 0$ за $1 \leq i \leq n$, што доноси $\mathcal{K}_N N = 0$.

Други корак посматра компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизма $\mathcal{K}_X$ за свако $X \in \mathcal{V}$ тако да важи $\mathcal{K}_X X = 0$. За све $X, Y \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$ имамо

$$g(\mathcal{K}_{tX}Y, Y) = g(\mathcal{K}_Y tX, tX) = t^2 g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(t^2 \mathcal{K}_X Y, Y),$$

где поларизација $Y = V + W$ даје $g(\mathcal{K}_{tX}V, W) = g(t^2 \mathcal{K}_X V, W)$ for $V, W \in \mathcal{V}$, те како је g недегенерисано, следи $\mathcal{K}_{tX} = t^2 \mathcal{K}_X$, што је природно својство Јакобијевих оператора.

За све $X, Y, Z \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$, коришћењем компатибилности имамо

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_{X+tY}Z, Z) &= g(\mathcal{K}_Z(X+tY), X+tY) = g(\mathcal{K}_Z X, X) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Z Y, Y) \\ &= g(\mathcal{K}_X Z, Z) + 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) + t^2 g(\mathcal{K}_Y Z, Z), \end{aligned}$$

ШТО ПОВЛАЧИ

$$g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2 \mathcal{K}_Y)Z, Z) = 2tg(\mathcal{K}_Z X, Y) = tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)Z, Z).$$

Поларизација $Z = V + W$ даје $g((\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2 \mathcal{K}_Y)V, W) = tg((\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y)V, W)$ за све $V, W \in \mathcal{V}$, те како је g недегенерисано, добијамо уопштење од (6.22),

$$\mathcal{K}_{X+tY} - \mathcal{K}_X - t^2 \mathcal{K}_Y = t(\mathcal{K}_{X+Y} - \mathcal{K}_X - \mathcal{K}_Y), \quad (6.23)$$

ШТО ДОНОСИ $\mathcal{K}_{X+tY} = t\mathcal{K}_{X+Y} + (1-t)\mathcal{K}_X + (t^2-t)\mathcal{K}_Y$. Употребом особине (6.21), добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{K}_{X+tY}(X+tY) = t\mathcal{K}_{X+Y}(X+tY) + (1-t)\mathcal{K}_X(X+tY) + (t^2-t)\mathcal{K}_Y(X+tY) \\ &= t\mathcal{K}_{X+Y}((t-1)Y) + (1-t)\mathcal{K}_X(tY) + t(t-1)\mathcal{K}_Y(X) \\ &= t(t-1)(\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X), \end{aligned}$$

ШТО ЗА $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ПОВЛАЧИ

$$\mathcal{K}_{X+Y}Y - \mathcal{K}_X Y + \mathcal{K}_Y X = 0 \quad (6.24)$$

за све $X, Y \in \mathcal{V}$.

Искористимо компатибилну фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $\mathcal{K}_X$ на $\mathcal{V}$ који задовољавају $\mathcal{K}_X X = 0$ да дефинишемо пресликавање $R: \mathcal{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, имитирајући формулу (6.18) са

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3} g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W - (\mathcal{K}_{Y+W} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_W)Z, X), \quad (6.25)$$

за све $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$. Из (6.23), ако узмемо лимес кад t тежи нули, онда следи

$$g((\mathcal{K}_{Y+Z} - \mathcal{K}_Y - \mathcal{K}_Z)W, X) = \frac{g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) - g(\mathcal{K}_Y W, X)}{t} - tg(\mathcal{K}_Z W, X) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X),$$

те је зато једнакост (6.25) еквивалентна са

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W - \mathcal{K}_{Y+tW}Z, X). \quad (6.26)$$

Међутим, из

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X) + 2sg(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + s^2 g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, W) + 2sg(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) + s^2 g(\mathcal{K}_{Y+tZ}X, X) \right), \end{aligned}$$

добијамо

$$2g(\mathcal{K}_{Y+tZ}W, X) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \mu(X + sW, Y + tZ) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \mu(W + sX, Y + tZ), \quad (6.27)$$

где је $\mu(X, Y) = g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$ за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Једнакост на левој страни у (6.27) показује да је (6.26) еквивалентно нашој формули (6.20),

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=0, t=0} (\mu(X + sW, Y + tZ) - \mu(X + sZ, Y + tW)). \quad (6.20 \text{ поновљено})$$

Дефиниција (6.25) за R је еквивалентна са (6.20), али је потоња лакша за доказивање да је R алгебарски тензор кривине. Својство (6.6) следи директно из (6.20), док је (6.4) последица комутативности $\partial_s \partial_t = \partial_t \partial_s$. Једнакост на десној страни у (6.27) нам помаже да лако видимо (6.5). Из (6.26), $R(X, Y, Z, W)$ је очигледно линеарно по X , али захваљујући већ доказаним симетријама, где (6.12) аутоматски следи, R је мултилинеарно, што доказује да је R алгебарски тензор кривине.

Преостаје да покажемо да су $\mathcal{K}_X$ за $X \in \mathcal{V}$ Јакобијеви оператори за R . Из (6.25), коришћењем $g(\mathcal{J}_Y W, X) = R(W, Y, Y, X)$ имамо $3g(\mathcal{J}_Y W, X) = g(2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y, X)$, што повлачи

$$3\mathcal{J}_Y W = 2\mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_{Y+W}Y + \mathcal{K}_W Y.$$

На основу (6.24) имамо $-\mathcal{K}_{Y+W}Y = \mathcal{K}_{Y+W}W = \mathcal{K}_Y W - \mathcal{K}_W Y$, те је зато $3\mathcal{J}_Y W = 3\mathcal{K}_Y W$ за све $Y, W \in \mathcal{V}$, што даје $\mathcal{J}_Y = \mathcal{K}_Y$. То коначно доказује следећу теорему (видети [14, Теорема 1] и [11, Теорема 1]).

Теорема 6.7. *Нека је $\mathcal{K}_X$ за свако дефинирано $X \in \mathcal{V}$ комутабилна фамилија самоадајгованих ендоморфизама на квадратном векторском простору $\mathcal{V}$ која задовољава $\mathcal{K}_X X = 0$. Тада постоји јединствен алгебарски тензор кривине на $\mathcal{V}$ такав да су $\mathcal{K}_X$ његови Јакобијеви оператори.*

6.4 Константна секциона кривина

Најједноставнији случај псеудо-Риманових многострукости представља простор константне секционе кривине. Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост таква да је $\kappa(\sigma) = k(p)$ за сваку недегенерисану тангентну раван $\sigma \leq T_p M$ и неко фиксирано $k(p) \in \mathbb{R}$. На основу Теореме 6.6 то једнозначно одређује тензор кривине R . Рестрикција на тачку $p \in M$ даје квадратни простор $\mathcal{V} = T_p M$, као и одговарајући алгебарски тензор кривине. Нека је $R = kR^1 \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ алгебарски тензор кривине из Примера 6.7, где је R^1 дефинисано у (6.13). Како је $R(X, Y, Y, X) = k(\varepsilon_X \varepsilon_Y - (g(X, Y))^2)$, имамо $\kappa(X, Y) = k$, те тензор кривине на (M, g) има облик

$$R(X, Y, Z, W) = k(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)),$$

где је $k \in \mathfrak{F}(M)$. Штавише, у димензији $n \geq 3$, имамо следећу занимљиву теорему коју је поставио Шур⁴ [112].

Теорема 6.8. *Нека је (M, g) повезана псеудо-Риманова многострукости димензије $n \geq 3$. Ако секциона кривина $\kappa(\sigma)$ не зависи од равни $\sigma \leq T_p M$, већ само од тачке $p \in M$, онда је κ константно.*

⁴Friedrich Heinrich Schur (1856–1932), немачки математичар

Доказ. Секциона кривина у свакој тачки $p \in M$ је константа $k(p)$, те тензор кривине мора бити $R = kR^1$. Како је ∇ метричка повезаност, из $\nabla g = 0$ имамо

$$\begin{aligned} (\nabla_V R^1)(X, Y, Z, W) = & V(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) \\ & - (g(Y, Z)g(\nabla_V X, W) - g(\nabla_V X, Z)g(Y, W)) \\ & - (g(\nabla_V Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(\nabla_V Y, W)) \\ & - (g(Y, \nabla_V Z)g(X, W) - g(X, \nabla_V Z)g(Y, W)) \\ & - (g(Y, Z)g(X, \nabla_V W) - g(X, Z)g(Y, \nabla_V W)) = 0, \end{aligned}$$

те је R^1 паралелно тензорско поље, $\nabla_V R^1 = 0$. Одавде следи

$$\nabla_V R = \nabla_V(k \otimes R^1) = \nabla_V k \cdot R^1 + k \cdot \nabla_V R^1 = (Vk)R^1,$$

те важи

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z, W) &= (Vk)(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)), \\ (\nabla_X R)(Y, V, Z, W) &= (Xk)(g(V, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(V, W)), \\ (\nabla_Y R)(V, X, Z, W) &= (Yk)(g(X, Z)g(V, W) - g(V, Z)g(X, W)). \end{aligned}$$

Сума претходних једнакости се анулира по другом Бјанкијевом идентитету (6.9), те је

$$\begin{aligned} g(((Vk)g(Y, Z) - (Yk)g(V, Z))X + ((Xk)g(V, Z) - (Vk)g(X, Z))Y \\ + ((Yk)g(X, Z) - (Xk)g(Y, Z))V, W) = 0 \end{aligned}$$

за свако W , док из недегенерисаности метрике

$$((Vk)g(Y, Z) - (Yk)g(V, Z))X + ((Xk)g(V, Z) - (Vk)g(X, Z))Y + ((Yk)g(X, Z) - (Xk)g(Y, Z))V = 0$$

важи за свако $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$. Рестрикцијом претходне једнакости на тачку $p \in M$, захваљујући Примеру 2.24 добијамо да

$$g_p((V_p k)Y_p - (Y_p k)V_p, Z_p)X_p + g_p((X_p k)V_p - (V_p k)X_p, Z_p)Y_p + g_p((Y_p k)X_p - (X_p k)Y_p, Z_p)V_p = 0$$

важи за све $X_p, Y_p, Z_p, V_p \in T_p M$. Фиксирајмо $X_p \in T_p M$, те како је $n \geq 3$, можемо пронаћи $Y_p, V_p \in T_p M$ такве да су вектори X_p, Y_p, V_p линеарно независни. Та линеарна независност доноси нула коефицијенте у претходној једнакости, што даје

$$g_p((Y_p k)X_p - (X_p k)Y_p, Z_p) = 0.$$

Ова једнакост важи за свако Z_p , те недегенерисаност од g_p даје $(Y_p k)X_p - (X_p k)Y_p = 0$, док линеарна независност повлачи $X_p k = 0$. Како то важи за свако $p \in M$ имамо $Xk = 0$ за $X \in \mathfrak{X}(M)$, те је по Примеру 5.1 k локално константно. Како је многострукост M повезана, k је константно. $\square$

Просћор констѧнћне секционе кривине је псеудо-Риманова многострукост (M, g) за коју је секциона кривина $\kappa(\sigma)$ константна, што је еквивалентно томе да је $\mathcal{R} = \kappa \mathcal{R}^1$ за $\kappa \in \mathbb{R}$. Под скалирањем подразумевамо процес у којем метрику g мењамо метриком $\tilde{g} = \lambda g$ за неку константу $\lambda > 0$ (множење метрике негативним бројем није захвално јер окреће сигнатуру и тако есенцијално мења многострукост). Након скалирања добијамо $\tilde{\mathcal{R}}^1(X, Y)Z = \lambda \mathcal{R}^1(X, Y)Z$, док су одговарајуће везе

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y, \quad \tilde{\mathcal{R}}(X, Y)Z = \mathcal{R}(X, Y)Z, \quad \tilde{\kappa} = \kappa/\lambda.$$

Дакле, постоје три суштинска случаја за тензор кривине простора константне секционе кривине, $R = R^1$ (са $\kappa = 1$), $R = 0$ (са $\kappa = 0$) и $R = -R^1$ (са $\kappa = -1$). Одговарајући модел простори за Риманове многострукости су, редом, сфера $\mathbf{S}^n$, еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ и хиперболички простор $\mathbf{H}^n$.

Пример 6.8. За хиперболичку полураван $\mathbf{HU}^2$ из Примера 5.8 имали смо израчунато $g_{11} = g_{22} = 1/(x_2)^2$, као и $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = 1/x_2$. Из формуле (6.3) имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{121}^1 &= \partial_1 \Gamma_{21}^1 - \partial_2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \mathcal{R}_{121}^2 &= \partial_1 \Gamma_{21}^2 - \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = (1 - 1 + 1)/(x_2)^2 = 1/(x_2)^2,\end{aligned}$$

односно $\mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 = (1/(x_2)^2)\partial_2$. Важи $R(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2) = 1/(x_2)^4$, те је $\kappa = -1$. $\triangle$

У Римановој геометрији, секциона кривина κ може се видети као непрекидна реална функција на Грасмановом раслојењу дводимензионих равни Риманове многострукости M . Одатле следи да је κ на компактном подскупу од M ограничено, односно κ достиже своје минималне и максималне вредности [22, Секција 9.3]. Због тога су доње и горње границе секционе кривине интензивно проучаване у Римановој геометрији.

Међутим, у псеудо-Римановој геометрији, нека ограничења за κ уобичајено повлаче да је κ константно. Размотримо секциону кривину у некој фиксираној тачки псеудо-Риманове многострукости. Посматрајмо алгебарски тензор кривине R на недефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије $n \geq 3$.

Нека су $A, B, X \in \mathcal{V}$ ортонормирани вектори са $\varepsilon_A = \varepsilon_B = -\varepsilon_X$. Тада имамо

$$\kappa(X + \theta B, A) = \frac{R(X + \theta B, A, A, X + \theta B)}{\varepsilon_{X+\theta B}\varepsilon_A} = \frac{\theta^2 \kappa(B, A) - \kappa(X, A) + 2\theta R(X, A, A, B)}{\theta^2 - 1}. \quad (6.28)$$

Ако је $\kappa \geq m$ ограничено одоздо, тада је $\theta^2 \kappa(B, A) - \kappa(X, A) + 2\theta R(X, A, A, B)$ веће од $m(\theta^2 - 1)$ за $|\theta| > 1$ и мање од $m(\theta^2 - 1)$ за $|\theta| < 1$. Из непрекидности, то мора бити нула за $\theta = 1$ и $\theta = -1$, што повлачи $\kappa(B, A) = \kappa(X, A)$ и $R(X, A, A, B) = 0$.

Ако променимо ортонормиране векторе у $A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, B, A \operatorname{sh} t + X \operatorname{ch} t$, за произвољно $t \neq 0$ имамо

$$\begin{aligned}0 &= R(A \operatorname{sh} t + X \operatorname{ch} t, A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, A \operatorname{ch} t + X \operatorname{sh} t, B) \\ &= R(X, A, A, B) \operatorname{ch} t - R(A, X, X, B) \operatorname{sh} t,\end{aligned}$$

где $R(X, A, A, B) = 0$ повлачи $R(A, X, X, B) = 0$. Овај аргумент је оригинално дао Кулкарни⁵ [77], и преостало се ради праволинијски.

На пример, можемо узети ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ у $(\mathcal{V}, g)$, где је $E_1 = X$ и $E_2 = A$ да бисмо добили $\mathcal{J}_X(A) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{E_i} R(A, X, X, E_i) E_i = \varepsilon_A R(A, X, X, A) A$. Зато, ако је X просторно (временско) онда сваки временски (просторни) вектор из $X^\perp$ је сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$. Посебно, A и $E_i + 2A$ за $i > 2$ су неортогонални сопствени вектори и зато имају заједничку сопствену вредност, што доноси $\tilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \mu(X) \mathbb{1}_{X^\perp}$ за неку функцију μ . Међутим, (6.17) повлачи $\varepsilon_X \varepsilon_Y \mu(X) = \varepsilon_Y \varepsilon_X \mu(Y)$ за ортогоналне X и Y , те за дефинитне векторе имамо $\mu(X) = \mu(Y) = \operatorname{Const}$. Овај аргумент даје константну секциону кривину што доказује наредну теорему коју је 1979. поставио Кулкарни [77].

Теорема 6.9. Нека је κ функција секционе кривине недефинитној алгебарској тензора кривине. Ако је κ ограничено одозго или ограничено одоздо, тада је κ константно.

Последично, помоћу Шурове теореме (Теорема 6.8), ако је функција секционе кривине на повезаној недефинитној многострукости M димензије $n \geq 3$ било ограничена одозго или одоздо, тада је M простор константне секционе кривине. Кулкарнијев резултат био је полазна тачка за многа истраживања секционе кривине недефинитне (уобичајено Лоренцове) метрике.

⁵Ravindra Shripad Kulkarni (1942), индијски математичар

Претпоставимо да је секциона кривина на недефинитним равнима ограничена и одозго и одоздо. Започнимо од ортонормираних вектора $A, B, X \in \mathcal{V}$ таквих да је $\varepsilon_A = \varepsilon_B = -\varepsilon_X$ и употребимо једнакост (6.28). За $|\theta| < 1$ раван $\text{Span}\{X + \theta B, A\}$ је недефинитна и зато важи $-m \leq \kappa(X + \theta B, A) \leq m$ за неку константу $m > 0$, што даје

$$-m(1 - \theta^2) \leq \theta^2 \kappa(B, A) - \kappa(X, A) + 2\theta R(X, A, A, B) \leq m(1 - \theta^2).$$

Из непрекидности у $\theta = 1$ и $\theta = -1$, имамо $\kappa(B, A) - \kappa(X, A) \pm 2R(X, A, A, B) = 0$, те је остатак доказа као у претходној теорему. На овај начин добили смо наредну теорему коју су 1980. поставили Дахцер и Номицу⁶ [42].

Теорема 6.10. *Нека је κ функција секционе кривине недефинитној алгебарској шензора кривине. Ако је κ на недефинитним равнима ограничено и одозго и одоздо, тада је κ константно.*

Наравно, као и раније, ако је функција секционе кривине на недефинитним равнима повезане недефинитне многострукости M димензије $n \geq 3$ ограничена и одозго и одоздо, тада је M простор константне секционе кривине. Међутим, ограничење само са једне стране на недефинитним равнима не повлачи да је κ константна функција.

6.5 Ричијев тензор

Дивергенција тензорског поља је операција која редукује ред тензора за један, а уобичајено се дефинише као контракција (или траг) коваријантног извода. Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост и нека је $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ тензорско поље реда $r + s \geq 1$. Дивергенцију од T дефинишемо са

$$\text{div } T = \begin{cases} C_{s+1}^r \nabla T & \text{за } r > 0; \\ \text{tr}_g \nabla T & \text{за } r = 0. \end{cases}$$

Често користимо локални ортонормирани покретни репер $(E_1, \dots, E_n)$ из Теореме 4.13 да изразимо тензорска поља у компонентама. Нека $(E_1^*, \dots, E_n^*)$ означава одговарајући дуални покретни корепер, док је $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i}$ за $1 \leq i \leq n$. Како је $(E_i)^b(E_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, то добијамо $E_i^* = \varepsilon_i E_i^b$.

Најпре размотримо произвољно векторско поље $V \in \mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}_0^1(M)$, за које је дивергенција дефинисана са $\text{div } V = C(\nabla V) \in \mathfrak{F}(M)$. Ако је $V = \sum_j V^j E_j$ изражено у локалном ортонормираном покретном реперу, онда је

$$\begin{aligned} \text{div } V &= \sum_i (\nabla V)_i^i = \sum_i (\nabla_{E_i} V)(E_i^*) = \sum_i E_i^* (\nabla_{E_i} V) = \sum_i \varepsilon_i g(\nabla_{E_i} V, E_i) \\ &= \sum_i \varepsilon_i g \left(E_i, \sum_j E_i(V^j) E_j + \sum_j V^j \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k \right) = \sum_i E_i(V^i) + \sum_{ij} V^j \Gamma_{ij}^i. \end{aligned}$$

У природним координатама на $\mathbb{R}_V^n$ то се редукује на $\text{div } V = \sum_i \partial V^i / \partial x_i$, што се поклапа са уобичајеном формулом у еуклидском простору.

Пример 6.9. Дивергенција градијента глатке функције $f \in \mathfrak{F}(M)$ назива се **Лајлацијан**⁷, $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) \in \mathfrak{F}(M)$. По Лему 5.4 повисилица комутира са коваријантним изводом, те је

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = C \nabla \sharp df = C \sharp \nabla df = C \sharp \nabla \nabla f = \text{tr}_g(\nabla^2 f),$$

⁶Katsumi Nomizu (1924–2008), јапанско-амерички математичар

⁷Pierre-Simon Laplace (1749–1827), француски математичар, физичар и астроном

што значи да је Лапласијан заправо траг Хесијана. У ортонормираном покретном реперу добијамо

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f + \sum_{ij} \varepsilon_{E_j} (E_j f) \Gamma_{ij}^i \\ &= \operatorname{tr}_g(\nabla^2 f) = \sum_i \varepsilon_{E_i} E_i E_i f - \sum_{ij} \varepsilon_{E_i} (E_j f) \Gamma_{ii}^j,\end{aligned}$$

те зато у природним координатама на $\mathbb{R}_v^n$ имамо $\Delta f = \sum_i \varepsilon_{E_i} \partial^2 f / \partial \pi_i^2$, што се редукује на уобичајени Лапласијан на еуклидском простору $\mathbb{R}^3$. $\triangle$

У другом важном случају посматрамо коваријантно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, за које је $\operatorname{div} A = \operatorname{tr}_g \nabla A = \mathcal{C}_1^1 \sharp_3^1 \nabla A \in \mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. У ортонормираном покретном реперу добијамо

$$(\operatorname{div} A)(X) = \sum_i (\sharp \nabla A)(E_i^*, E_i, X) = \sum_{ij} g^{ij} (\nabla A)(E_i, X, E_j) = \sum_i \varepsilon_i (\nabla_{E_i} A)(E_i, X).$$

Ако помножимо тензорско поље функцијом $f \in \mathfrak{F}(M)$, онда

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} fA)(X) &= \sum_i \varepsilon_i (\nabla_{E_i} fA)(E_i, X) = \sum_i \varepsilon_i ((\nabla_{E_i} f)A(E_i, X) + f(\nabla_{E_i} A)(E_i, X)) \\ &= A\left(\sum_i \varepsilon_i (E_i f) E_i, X\right) + f \sum_i \varepsilon_i (\nabla_{E_i} A)(E_i, X) = A(\operatorname{grad} f, X) + f(\operatorname{div} A)(X).\end{aligned}$$

Посебно, случај $A = g$ доноси $(\operatorname{div}(fg))(X) = g(\operatorname{grad} f, X) = df(X)$, што даје корисну формулу

$$\operatorname{div}(fg) = df. \quad (6.29)$$

Овај идентитет каже да је дивергенција скалиране метрике једнак диференцијалу функције скалирања.

Како су коваријантни тензори вишег реда прилично компликовани, често је корисно конструисати једноставније тензоре који кодирају неке њихове информације. Траг тензора кривине зовео **Ричијев тензор**⁸,

$$\operatorname{Ric} = \operatorname{tr}_g R = \mathcal{C}_1^1 \sharp R = \mathcal{C}_1^1 \mathcal{R} \in \mathfrak{T}_2^0(M).$$

Траг од R по првом и последњем индексу је природан избор јер $\mathbb{Z}_2$ симетрије повлаче $(\operatorname{tr}_g)_{24} R = -\operatorname{Ric}$ и $(\operatorname{tr}_g)_{34} R = 0$.

У локалним координатама, компоненте Ричијевог тензора се уобичајено обележавају са $R_{ij} = (\operatorname{Ric})_{ij}$. Како је $R_{ij} = \sum_l \mathcal{R}_{lij}^l = \sum_{l,k} g^{lk} R_{lijk} = R_{ji}$, то је Ричијев тензор $\operatorname{Ric} = \sum_{ij} R_{ij} dx_i \otimes dx_j$ симетричан. У ортонормираном покретном реперу добијамо

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i g(\mathcal{R}(E_i, X)Y, E_i) = \sum_i \varepsilon_i R(E_i, X, Y, E_i). \quad (6.30)$$

Траг Ричијевог тензора зовео **скаларна кривина**, $\operatorname{Sc} = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} \in \mathfrak{F}(M)$. У локалним координатама имамо $\operatorname{Sc} = \sum_{ij} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g^{lk} R_{lijk}$, док у ортонормираном покретном реперу то постаје $\operatorname{Sc} = \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ijji}$.

Редуковањем на тачку, можемо употребити секциону кривину да опишемо Ричијев тензор и скаларну кривину. Нека је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана база квадратног простора $(\mathcal{V}, g)$. Тада имамо

$$\varepsilon_k \operatorname{Ric}(E_k, E_k) = \varepsilon_k \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{ikki} = \sum_{i \neq k} \kappa(E_i, E_k), \quad \operatorname{Sc} = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ijji} = \sum_{i \neq j} \kappa(E_i, E_j).$$

⁸Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), италијански математичар

Пример 6.10. Ричијев тензор је одређен секционим кривинама, али у општем случају садржи мање информација. Међутим, у ситним димензијама ($n = 2, 3$) Ричијев тензор у потпуности одређује тензор кривине. У димензији $n = 3$ за недегенерисану раван σ поставимо ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3) такву да је $\sigma = \text{Span}\{E_1, E_2\}$. Тада је $\varepsilon_k R_{kk} = \sum_{i \neq k} \kappa(E_k, E_i)$, одакле следи $\kappa(\sigma) = \kappa(E_1, E_2) = (\varepsilon_1 R_{11} + \varepsilon_2 R_{22} - \varepsilon_3 R_{33})/2$. $\triangle$

Посматрајмо $T \in \mathfrak{T}_5^0(M)$ дефинисано са $T_{ijklm} = (\nabla R)_{jklmi} + (\nabla R)_{kilmj} + (\nabla R)_{ijlmk}$. Други Бјанкијев идентитет повлачи да је $T = 0$. Ако два пута применимо траг добијамо

$$0 = (\text{tr}_g \text{tr}_g T)_k = \sum_{j,l} g^{jl} \sum_{i,m} g^{im} T_{ijklm}.$$

Са друге стране имамо

$$\begin{aligned} \sum_{j,l} g^{jl} \sum_{i,m} g^{im} (\nabla R)_{jklmi} &= \sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} (\nabla_{\partial_i} R)_{jklm} = - \sum_{i,m} g^{im} \sum_{j,l} g^{jl} (\nabla_{\partial_i} R)_{jklm} \\ &= - \sum_{i,m} g^{im} (\text{tr}_g \nabla_{\partial_i} R)_{km} = - \sum_{i,m} g^{im} (\nabla_{\partial_i} \text{tr}_g R)_{km} = - \sum_{i,m} g^{im} (\nabla_{\partial_i} \text{Ric})_{km} \\ &= - \sum_{i,m} g^{im} (\nabla_{\partial_i} \text{Ric})_{mk} = - \sum_{i,m} g^{im} (\nabla \text{Ric})_{mki} = - (\text{tr}_g \nabla \text{Ric})_k = - (\text{div Ric})_k, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} \sum_{j,l} g^{jl} \sum_{i,m} g^{im} (\nabla R)_{kilmj} &= - \sum_{j,l} g^{jl} \sum_{i,m} g^{im} (\nabla R)_{iklmj} = - \sum_{j,l} g^{jl} (\nabla_{\partial_j} \text{Ric})_{kl} = - (\text{div Ric})_k, \\ \sum_{j,l} g^{jl} \sum_{i,m} g^{im} (\nabla R)_{ijlmk} &= \text{tr}_g \text{tr}_g \nabla_{\partial_k} R = \nabla_{\partial_k} \text{tr}_g \text{tr}_g R = \nabla_{\partial_k} \text{Sc} = (\nabla \text{Sc})_k, \end{aligned}$$

што повлачи $2(\text{div Ric})_k = (\nabla \text{Sc})_k$, те отуда $2 \text{div Ric} = \nabla \text{Sc}$. Ово је идентитет који лежи у основама опште теорије релативитета, а који зовемо **конџракован Бјанкијев идентитет**.

Теорема 6.11. За псеудо-Риманову мноџострукост важи $2 \text{div Ric} = \nabla \text{Sc}$.

За псеудо-Риманову многострукост (M, g) кажемо да је **Ајнштајнова**⁹ уколико је њен Ричијев тензор пропорционалан метрици, односно уколико је $\text{Ric} = \lambda g$ за неку константу $\lambda \in \mathbb{R}$. Уколико применимо траг добијамо $\text{Sc} = \text{tr}_g \text{Ric} = \text{tr}_g(\lambda g) = \lambda \text{tr}_g g = \lambda n$, те зато Ајнштајнова многострукост има константну скаларну кривину.

Пример 6.11. Нека је (M, g) простор константне секционе кривине κ . Тада имамо

$$R_{ij} = \sum_{l,k} g^{lk} R_{lijk} = \sum_{l,k} \kappa g^{lk} (g_{lk} g_{ij} - g_{lj} g_{ik}) = (n-1) \kappa g_{ij},$$

те добијамо $\text{Ric} = (n-1) \kappa g$. Зато је (M, g) Ајнштајнова и важи $\text{Sc} = n(n-1) \kappa$. $\triangle$

Општије, можемо рећи да је (M, g) Ајнштајнова у тачки $p \in M$ уколико је одговарајући алгебарски тензор кривине у тој тачки Ајнштајнов, односно уколико је Ричијев тензор скаларни умножак метрике у p . Са овом терминологијом имамо наредно добро познато тврђење за Ајнштајнове многострукости (видети Бесе¹⁰ [20, Теорема 1.97]).

Теорема 6.12. Ако је повезана псеудо-Риманова мноџострукост димензије $n \geq 3$ Ајнштајнова у свакој тачки онда је она Ајнштајнова.

⁹ Albert Einstein (1879–1955), немачки теоријски физичар

¹⁰ Arthur Besse, псеудоним групе француских геометричара коју је предводио Марсел Берже

Доказ. Како је (M, g) Ајнштајнова у свакој тачки, то важи $\text{Ric} = \lambda g$ за неку функцију $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$. Применом трага у односу на g добијамо $\text{Sc} = n\lambda$, док применом дивергенције, коришћењем Теореме 6.11 и формуле (6.29) добијамо

$$n\nabla\lambda = \nabla \text{Sc} = 2 \operatorname{div} \text{Ric} = 2 \operatorname{div}(\lambda g) = 2\nabla\lambda.$$

Дакле, за $n \neq 2$ важи $\nabla\lambda = 0$, одакле је λ локална константа на повезаној многострукости, те је зато и глобална константа, што такође важи за Sc . $\square$

По Теорему 6.4 алгебарски тензор кривине у димензији $n = 3$ има свега шест независних компоненти, док за $n = 2$ постоји само једна. Због тога у ситним димензијама добијамо занимљиве примере.

Пример 6.12. У димензији $n = 2$, постоји само једна 2-раван, те сваки дводимензиони алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину, те је по Примеру 6.11 Ајнштајнов. $\triangle$

Пример 6.13. У димензији $n = 3$ по Примеру 6.10 Ричијев тензор у потпуности одређује секциону кривину, а самим тим и тензор кривине. Посебно, ако је тродимензиони алгебарски тензор кривине Ајнштајнов, онда има константну секциону кривину. Додатно, тродимензиона повезана Ајнштајнова многострукост је простор константне секционе кривине. $\triangle$

6.6 Ричијеви идентитети

Нека је M псеудо-Риманова многострукост, а ∇ произвољна повезаност на M . Упооређивањем компоненти, за произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ и $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$(\nabla_X A)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_k (\nabla A)_{j_1 \dots j_s k}^{i_1 \dots i_r} X^k = (C_{s+1}^{r+1}(\nabla A \otimes X))_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},$$

одакле добијамо

$$\nabla_X A = C_{s+1}^{r+1}(\nabla A \otimes X),$$

а сасвим слично имамо

$$(\nabla_{X,Y}^2 A)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{k,l} (\nabla^2 A)_{j_1 \dots j_s k l}^{i_1 \dots i_r} Y^k X^l = C_{s+1}^{r+1}(C_{s+2}^{r+1}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},$$

што даје

$$\nabla_{X,Y}^2 A = C_{s+1}^{r+1}(C_{s+2}^{r+1}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y).$$

Како важи

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y A &= \nabla_X C_{s+1}^{r+1}(\nabla A \otimes Y) = C_{s+1}^{r+1} \nabla_X(\nabla A \otimes Y) = C_{s+1}^{r+1}(\nabla_X \nabla A \otimes Y + \nabla A \otimes \nabla_X Y) \\ &= C_{s+1}^{r+1}(C_{s+2}^{r+1}(\nabla^2 A \otimes X) \otimes Y) + C_{s+1}^{r+1}(\nabla A \otimes \nabla_X Y) = \nabla_{X,Y}^2 A + \nabla_{\nabla_X Y} A, \end{aligned}$$

то добијамо

$$\nabla_{X,Y}^2 A - \nabla_{Y,X}^2 A = \nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} A,$$

или једноставније $\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2 = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}$.

Најједноставнији случај тензорског поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ је глатка функција $f \in \mathfrak{F}(M)$, а тад изведена формула даје

$$\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = \nabla_{Y,X}^2 f - \nabla_{X,Y}^2 f = (-[X, Y] + \nabla_X Y - \nabla_Y X)f = \tau(X, Y)f,$$

где је τ торзија, што смо већ видели у Примеру 5.5, везано за Хесијан функције f .

У контексту кривине, повезаност ∇ је увек Леви-Чивита. Тада симетричност од ∇ даје симетричност Хесијана, $\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_{Y,X}^2 f$, док у случају произвољног тензорског поља добијамо

$$\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2 = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}. \quad (6.31)$$

Наредни по једноставности случај посматра тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ које је векторско поље $Z \in \mathfrak{X}(M)$, а тад формула (6.31), по дефиницији од $\mathcal{R}$, постаје

$$\nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \mathcal{R}(X, Y)Z. \quad (6.32)$$

У случају ковекторског поља $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ имамо

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y \omega)Z &= X((\nabla_Y \omega)Z) - (\nabla_Y \omega)(\nabla_X Z) \\ &= X(Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_Y Z)) - (Y(\omega(\nabla_X Z)) - \omega(\nabla_Y \nabla_X Z)) \\ &= XY(\omega(Z)) - (\nabla_X \omega)(\nabla_Y Z) - \omega(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y \omega)(\nabla_X Z), \end{aligned}$$

одакле из формуле (6.31) добијамо

$$\begin{aligned} (\nabla_{X,Y}^2 \omega - \nabla_{Y,X}^2 \omega)Z &= (\nabla_X \nabla_Y \omega)Z - (\nabla_Y \nabla_X \omega)Z - (\nabla_{[X,Y]} \omega)Z \\ &= (XY - YX)(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) - [X, Y](\omega(Z)) + \omega(\nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= -\omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) = -\omega(\mathcal{R}(X, Y)Z). \end{aligned}$$

Ако је $\mathcal{R}^*(X, Y): \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ пресликавање дефинисано са

$$(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega)Z = \omega(\mathcal{R}(X, Y)Z),$$

онда изведена формула доноси

$$\nabla_{X,Y}^2 \omega - \nabla_{Y,X}^2 \omega = -\mathcal{R}^*(X, Y)\omega. \quad (6.33)$$

Размотримо сада општи случај. Најпре приметимо да за произвољна тензорска поља A и B важи $\nabla_X \nabla_Y (A \otimes B) = \nabla_X \nabla_Y A \otimes B + \nabla_Y A \otimes \nabla_X B + \nabla_X A \otimes \nabla_Y B + A \otimes \nabla_X \nabla_Y B$, одакле из формуле (6.31) добијамо

$$\begin{aligned} (\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)(A \otimes B) &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(A \otimes B) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})A \otimes B + A \otimes (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})B \\ &= (\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)A \otimes B + A \otimes (\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)B. \end{aligned}$$

Произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ можемо записати као суму тензорских производа састављених искључиво од векторских и ковекторских поља, те најпре за $V_1, \dots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{X}^*(M)$, користећи (6.32) и (6.33), рачунамо

$$\begin{aligned} &(\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)(V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_s) \\ &= \mathcal{R}(X, Y)V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes \lambda_s + \dots + V_1 \otimes \dots \otimes V_{r-1} \otimes \mathcal{R}(X, Y)V_r \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_s \\ &\quad - V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes \mathcal{R}^*(X, Y)\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_s - \dots - V_1 \otimes \dots \otimes \lambda_{s-1} \otimes \mathcal{R}^*(X, Y)\lambda_s. \end{aligned}$$

Како је $(\mathcal{R}(X, Y)V_i)\omega_i = V_i(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega_i)$ за $1 \leq i \leq r$, док је $(\mathcal{R}^*(X, Y)\lambda_j)Z_j = \lambda_j(\mathcal{R}(X, Y)Z_j)$ за $1 \leq j \leq s$, где су $\omega_i \in \mathfrak{X}^*(M)$ и $Z_j \in \mathfrak{X}(M)$, то добијамо

$$\begin{aligned} &((\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2)(V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_s))(\omega_1, \dots, \omega_r, Z_1, \dots, Z_s) \\ &= V_1(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega_1)V_2(\omega_2) \dots \lambda_s(Z_s) + \dots + V_1(\omega_1) \dots V_{r-1}(\omega_{r-1})V_r(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega_r)\lambda_1(Z_1) \dots \lambda_s(Z_s) \\ &\quad - V_1(\omega_1) \dots V_r(\omega_r)\lambda_1(\mathcal{R}(X, Y)Z_1)\lambda_2(Z_2) \dots \lambda_s(Z_s) - \dots - V_1(\omega_1) \dots \lambda_{s-1}(Z_{s-1})\lambda_s(\mathcal{R}(X, Y)Z_s). \end{aligned}$$

Одавде следи коначна формула за произвољно тензорско поље $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$,

$$\begin{aligned} & (\nabla_{X,Y}^2 A - \nabla_{Y,X}^2 A)(\omega_1, \dots, \omega_r, Z_1, \dots, Z_s) \\ &= A(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega_1, \omega_2, \dots, Z_s) + \dots + A(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \mathcal{R}^*(X, Y)\omega_r, Z_1, \dots, Z_s) \\ & \quad - A(\omega_1, \dots, \omega_r, \mathcal{R}(X, Y)Z_1, Z_2, \dots, Z_s) - \dots - A(\omega_1, \dots, Z_{s-1}, \mathcal{R}(X, Y)Z_s), \end{aligned} \quad (6.34)$$

а зовемо је **Ричијев идентитет**.

Уобичајено је да посматрамо специјалне случајеве Ричијевог идентитета за једноставнија тензорска поља $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. У једнакостима (6.32) и (6.33) имали смо случајеве кад је A векторско или ковекторско поље. За $J \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ формула (6.34) даје

$$(\nabla_{X,Y}^2 J - \nabla_{Y,X}^2 J)(\omega, Z) = J(\mathcal{R}^*(X, Y)\omega, Z) - J(\omega, \mathcal{R}(X, Y)Z),$$

те ако J схватимо као $\mathfrak{F}(M)$ -линеарни оператор $J: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, добијамо формулу

$$(\nabla_X \nabla_Y J - \nabla_Y \nabla_X J - \nabla_{[X,Y]} J)Z = \mathcal{R}(X, Y)(JZ) - J(\mathcal{R}(X, Y)Z). \quad (6.35)$$

ЈОШ ПСЕУДО-РИМАНОВЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

7.1 Јакобијева поља

За произвољно векторско поље дуж двопараметарског пресликавања имамо наредну везу са кривином.

Лема 7.1. Нека је (M, g) псеудо-Риманова мноґострукосћ, а $f: L \times I \rightarrow M$ двопараметарско пресликавање. Тада за свако $V \in \mathfrak{X}(f)$ важи

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} V - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} V = \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V. \quad (7.1)$$

Доказ. У питању је локални резултат, те за свако $(s, t) \in L \times I$ можемо искористити локалне координате $(x_1, \dots, x_n)$ дефинисане на некој околини тачке $f(s, t)$. Ако означимо $V_k(s, t) = (V(s, t))(x_k)$ и $f_k = x_k \circ f$ за $1 \leq k \leq n$, можемо израчунати

$$\frac{\nabla}{dt} V = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} V_k \frac{\partial}{\partial x_k} + V_k \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \circ f,$$

одакле је

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} V = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} V_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} V_k \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial s} V_k \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} + V_k \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \circ f,$$

што даје

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} V - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} V = \sum_{k=1}^n V_k \left(\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \circ f.$$

Са друге стране, имамо

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} &= \frac{\nabla}{ds} \left(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\nabla}{ds} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f_j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\nabla}{ds} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

што повлачи

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial s} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial s} \mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

те коначно добијамо

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} V - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} V = \sum_{k=1}^n V_k \left(\mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \circ f = \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

□

Посматрајмо двопараметарско пресликавање $f: L \times I \rightarrow M$ за псеудо-Риманову многострукост (M, g) , где је $L = (-\epsilon, \epsilon)$ за неко $\epsilon > 0$, а $I \subseteq \mathbb{R}$ је интервал. Оно одређује уздужне криве $f_s: t \mapsto f(s, t)$, док глатка крива $\gamma = f_0$ има посебну важност као централна уздужна крива. **Варијационо векторско поље** дуж γ је $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ дато са

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t).$$

Ми смо заинтересовани за специјални случај кад су делимична пресликавања f_s геодезијске за свако $s \in L$ и кажемо да је f **варијација кроз геодезијске** од γ . У том случају, за варијационо векторско поље $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ користимо једнакост (5.19) и Лему 7.1 да израчунамо

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} V = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = -\mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Зато, ако је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M , онда њено варијационо векторско поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ задовољава

$$J'' + \mathcal{R}(J, \gamma') \gamma' = 0. \quad (7.2)$$

Једначина (7.2) се зове **Јакобијева једначина**, док векторско поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ дуж геодезијске γ које је задовољава зовемо **Јакобијево поље**.

Испоставља се да је Јакобијево поље J одређено својим почетним условима $J(a)$ и $J'(a)$ за неко $a \in I$. Изаберимо произвољан паралелни ортонормирани покретни репер $(E_1, \dots, E_n)$ дуж γ . Произвољно $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ се може записати са $J(t) = \sum_i J_i(t) E_i(t)$ за $J_i \in \mathfrak{F}(I)$, $1 \leq i \leq n$, те Јакобијеву једначину (7.2) можемо изразити са

$$\sum_{i=1}^n J_i''(t) E_i(t) + \sum_{i=1}^n g_{\gamma(t)}(\mathcal{R}(J(t), \gamma'(t)) \gamma'(t), E_i(t)) E_i(t) = 0,$$

што даје

$$J_i'' + \sum_{j=1}^n J_j R(E_j, \gamma', \gamma', E_i) \circ \gamma = 0,$$

за све $1 \leq i \leq n$. У питању је систем n обичних диференцијалних једначина другог реда за n функција $J_i \in \mathfrak{F}(I)$. Увођењем уобичајених смена $V_i = J_i'$ претварамо га у еквивалентан линеарни систем првог реда за $2n$ непознатих функција,

$$J_i' = V_i, \quad V_i' = - \sum_{j=1}^n (R(E_j, \gamma', \gamma', E_i) \circ \gamma) J_j.$$

То гарантује егзистенцију и јединственост решења на читавом интервалу I са почетним условима $J_i(a) = (E_i(a))^*(J(a))$ и $V_i(a) = (E_i(a))^*(J'(a))$.

Теорема 7.2. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M . За $a \in I$ и сваки пар вектора $X, Y \in T_{\gamma(a)} M$ постоји јединствено Јакобијево поље $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ које задовољава почетне услове $J(a) = X$ и $J'(a) = Y$.

Теорема 7.2 је теорема о егзистенцији и јединствености Јакобијевих поља, те уводимо ознаку $J_X^Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ за Јакобијево поље такво да важи $J_X^Y(a) = X$ и $(J_X^Y)'(a) = Y$. Скуп свих Јакобијевих поља дуж геодезијске $\gamma: I \rightarrow M$,

$$\mathcal{J}(\gamma) = \{J_X^Y : X, Y \in T_{\gamma(a)}M\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma),$$

можемо идентификовати са $T_{\gamma(a)}M \times T_{\gamma(a)}M$. Штавише, за $X, Y, Z, V \in T_{\gamma(a)}M$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо

$$(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)'' = \alpha (J_X^Y)'' + \beta (J_Z^V)'' = -\alpha \mathcal{R}(J_X^Y, \gamma')\gamma' - \beta \mathcal{R}(J_Z^V, \gamma')\gamma' = -\mathcal{R}(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V, \gamma')\gamma',$$

што доказује да је $\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V$ Јакобијево поље, док

$$(\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)(a) = \alpha X + \beta Z = J_{\alpha X + \beta Z}^{\alpha Y + \beta V}(a), \quad (\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V)'(a) = \alpha Y + \beta V = (J_{\alpha X + \beta Z}^{\alpha Y + \beta V})'(a),$$

доноси

$$\alpha J_X^Y + \beta J_Z^V = J_{\alpha X + \beta Z}^{\alpha Y + \beta V}.$$

Тако, $\mathcal{J}(\gamma)$ постаје векторски простор димензије $2n$ изоморфан са $T_{\gamma(a)}M \times T_{\gamma(a)}M$.

Напоменимо да претходна теорема ради за произвољно $a \in I$, али да бисмо избегли двосмисленост, осим ако није наглашено другачије, претпостављамо $a = 0 \in I$. Наравно, транслација $t \mapsto t - a$ не нарушава чињеницу да је γ геодезијска нити да је J Јакобијево поље.

Већ смо видели да варијационо векторско поље дуж γ јесте Јакобијево поље. Међутим важи и обрат, јер је свако Јакобијево поље дуж γ неко варијационо векторско поље дуж γ .

Теорема 7.3. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M , где је I компактан интервал. Свако Јакобијево поље дуж γ јесте варијационо векторско поље неке варијације кроз геодезијске од γ .

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити $0 \in I$. Нека је $J_X^Y \in \mathcal{J}(\gamma)$. Изаберимо глатку криву $\psi: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ тако да важи $\psi(0) = \gamma(0)$ и $\psi'(0) = X$. Изаберимо $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ тако да важи $V(0) = \gamma'(0)$ и $(\nabla V/ds)(0) = Y$. Дефинишимо варијацију од γ са $f(s, t) = \exp_{\psi(s)}(tV(s))$. Како је I компактно, домен од $\exp$ је отворен подскуп од TM који садржи компактан скуп $\{(\psi(t), t\gamma'(0)) : t \in I\}$, те постоји неко $0 < \delta \leq \epsilon$ такво да је f дефинисано за $(s, t) \in (-\delta, \delta) \times I$.

Како је $f(0, t) = \exp_{\psi(0)}(tV(0)) = \exp_{\gamma(0)}(t\gamma'(0)) = \gamma(t)$, видимо да је f варијација од γ , док је $f(s, 0) = \exp_{\psi(s)}(0) = \psi(s)$. Нека је $W(t) = (\partial f / \partial s)(0, t)$ варијационо векторско поље. Тада је $W(0) = \psi'(0) = X$, а свака уздужна крива f_s је геодезијска са $(f_s)'(0) = V(s)$, док имамо

$$\frac{\nabla W}{dt}(0) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \frac{\nabla V}{ds}(0) = Y,$$

што доказује $J_X^Y = W$. □

Најочигледнији пример Јакобијевог поља је $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$, јер задовољава (7.2) због $(\gamma')' = 0$ и $\mathcal{R}(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$, што је варијационо поље од варијације $f(s, t) = \gamma(s + t)$. Још један једноставан пример је $J(t) = t\gamma'(t)$, што је варијационо поље од $f(s, t) = \gamma((1+s)t)$. Међутим, ови примери Јакобијевих поља су репараметризације од γ и не говоре нам ништа ново о понашању геодезијске γ .

Да бисмо искључили овакве неважне примере, кадгод $\gamma'(t)$ није изотропно можемо искористити растављање $T_{\gamma(t)}M = \text{Span}\{\gamma'(t)\} \oplus \text{Span}\{\gamma'(t)\}^\perp$. Ако γ' нигде није изотропно, свако $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ се раставља на ортогоналну суму $V^\top + V^\perp$, где је $V^\top$ умножак од γ' , а $V^\perp$ нормално на γ' . Кажемо да је $V^\top$ **танјеним векторско поље** дуж

γ , док је $V^\perp$ **нормално векторско поље** дуж γ . Ако искористимо компатибилност са метриком,

$$0 = \frac{d}{dt}g(V^\perp, \gamma') = g((V^\perp)', \gamma') + g(V^\perp, (\gamma')') = g((V^\perp)', \gamma'),$$

видимо да је $(V^\perp)'$ такође нормално на γ' , а слично је $(V^\perp)'$ паралелно са γ' .

Јакобијево поље J које задовољава $J(t) \perp \gamma'(t)$ за свако $t \in I$ зове се **нормално Јакобијево поље**, а на располагању имамо наредну теорему.

Теорема 7.4. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој мноштрукости M . Ако је $J \in \mathcal{J}(\gamma)$, тада је еквивалентно: J је нормално Јакобијево поље; J је ортогонално на γ' у две различите тачке; и J и J' су ортогонални на γ' у једној тачки; и J и J' су ортогонални на γ' свуда дуж γ .

Доказ. Посматрајмо $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $f(t) = g(J(t), \gamma'(t))$. Јакобијево поље је нормално ако и само ако је $f \equiv 0$. За $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ имамо $f' = (g(J', \gamma'))' = g(J'', \gamma') = -g(\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma', \gamma') = 0$, што значи да је $f(t) = ct + d$ за неке $c, d \in \mathbb{R}$. Како је $g(J', \gamma') = c$, имамо $J' \perp \gamma'$ ако и само ако је $c = 0$, док $J \perp \gamma'$ у $t \in I$ важи ако и само ако је $ct + d = 0$, што је довољно да лако комплетира доказ. $\square$

Заинтересовани смо за Јакобијева поља која ишчезавају у конкретној тачки. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M , где је I компактан интервал који садржи 0. На основу Теореме 7.2, произвољно Јакобијево поље $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ такво да је $J(0) = 0$ је $J = J_0^X$ за неко $X \in T_{\gamma(0)}M$. По Теорему 7.3, J је варијационо поље од варијације кроз геодезијске од γ , где у доказу подешавамо $\psi(s) = \gamma(0)$ и $V(s) = \gamma'(0) + sX$, да бисмо добили варијацију

$$f(s, t) = \exp_{\gamma(0)}(t(\gamma'(0) + sX)).$$

То нам омогућава да израчунамо

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = \left(T_{t(\gamma'(0) + sX)} \exp_{\gamma(0)} \right) (tX)_{t(\gamma'(0) + sX)} \Big|_{s=0} = \left(T_{t\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)} \right) (tX)_{t\gamma'(0)},$$

што даје експлицитну формулу

$$J_0^X(t) = \left(T_{t\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)} \right) (tX)_{t\gamma'(0)}, \quad (7.3)$$

где $(tX)_{t\gamma'(0)} \in T_{t\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M)$ канонски одговара вектору $tX \in T_{\gamma(0)}M$.

У нормалним координатама, координатна репрезентација експоненцијалног пресликавања је идентичка, те у нормалној околини од $\gamma(0)$ која садржи слику од γ , f можемо експлицитно записати са $f(s, t) = (t(\gamma'_1(0) + sJ'_1(0)), \dots, t(\gamma'_n(0) + sJ'_n(0)))$, те добијамо

$$J_0^X(t) = t \sum_{i=1}^n X_i(\partial_i)_{\gamma(t)},$$

где је $\sum_{i=1}^n X_i(\partial_i)_{\gamma(0)}$ координатна репрезентација од X .

Пример 7.1. Нека је (M, g) простор константне секционе кривине κ , одакле имамо $\mathcal{R} = \kappa \mathcal{R}^1$. У том случају Јакобијева једначина (7.2) постаје $J'' + \kappa(g(\gamma', \gamma')J - g(J, \gamma')\gamma') = 0$, те за геодезијску јединичне брзине γ у M , нормално Јакобијево поље J задовољава

$$J'' + \kappa J = 0.$$

Нека је E произвољно паралелно јединично нормално векторско поље дуж γ . Разумно је пробати $J(t) = \alpha(t)E(t)$ за неко $\alpha \in \mathfrak{F}(I)$. Након замене добијамо да је α решење

диференцијалне једначине $\alpha'' + \kappa\alpha = 0$. Претпоставимо $J(0) = 0$, што даје почетни услов $\alpha(0) = 0$, те су решења $\alpha(t) = c \cdot h_\kappa(t)$, где је

$$h_\kappa(t) = \begin{cases} t & \text{if } \kappa = 0, \\ \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \frac{\text{sh}(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

а c произвољна константа. Тако смо добили $J = ch_\kappa E$. Једноставан рачун показује $J'(0) = ch'_\kappa(0)E(0) = cE(0)$, јер $h'_\kappa(0) = 1$ увек важи, док је $\|J'(0)\| = |\kappa|$, јер је E јединично векторско поље. $\triangle$

Размотримо $J = J_0^X \in \mathcal{J}(\gamma)$, где имамо $J(0) = 0$ и $J'(0) = X$. Како је $J'' = -\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma'$, такође имамо $J''(0) = 0$. Израчунајмо Тејлоров развој од $\|J(t)\|^2$ око $t = 0$. За почетне коефицијенте добијамо

$$\begin{aligned} g(J, J)(0) &= g(J(0), J(0)) = 0, \\ (g(J, J))'(0) &= (g(J', J) + g(J, J'))(0) = 2g(J', J)(0) = 0, \\ (g(J, J))''(0) &= 2g(J'', J)(0) + 2g(J', J')(0) = 2g(X, X) = 2, \\ (g(J, J))'''(0) &= 2g(J''', J)(0) + 6g(J'', J')(0) = 0. \end{aligned}$$

За произвољно $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ рачунамо

$$\begin{aligned} g(J''', Y)(0) &= (g(J'', Y))'(0) - g(J''(0), Y'(0)) = (g(-\mathcal{R}(J, \gamma')\gamma', Y))'(0) = -(g(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', J))'(0) \\ &= -g((\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma')'(0), J(0)) - g(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', J')(0) = -g(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma', Y)(0), \end{aligned}$$

што повлачи $J'''(0) = -(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma')(0)$. Ово нам помаже да израчунамо наредни Тејлоров коефицијент.

$$\begin{aligned} (g(J, J))''''(0) &= 2g(J''''(0), J(0)) + 8g(J''', J')(0) + 6g(J'', J'')(0) = 8g(J''', J')(0) \\ &= -8g(\mathcal{R}(J', \gamma')\gamma', X)(0) = -8g_{\gamma(0)}(\mathcal{R}(X, \gamma'(0)), \gamma'(0), X) = -8\kappa(\gamma'(0), X), \end{aligned}$$

где је $\kappa(\gamma'(0), X)$ секциона кривина равни $\sigma = \text{Span}\{\gamma'(0), J'(0)\} \leq T_{\gamma(0)}M$. Тејлоров развој даје

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}\kappa(\sigma)t^4 + O_{t \rightarrow 0}(t^5),$$

што повлачи

$$\|J(t)\| = t - \frac{1}{6}\kappa(\sigma)t^3 + O_{t \rightarrow 0}(t^4). \quad (7.4)$$

Сада смо у могућности да дамо везу између геодезијских и кривине. Јакобијево поље $J_0^X \in \mathcal{J}(\gamma)$ је варијационо поље од варијације $f(s, t) = \exp_{\gamma(0)}(t(\gamma'(0) + sX))$, и дато је формулом (7.3). Интуитивно, формула (7.4) показује колико брзо се шире геодезијске које почињу из $\gamma(0)$ и тангентне су на раван $\sigma = \text{Span}\{\gamma'(0), X\}$. Локално, за $\kappa(\sigma) > 0$ радијалне геодезијске се шире спорије неголи полуправе у T_pM , док се за $\kappa(\sigma) < 0$ оне шире брже неголи полуправе у T_pM (видети детаље у До Кармо [34, Примедба 5.2.11]).

Лако је проверити да је простор $\mathcal{J}_a(\gamma)$ свих Јакобијевих поља $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ таквих да важи $J(a) = 0$, један n -димензиони потпростор од $\mathcal{J}(\gamma)$, што се базира на избору линеарно независних вектора $J'(a) \in T_{\gamma(a)}M$. Како је тангентно пресликавање експоненцијалног пресликавања линеарно лако је видети да су вектори $J'(a) \in T_{\gamma(a)}M$ линеарно независни ако и само ако су Јакобијева поља $J \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ линеарно независна.

Лема 7.5. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у γ -сеудо-Римановој мнојострукости M и $a \in I$. Ако $J_i \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ за $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$, онда су $J'_1(a), \dots, J'_k(a) \in T_{\gamma(a)}M$ линеарно независни ако и само ако су $J_1, \dots, J_k \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ линеарно независни.

Доказ. Претпоставимо да су J_i линеарно независни и да важи $\sum_i \alpha_i J'_i(a) = 0$ за неке $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Конструисамо $J = \sum_i \alpha_i J_i \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ које задовољава $J'(a) = 0$, те Теорема 7.2 повлачи $J = 0$, одакле $0 = J(a) = \sum_i \alpha_i J_i(a)$ даје $\alpha_i = 0$. Обратно, претпоставимо да су $J'_i(a)$ линеарно независни и да важи $\sum_i \alpha_i J_i = 0$ за неке $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Диференцирањем добијамо $\sum_i \alpha_i J'_i = 0$, што повлачи $\sum_i \alpha_i J'_i(a) = 0$, те добијамо $\alpha_i = 0$. $\square$

Примена Јакобијевих поља може нам омогућити да испитамо кад је експоненцијално пресликавање локални дифеоморфизам, односно да нађемо везе између сингуларитета експоненцијалног пресликавања и Јакобијевих поља.

Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M димензије n . Кажемо да су две различите вредности параметра $a, b \in I$ **конјуговани параметри** дуж γ ако постоји Јакобијево поље $0 \neq J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ такво да је $J(a) = 0 = J(b)$. **Вишеструкосћ** конјугације је максималан број таквих линеарно независних Јакобијевих поља, што је заправо димензија потпростора $\mathcal{J}_{ab}(\gamma) = \mathcal{J}_a(\gamma) \cap \mathcal{J}_b(\gamma)$.

Често се каже да су тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ **конјуговане** дуж γ ако су a и b конјуговани параметри дуж γ . Међутим, ако γ има самопресеке, ова дефиниција постаје двосмислена јер не знамо који простор $\mathcal{J}_a(\gamma)$ треба узети за тачку $\gamma(a)$ у случају да важи $\gamma^{-1}(\gamma(a)) \neq \{a\}$.

Пример 7.2. Посматрајмо псеудо-еуклидски простор $\mathbb{R}^n$, где $\mathcal{R} = 0$ доноси Јакобијеву једначину $J'' = 0$. Случај $J(a) = 0 = J(b)$ повлачи $J \equiv 0$, те конјуговане тачке не постоје. $\triangle$

Размотримо тангентно Јакобијево поље J дато са $J(t) = (t - a)\gamma'(t)$. Како је γ' свуда ненула, важи $J \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ и $J \notin \mathcal{J}_b(\gamma)$ за $b \neq a$. Одавде је $\dim \mathcal{J}_{ab}(\gamma) < \dim \mathcal{J}_a(\gamma) = n$, што повлачи да вишеструкосћ конјугације не прелази $n - 1$. Горња граница се може достићи, што видимо у наредном примеру.

Пример 7.3. Размотримо јединичну сферу $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, што је простор константне секционе кривине 1. На основу Примера 7.1 знамо да $J(t) = (\sin t)E(t)$ задовољава $J \in \mathcal{J}_0(\gamma)$ за произвољно паралелно јединично нормално векторско поље $E \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Штавише, такво J задовољава $J(\pi) = 0$, те је зато $J \in \mathcal{J}_{0\pi}(\gamma)$, што значи да су $\gamma(0)$ и њена антиподална тачка $\gamma(\pi)$ конјуговане дуж γ са вишеструкосћу $n - 1$. $\triangle$

Теорема 7.6. Нека је $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ геодезијски семен у псеудо-Римановој многострукости M тако да је $p = \gamma(0)$ и $V = \gamma'(0) \in \mathcal{E}_p \subseteq T_p M$. Тачка $\gamma(1)$ је конјугована са p дуж γ ако и само ако је V критична тачка од $\exp_p$. Штавише, вишеструкосћ конјугације једнака је $\dim \text{Ker}(T_V \exp_p)$.

Доказ. Размотримо произвољно $J \in \mathcal{J}_{01}(\gamma)$. Како је $\mathcal{J}_{01}(\gamma) \subseteq \mathcal{J}_0(\gamma)$ имамо $J = J_0^X$ за неко $X = J'(0) \in T_p M$, где једначина (7.3) повлачи $(T_V \exp_p)(X_V) = J(1) = 0$. Зато је $J_0^X \in \mathcal{J}_{01}(\gamma)$ ако и само ако је $X_V \in \text{Ker}(T_V \exp_p)$, те Лема 7.5 комплетира доказ. $\square$

Напоменимо да репараметризацијом $\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1)$ из Леме 5.12 имамо да су $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ конјуговане дуж γ ако и само ако је $t\gamma'(0)$ критична тачка од $\exp_p$.

На основу Теореме 7.2, јединствено Јакобијево поље је природно одређено својом почетном вредношћу и почетним изводом. Међутим, ако тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ нису конјуговане, онда можемо одредити јединствено Јакобијево поље тако што задамо $J(a)$ и $J(b)$.

Теорема 7.7. Нека је $\gamma: I \rightarrow M$ геодезијска у псеудо-Римановој многострукости M . Ако $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ за различите $a, b \in I$ нису конјуговане дуж γ , онда за свако $X \in T_{\gamma(a)}M$ и $Y \in T_{\gamma(b)}M$ постоји јединствено $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ такво да важи $J(a) = X$ и $J(b) = Y$.

Доказ. Дефинишимо линеарно пресликавање $f: \mathcal{J}_a(\gamma) \rightarrow T_{\gamma(b)}$ са $f(J) = J(b)$. Како a и b нису конјуговани параметри, $J(b) = 0$ повлачи $J \equiv 0$, што значи да је f инјективно. Како су и домен и кодомен од f исте димензије n , то је f изоморфизам. Зато постоји $J_1 \in \mathcal{J}_a(\gamma)$ такво да је $J_1(b) = Y$. Сасвим слично, постоји $J_2 \in \mathcal{J}_b(\gamma)$ такво да је $J_2(a) = X$, те $J = J_1 + J_2 \in \mathcal{J}(\gamma)$ задовољава $J(a) = X$ и $J(b) = Y$, као што је тражено. Ако је $K \in \mathcal{J}(\gamma)$ друго такво Јакобијево поље, онда $J - K \in \mathcal{J}(\gamma)$ ишчезава и у a и у b , те добијемо $J \equiv K$, што доказује јединственост. $\square$

7.2 Псеудо-Риманове подмногострукости

Нека је $(\bar{M}, \bar{g})$ псеудо-Риманова многострукост, а (M, g) њена псеудо-Риманова подмногострукост. Ако је $\iota: M \hookrightarrow \bar{M}$ одговарајућа инклузија, онда је она псеудо-Риманова имерзија и M је опремљена индукованом метриком $g = \iota^* \bar{g}$. Желимо да истражимо релације између псеудо-Риманове геометрије од подмногострукости и оне од амбијентне многострукости.

За свако $p \in M$, тангентни простор $T_p M$ је недегенерисани потпростор квадратног векторског простора $(T_p \bar{M}, \bar{g}_p)$, као што је то и његов ортогонал $N_p M = (T_p M)^\perp$ који зовемо **нормални њпростор** у p . Зато се амбијентни тангентни простор раставља као ортогонална директна сума

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus N_p M$$

са одговарајућим пројекцијама $\pi^\top: T_p \bar{M} \rightarrow T_p M$ и $\pi^\perp: T_p \bar{M} \rightarrow N_p M$, те свако $X \in T_p \bar{M}$ има јединствено изражавање $X = X^\top + X^\perp$, где су $X^\top = \pi^\top X \in T_p M$, $X^\perp = \pi^\perp X \in N_p M$.

Размотримо **амбијентно ѡаніеніно раслојење**

$$T\bar{M}|_M = \bigsqcup_{p \in M} T_p \bar{M},$$

што је векторско раслојење као рестрикција од $T\bar{M}$ (Пример 3.3). За дату тачку $p \in M$, постоји околина U од p у M која је смештена у $\bar{M}$, те можемо искористити кришка координате из Теореме 2.13 да направимо ортонормирани покретни репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\dim \bar{M}})$ који је прилагођен U у смислу да рестрикције од σ_i на U за $1 \leq i \leq \dim M$ формирају локални ортонормирани покретни репер за M . Рестрикција последњих $\dim \bar{M} - \dim M$ векторских поља σ_i на M за $\dim M < i \leq \dim \bar{M}$ формира локални покретни репер за $NM = \bigsqcup_{p \in M} N_p \bar{M}$, што по Теореме 3.2 постаје подраслојење које зовемо **нормално раслојење** од M .

Применом $\pi^\top$ и $\pi^\perp$ у свакој тачки од M , добијамо два хомоморфизма раслојења, **ѡаніеніну ѡројекцију** $\pi^\top: T\bar{M}|_M \rightarrow TM$ и **нормалну ѡројекцију** $\pi^\perp: T\bar{M}|_M \rightarrow NM$. Са друге стране, глатка сечења $\bar{x}(M) = \bar{x}(\bar{M})|_M = \Gamma(T\bar{M}|_M)$ амбијентног тангентног раслојења могу се раставити са

$$\bar{x}(M) = \bar{x}(M) \oplus \bar{x}(M)^\perp, \quad (7.5)$$

где је $\bar{x}(M)^\perp = \Gamma(NM)$ скуп глатких сечења нормалног раслојења. Одавде, $\bar{x}(M)$ и $\bar{x}(M)^\perp$ можемо видети као подмодуле од $\bar{x}(M)$, док тангентне и нормалне пројекције доносе одговарајуће пројекције модула које растављају $X \in \bar{x}(M)$ као $X = X^\top + X^\perp$ са $X^\top \in \bar{x}(M)$ и $X^\perp \in \bar{x}(M)^\perp$.

Нека је $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност на $(\bar{M}, \bar{g})$, а ∇ Леви-Чивита повезаност на (M, g) . За свако $p \in M$ и $X \in \bar{x}(M)$ постоји околина $p \in U \subseteq M$ и продужење $\bar{X} \in \bar{x}(\bar{M})$ од $X|_U$. Због локалних особина повезаности (Теорема 5.1), одговарајућа рестрикција дуж M од $\bar{\nabla}_X \bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})|_M \in \bar{x}(M)$ не зависи од продужења $\bar{X}, \bar{Y} \in \bar{x}(\bar{M})$ за $X, Y \in \bar{x}(M)$. Природно се поставља питање како се $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ раставља са (7.5) на тангентну и нормалну компоненту.

Пођимо од $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ и њихових продужења $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. Применом Козилове формуле (5.10) за $\bar{\nabla}$, дуж M за свако $Z \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$2g((\bar{\nabla}_X Y)^\top, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]).$$

Дакле, тангентни део је Леви-Чивита повезаност, те како је она јединствена добијамо

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y.$$

Са друге стране, симетричност повезаности $\bar{\nabla}$ повлачи да је $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ симетрично јер важи $(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp = 0$. Како је $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по X , оно мора бити $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно по Y . **Друја основна форма** (или **тензор облика**) је пресликавање $\Pi: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ које дефинишемо са $\Pi(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$. У питању је симетрично $\mathfrak{F}(M)$ -билинеарно пресликавање, такво да за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо растављање

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y), \quad (7.6)$$

које зовемо **Гаусова формула**.

За свако $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, другу основну форму Π чије су вредности вектори можемо заменити једноставнијом формом $h_N \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ која је дата са

$$h_N(X, Y) = g(\Pi(X, Y), N),$$

и зовемо је **скаларна друја основна форма** од M у односу на N .

Дизањем индекса добијамо тензорско поље $A_N = (h_N)^\sharp \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ које се може посматрати као $\mathfrak{F}(M)$ -линеарно пресликавање $A_N: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ задато формулом $A_N(X)f = (h_N)^\sharp(df, X)$, што значи да природно важи $(h_N)^\sharp(\omega, X) = \omega(s(X))$. Пресликавање A_N зовемо **ојерајтор облика** у односу на $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, а како је

$$h_N(X, Y) = (h_N)^\sharp(X^\flat, Y) = \sum_i X_i (h_N)^\sharp(dx_i, Y) = \sum_{ij} g_{ij} dx_j(X) dx_i(A_N Y) = g(X, A_N Y),$$

то за све $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ важи

$$g(X, A_N Y) = h_N(X, Y) = g(\Pi(X, Y), N).$$

Како је h_N симетричан, A_N је самоадјунгован, те је зато $g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$.

У општијем случају посматрамо повезаност $\bar{\nabla}$ коју рестрикујемо на M као пресликавање $\bar{\nabla}|_M: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. За $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ и $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, дуж M имамо $\bar{g}(Y, N) = 0$, те је

$$0 = X\bar{g}(Y, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X N) = \bar{g}(\Pi(X, Y), N) + \bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y),$$

одакле следи једнакост

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y) = -\bar{g}(\Pi(X, Y), N) = -h_N(X, Y) = -g(A_N X, Y). \quad (7.7)$$

која је позната под именом **Вајнгартенова формула**¹. Зато је тангентна компонента од $\bar{\nabla}_X N$ једнака $-A_N X$. Са друге стране, нормална компонента $\nabla_X^\perp N = (\bar{\nabla}_X N)^\perp$ дефинише компатибилну повезаност на нормалном раслојењу NM , коју зовемо **нормална повезаност**. Одавде се Вајнгартенова формула може записати са

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N. \quad (7.8)$$

¹Julius Weingarten (1836–1910), немачки математичар

Занимљиво је посматрати везу између одговарајућих оператора кривине $\bar{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{R}$, или између тензора кривине $\bar{R}$ и R . Користимо Гаусову формулу (7.6) и Вајнгартенову формулу (7.8) да запишемо

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X \Pi(Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z + \Pi(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^\perp \Pi(Y, Z) - A_{\Pi(Y, Z)} X$$

за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, те одатле имамо

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \Pi(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^\perp (\Pi(Y, Z)) - A_{\Pi(Y, Z)} X \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - \Pi(Y, \nabla_X Z) - \nabla_Y^\perp (\Pi(X, Z)) + A_{\Pi(X, Z)} Y \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \Pi(\nabla_X Y, Z) - \Pi(\nabla_Y X, Z) \\ &= \mathcal{R}(X, Y)Z + A_{\Pi(X, Z)} Y - A_{\Pi(Y, Z)} X + (\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \Pi)(X, Z), \end{aligned}$$

где је

$$(\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) = \nabla_X^\perp (\Pi(Y, Z)) - \Pi(\nabla_X Y, Z) - \Pi(Y, \nabla_X Z).$$

Тангентна компонента је

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z)^\top = \mathcal{R}(X, Y)Z + A_{\Pi(X, Z)} Y - A_{\Pi(Y, Z)} X,$$

што након узимања скаларног производа са $W \in \mathfrak{X}(M)$ доноси **Гаусову једначину**,

$$\bar{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + \bar{g}(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) - \bar{g}(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z)). \quad (7.9)$$

Нормална компонента је **Кодаџијева једначина**² (или **Кодаџи-Мајнардијева једначина**³),

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \Pi)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \Pi)(X, Z).$$

Са друге стране, за $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ имамо

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N = \bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp N - \bar{\nabla}_X A_N Y = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp N - A_{\nabla_Y^\perp N} X - \nabla_X A_N Y - \Pi(X, A_N Y),$$

одакле је

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}(X, Y)N &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N - \bar{\nabla}_{[X, Y]} N \\ &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp N - A_{\nabla_Y^\perp N} X - \nabla_X A_N Y - \Pi(X, A_N Y) \\ &\quad - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp N + A_{\nabla_X^\perp N} Y + \nabla_Y A_N X + \Pi(Y, A_N X) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]}^\perp N + A_N \nabla_X Y - A_N \nabla_Y X \\ &= \mathcal{R}^\perp(X, Y)N + \Pi(Y, A_N X) - \Pi(X, A_N Y) + (\nabla_Y A)(X, N) - (\nabla_X A)(Y, N), \end{aligned}$$

где је

$$(\nabla_Y A)(X, N) = \nabla_Y A_N X - A_N \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp N} X.$$

Тангентна компонента доноси

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)N)^\top = (\nabla_Y A)(X, N) - (\nabla_X A)(Y, N),$$

што је еквивалентно Кодаџијевој једначини. Нормална компонента се зове **Ричи-јева једначина**,

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)N)^\perp = \mathcal{R}^\perp(X, Y)N - \Pi(X, A_N Y) + \Pi(Y, A_N X).$$

²Delfino Codazzi (1824–1873), италијански математичар

³Gaspard Mainardi (1800–1879), италијански математичар

Узимајући скаларни производ са $P \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, имамо

$$\bar{R}(X, Y, N, P) = R^\perp(X, Y, N, P) - g([A_N, A_P]X, Y), \quad (7.10)$$

што је такође Ричијева једначина.

Гаусова једначина је тензорска једначина, тако да остаје валидна кад заменимо векторска поља индивидуалним тангентним векторима. Употреба Гаусове једначине у дефиницији секционе кривине даје наредне везе између секционих кривина $\bar{\kappa}$ од $\bar{M}$ и κ од M , што такође зовемо **Гаусова једначина**,

$$\kappa(X, Y) = \bar{\kappa}(X, Y) + \frac{\bar{g}(\Pi(X, X), \Pi(Y, Y)) - \bar{g}(\Pi(X, Y), \Pi(X, Y))}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \quad (7.11)$$

Пример 7.4. Позиционо векторско поље $N = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$ на сфери $\mathbf{S}_r^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ је нормално у свакој тачки $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{S}_r^{n-1}$ као последица Леме 2.16. Са друге стране, за Леви-Чивита повезаност $\bar{\nabla}$ у $\mathbb{R}^n$, за свако $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}_r^{n-1})$ имамо $\bar{\nabla}_X N = \sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i = X$. Формула (7.7) повлачи $g(\Pi(X, Y), N) = -g(\bar{\nabla}_X N, Y) = -g(X, Y)$, те због $\varepsilon_N = r^2$ добијамо да важи $\Pi(X, Y) = -g(X, Y)N/r^2$. Коначно, једначина (7.11) за $\bar{\kappa} = 0$, доноси $\kappa = 1/r^2$. $\triangle$

Гаусова формула (7.6), може се прилагодити да би се упоредили унутрашњи и спољашњи коваријантни изводи дуж криве. За криву $\gamma: I \rightarrow M$ и $Y \in \mathfrak{X}(M)$ имамо

$$\bar{\nabla}_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{\gamma'(t)} Y + \Pi(\gamma'(t), Y \circ \gamma(t)),$$

одакле следи

$$\frac{\bar{\nabla} Y_\gamma}{dt}(t) = \frac{\nabla Y_\gamma}{dt}(t) + \Pi(\gamma'(t), Y_\gamma(t)).$$

У специјалном случају $Y_\gamma = \gamma'$, добијамо формулу за убрзање од γ ,

$$\frac{\bar{\nabla} \gamma'}{dt} = \frac{\nabla \gamma'}{dt} + \Pi(\gamma', \gamma'). \quad (7.12)$$

Као последица претходне једначине, крива γ у $M \subset \bar{M}$ је геодезијска од M ако и само ако је њено убрзање у $\bar{M}$ свуда нормално на M .

Пример 7.5. Велики круи на сфери $\mathbf{S}_r^n$ је круг $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$ који се добија у пресеку са димензионом равни Π која пролази кроз координатни почетак у $\mathbb{R}^{n+1}$. Ако је γ параметризација константне брзине од $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$, тада су γ' и γ'' међусобно ортогонални и тангентни на Π . Међутим, позиционо векторско поље је такође тангентно на Π и ортогонално на $\gamma' \neq 0$, те су позиционо векторско поље и γ'' колинеарни у свакој тачки криве, односно γ'' је нормално на $\mathbf{S}_r^n$ и самим тим γ је геодезијска на сфери. Обратно, свака неконстантна геодезијска γ се може добити на овакав начин. Ако је Π раван кроз координатни почетак и $\gamma(0)$ на коју је $\gamma'(0)$ тангентно, онда постоји одговарајућа параметризација константне брзине од $\Pi \cap \mathbf{S}_r^n$ и остатак следи из јединствености геодезијске. $\triangle$

За псеудо-Риманову подмногострукост M псеудо-Риманове многострукости $(\bar{M}, \bar{g})$ кажемо да је **попуно геодезијска** ако је свака геодезијска у M такође геодезијска у $\bar{M}$. Из формуле (7.12) закључујемо да је M потпуно геодезијска ако и само ако се друга основна форма Π анулира.

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост. Посматрајмо скуп свих фиксних тачака $\Phi = \{p \in M : f(p) = p\}$ при изометрији $f \in \mathcal{I}(M)$. Како је Φ инверзна слика дијагонале у $M \times M$ глатког пресликавања $p \mapsto (p, f(p))$, то је $\Phi \subseteq M$ затворен. Ако $p \in \Phi$ није изолована, то постоји нормална околина $U = \exp_p(\mathcal{U})$ од p која садржи неко $p \neq q \in \Phi$. Ако је γ_p јединствена радијална геодезијска из p у q , онда је то и

$\gamma_{T_p f(V)} = f \circ \gamma_V$ из (6.10), одакле следи $\gamma_{T_p f(V)} = \gamma_V$. Зато је $\Psi = \{V \in T_p M : T_p f(V) = V\}$ затворен нетривијалан потпростор од $T_p M$.

За $q \in \Phi \cap \mathcal{U}$, радијална геодезијска из p у q је γ_V где је $V = \exp_p^{-1} q$ и зато $V \in \Psi$. Обратно, за $V \in \Psi \cap \mathcal{U}$ имамо $f \circ \gamma_V = \gamma_{T_p f(V)} = \gamma_V$ одакле је $f \circ \gamma_V(1) = \gamma_V(1) = \exp_p(V) \in \Phi$. То доказује $\exp_p(\Psi \cap \mathcal{U}) = \Phi \cap \mathcal{U}$, што значи да је Φ подмногострукост од M , а како свака радијална геодезијска γ кроз $p \in \Phi$ задовољава $f \circ \gamma = \gamma$, то је Φ потпуно геодезијска.

Теорема 7.8. *Свака повезана компонента скупа фиксних тачака при изометрији псеудо-Риманове многострукости M је потпуно геодезијска подмногострукост од M .*

Псеудо-Риманова хиперповрш је псеудо-Риманова подмногострукост кодимензије један. Нека је (M, g) псеудо-Риманова хиперповрш у $(\bar{M}, \bar{g})$. По дефиницији, сваки тангентни простор $T_p M$ је недегенерисан потпростор од $T_p \bar{M}$ који има константан индекс, те је његов комплементаран простор $N_p M$ такође недегенерисан, и за његов константни индекс $\text{Ind } N_p M$ кажемо да је **коиндекс** од M . Коиндекс псеудо-Риманове хиперповрши је или 0 или 1 и он одређује **знак** од M , што је знак сваког ненула нормалног вектора. Због тога коиндекс 0 ($\text{Ind } M = \text{Ind } \bar{M}$) даје $\text{sgn } M = 1$, док коиндекс 1 ($\text{Ind } M = \text{Ind } \bar{M} - 1$) даје $\text{sgn } M = -1$. Наравно, свака хиперповрш у Римановој многострукости је Риманова са знаком 1.

Пример 7.6. Посматрајмо случај $\emptyset \neq M = f^{-1}(c)$ за неко $f \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ и $c \in \mathbb{R}$ тако да је $\text{grad } f$ свуда ненула на M . Како $\text{grad } f \neq 0$ на M повлачи $df \neq 0$ на M , видимо да је M регуларни скуп нивоа и по Теорему 2.15, M је хиперповрш од $\bar{M}$. Како је $g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf$, а $f = c$ на M , то је $\text{grad } f$ нормалан на M . Зато је M псеудо-Риманова хиперповрш од $\bar{M}$ ако и само ако $g(\text{grad } f, \text{grad } f)$ има константан знак на M . У том случају знак од M је константни знак од $g(\text{grad } f, \text{grad } f)$ а $\text{grad } f / \|\text{grad } f\|$ је јединично нормално векторско поље на M . $\triangle$

Пример 7.7. Основни примери псеудо-Риманових хиперповрши у $\mathbb{R}_v^{n+1}$ су псеудо-сфере и псеудо-хиперболички простори из Секције 4.6 који су за неко $c \neq 0$ задати са $M = \{X \in \mathbb{R}_v^{n+1} : g(X, X) = c\} = f^{-1}(\{c\})$, где је $f(X) = g(X, X)$. Од раније знамо $df_X = 2X^\flat$ што даје $\text{grad } f = 2P$, где је $P = \sum_i x_i \partial_i$ позиционо векторско поље. Последиично, $g(\text{grad } f, \text{grad } f) = 4g(P, P) = 4f$, што даје $g(\text{grad } f, \text{grad } f) = 4c$ на M , те је M псеудо-Риманова хиперповрш. $\triangle$

За хиперповрш $M \subset \bar{M}$, користимо јединично нормално векторско поље $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, што је локално јединствено до на знак. Кад њега фиксирамо, користимо нотацију $A = A_N$ за оператор облика у односу на N . Имамо $\Pi(X, Y) = \varepsilon_N h_N(X, Y)N$, док Гаусова формула (7.6) постаје

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N.$$

Са друге стране, како је $2g(\bar{\nabla}_X N, N) = \bar{\nabla}_X g(N, N) = 0$, следи да је $\bar{\nabla}_X N$ тангентно на M , те се Вајнгартенова формула (7.7) редукује на

$$\bar{\nabla}_X N = -AX.$$

Нека је M хиперповрш еуклидског простора. У свакој тачки $p \in M$, оператор облика s је самоадјунгован ендоморфизам тангентног простора $T_p M$. Такав оператор (важна је дефинитност метрике) има реалне сопствене вредности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и постоји ортонормирана база $(E_1, \dots, E_n)$ за $T_p M$ која се састоји од сопствених вектора за s , односно $sE_i = \lambda_i E_i$ за $1 \leq i \leq n$. У овој бази су и h и s дијагонални и имамо $h(X, Y) = \sum_i \lambda_i X^i Y^i$.

Сопствене вредности од s зовемо **главне кривине** од M у p , док су одговарајући сопствени потпростори **главни правци**. Они су независни од избора базе, али главне кривине мењају знак уколико окренемо нормалан вектор. Главне кривине дају опис локалног облика смештене површи.

На располагању имамо две комбинације главних кривина које имају важну улогу за еуклидске хиперповрши. Гаусова кривина је дефинисана са $K = \det s$, док је средња кривина $H = \operatorname{tr} s/n = \operatorname{tr}_g h/n$. Детерминанта и траг су инваријанте, те у терминима главних кривина имамо $K = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ и $H = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)/n$.

7.3 Симетрични простори

Главна одлика најлепших и најважнијих псеудо-Риманових многострукости је висока симетричност (имају велику групу изометрија). Повезана псеудо-Риманова многострукост (M, g) је **локално симетричан простор** ако је свако $p \in M$ изолована фиксна тачка неке инволутивне локалне изометрије од M . У питању је (глобално) **симетричан простор** ако је свако $p \in M$ изолована фиксна тачка инволутивне изометрије од M .

Претпоставимо да постоји инволутивна изометрија $s \in \mathcal{I}_p(U)$ са $p \in U \subseteq M$ којој је p изолована фиксна тачка. Тада из $s^2 = \mathbb{1}_U$ следи $(T_p s)^2 = \mathbb{1}_{T_p M}$, што након одузимања $\lambda^2 \mathbb{1}$ постаје

$$(T_p s - \lambda \mathbb{1})(T_p s + \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda^2) \mathbb{1},$$

те узимањем детерминанте видимо да карактеристични полином од $T_p s$ по λ дели полином $(1 - \lambda)^n(1 + \lambda)^n$. Међутим, случај $\det(T_p s - \mathbb{1}) = 0$ није могућ јер тада постоји ненула $V \in T_p M$ такво да је $T_p s(V) = V$, одакле (6.11) повлачи да је $\gamma_V(t) = \exp_p tV$ фиксна тачка од s за свако довољно мало t , што је у супротности са тим да је p изолована фиксна тачка. Због тога је -1 једина сопствена вредност од $T_p s$, односно $\det(T_p s - \lambda \mathbb{1}) = (1 + \lambda)^n$, што даје $(T_p s + \mathbb{1})^n = 0$. Штавише,

$$0 = (T_p s + \mathbb{1})^n = (T_p s + \mathbb{1})^{n-2}((T_p s)^2 + 2T_p s + \mathbb{1}) = 2(T_p s + \mathbb{1})^{n-1} = 2^{n-1}(T_p s + \mathbb{1}),$$

одакле добијамо $T_p s = -\mathbb{1}$.

Услов $T_p s = -\mathbb{1}$ по формули (6.11) даје $s(\exp_p(V)) = \exp_{s(p)}(T_p s(V)) = \exp_p(-V)$ за $V \in T_p M$, што једнозначно одређује s . Видимо да s окреће геодезијске које извиру из p јер важи $s(\gamma_V(t)) = \gamma_V(-t)$, што нас мотивише да уведемо наредну дефиницију. **Геодезијска симетрија** у $p \in M$ је дифеоморфизам f неке околине од p који фиксира ту тачку ($f(p) = p$) и окреће геодезијске кроз њу, односно $f(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ важи за геодезијску γ са $\gamma(0) = p$. За сада смо показали да наша инволутивна изометрија s јесте геодезијска симетрија.

Обратно, претпоставимо да је f геодезијска симетрија у $p \in M$. Одмах је $T_p f = -\mathbb{1}$ јер имамо $T_p f(V) = (f \circ \gamma_V)'(0) = (\gamma_{-V})'(0) = -V$. Ако је f изометрија на некој околини $U \subseteq M$ тачке p , онда је по Теорему 7.8 скуп свих фиксних тачака од f потпуно геодезијска подмногострукост P од M чији је тангентни простор у p скуп свих фиксних тачака од $T_p f$ из $T_p M$. Из $T_p f = -\mathbb{1}$ следи $T_p P = \{0\}$, те је P дискретно. Штавише, f^2 је изометрија са $f^2(p) = p$ и $T_p f^2 = \mathbb{1}$, те мора бити $f^2 = \mathbb{1}$. Зато је f инволутивна изометрија којој је p изолована фиксна тачка, одакле добијамо наредно тврђење.

Теорема 7.9. *Псеудо-Риманова многострукост је локално симетричан простор ако и само ако је геодезијска симетрија у свакој тачки локална изометрија.*

Симетричан простор има особину да се геодезијска симетрија у свакој тачки проужава на изометрију целокупног простора на себе. Симетрични простори се могу посматрати на много различитих начина. Алгебарски опис омогућио је Картану⁴ да развије теорију Риманових симетричних простора уједињену са теоријом полупростих Лијевих група што је водило до потпуне класификације из 1926. године [32, 33].

⁴Élie Cartan (1869–1951), француски математичар

Једна софистицирана инваријанта симетричног простора је **ранг**, што је максимална димензија потпуно геодезијске равне подмногострукости. Ранг је увек барем један, док једнакост важи кад су максималне равне подмногострукости геодезијске, те је у том случају секциона кривина или позитивна (компактан тип простора) или негативна (некомпактан тип простора). Међу псеудо-Римановим симетричним просторима, они са рангом један су посебно занимљиви.

Са друге стране, можемо посматрати космологијски принцип који каже да је просторна дистрибуција материје у универзуму хомогена и изотропна на довољно великој скали. Хомогена псеудо-Риманова многострукост изгледа геометријски исто кад је посматрамо из сваке тачке, док изотропна има геометрију која не зависи од праваца посматрања.

Теорема 7.10. *Хомогена Риманова мнојосџрукосџ је комџлеџна.*

Доказ. Нека је $\gamma_V: I \rightarrow M$ максимална геодезијска јединичне брзине која не може да се продужи, што значи: $0 \in I$, $\gamma'_V(0) = V$, $\|V\| = 1$ и $a = \sup I < \infty$. За произвољну тачку $p \in M$, постоји довољно мало $0 < r < a$ такво да је $B_{2r}(p)$ геодезијска кугла. Посматрајмо изометрију $f: M \rightarrow M$ која слика $\gamma_V(a-r)$ у p , те нека је $W = (T_{\gamma_V(a-r)}f)(\gamma'_V(a-r))$. Изометрија чува геодезијске, те по формули (6.10) важи $f \circ \gamma_{\gamma'_V(a-r)} = \gamma_W$, што је дефинисано барем на $(-2r, 2r)$. Зато $(-2r, 2r)$ припада домену од $\gamma_{\gamma'_V(a-r)} = f^{-1} \circ \gamma_W$, али како је $\gamma_V(t) = \gamma_{\gamma'_V(a-r)}(t+r-a)$ за $t \in [0, a)$, то се γ_V продужава на $I \cup [a, a+r)$, што је контрадикција. Овим смо показали да је хомогена Риманова многострукост геодезијски комплетна, те је по Хопф-Ринов теореме комплетна. $\square$

Међутим, хомогена псеудо-Риманова многострукост не мора бити комплетна, што видимо у наредном примеру.

Пример 7.8. Нека је M десна полураван $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ са Лоренцовом метриком $g = 2du dv$. Произвољно $(a, b) \in M$ се изометријом $(u, v) \mapsto (u/a, av)$ пресликава у $(1, ab)$, што се даље изометријом $(u, v) \mapsto (u, v - ab)$ пресликава у $(1, 0)$, што доказује да је (M, g) хомогена. Међутим, изотропна геодезијска $\gamma(t) = (t, 0)$ има максималан домен $(0, \infty)$, те (M, g) није комплетна. $\triangle$

Риманова многострукост M је **две-џачке хомогена** ако се сваки пар тачака може трансформисати у смислу одговарајуће изометрије у било који пар тачака са истим растојањем између њих. То значи да група изометрија $\mathcal{I}(M)$ дејствује транзитивно на еквидистантним паровима тачака. Специјалан случај, кад је прва тачка у пару фиксирана доказује да је две-тачке хомоген M хомоген и посебно комплетан. Међутим, важи наредна теорема коју је дао Волф⁵ [124, Лема 8.12.1].

Теорема 7.11. *Повезана Риманова мнојосџрукосџ је изоџтропна ако и само ако је две-џачке хомогена.*

Доказ. Нека је M две-тачке хомогена, $B_r(p)$ геодезијска кугла центрирана у $p \in M$ и $0 < \varepsilon < r$. За произвољно $X, Y \in S_1(0_p)$ је $d(p, \exp_p \varepsilon X) = d(p, \exp_p \varepsilon Y)$, те постоји $f \in \mathcal{I}(M)$ такво да важи $f(p) = p$ и $f(\exp_p \varepsilon X) = \exp_p \varepsilon Y$, али из (6.11) је $f(\exp_p \varepsilon X) = \exp_p(f_*(\varepsilon X))$, одакле следи $f_*(\varepsilon X) = \varepsilon Y$, те и $f_*X = Y$, што значи да је M изотропна.

Нека је M изотропно. За произвољну геодезијску γ_V са $p \in M$, $V \in T_p M$ постоји изометрија $f \in \mathcal{I}_p$ која је окреће, $f_*V = -V$, те је M комплетно и хомогено. Посматрајмо $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ са $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$. Из хомогености постоји $f_1 \in \mathcal{I}(M)$ са $f_1(x_2) = x_1$. Из комплетности, имамо минимизујуће геодезијске $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}: [0, 1] \rightarrow M$ такве да важи $y_1 = \exp_{x_1}(X_1)$ и $f_1(y_2) = \exp_{x_1}(X_2)$. Због $\|X_1\| = d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2) = d(x_1, f_1 y_2) = \|X_2\|$, изотропност доноси $f_2 \in \mathcal{I}_{x_1}(M)$ са $f_{2*}X_2 = X_1$. Добијамо $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{I}(M)$ за које важи

⁵Joseph Albert Wolf (1936), амерички математичар

$f_2 f_1(x_2) = f_2(x_1) = x_1$ и $f_2 f_1(y_2) = f_2 \exp_{x_1}(X_2) = \exp_{f_2 x_1}(f_{2*} X_2) = \exp_{x_1}(X_1) = y_1$, што доказује да је M две-тачке хомоген. $\square$

Две-тачке хомогени простори су најпре изучавали Бусеман⁶ 1942. [31] и Биркхоф⁷ 1944. године [21]. Позната је потпуна класификација ових простора, компактне је класификовао Ванг⁸ 1952. [122], док је некомпактне решио Титс⁹ 1955. године [117]. Као последица класификације, познато је да је локално две-тачке хомогена Риманова многострукост или равна или локално изометрична симетричном простору ранга један (видети Хелгасон¹⁰ [70, р.535]). За детаље о две-тачке хомогеним просторима препоручујемо Волфа [124, стр.293–300] и Хелгасона [70, стр.535].

Теорема 7.12. *Две-тачке хомогене повезане Риманове многострукости су изометричне (до на хомотетију) неком од следећих : еуклидски простор; сфера; реални, комплексни или кватернионски, пројективни или хиперболички простор; или Кејлијева¹¹ пројективна или хиперболичка равна.*

Прецизније речено, класификација две-тачке хомогених простора је следећа:

- $\mathbb{R}^n = \mathbf{E}(n)/\mathbf{O}(n)$ за $n \geq 1$, еуклидски простор;
- $\mathbf{S}^n = \mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$ за $n \geq 1$, сфера;
- $\mathbb{R}\mathbf{P}^n = \mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{O}(n)$ за $n \geq 2$, реални пројективни простор;
- $\mathbb{C}\mathbf{P}^n = \mathbf{SU}(n+1)/\mathbf{U}(n)$ за $n \geq 2$, комплексни пројективни простор;
- $\mathbb{H}\mathbf{P}^n = \mathbf{Sp}(n+1)/\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ за $n \geq 2$, кватернионски пројективни простор;
- $\mathbf{O}\mathbf{P}^2 = \mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9)$, Кејлијева пројективна равна;
- $\mathbb{R}\mathbf{H}^n = \mathbf{SO}^1(n+1)/\mathbf{SO}(n)$ за $n \geq 2$, реални хиперболички простор;
- $\mathbb{C}\mathbf{H}^n = \mathbf{SU}^1(n+1)/\mathbf{U}(n)$ за $n \geq 2$, комплексни хиперболички простор;
- $\mathbb{H}\mathbf{H}^n = \mathbf{Sp}^1(n+1)/\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ за $n \geq 2$, кватернионски хиперболички простор;
- $\mathbf{O}\mathbf{H}^2 = \mathbf{F}_4^*/\mathbf{Spin}(9)$, Кејлијева хиперболичка равна.

Међутим, згодно је приметити да постоје следећи изоморфизми (изометрије до на хомотетију) у малим димензијама: $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^1$, $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^2$, $\mathbb{H}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^4$, $\mathbf{O}\mathbf{P}^1 \cong \mathbf{S}^8$, $\mathbb{C}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^2$, $\mathbb{H}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^4$, $\mathbf{O}\mathbf{H}^1 \cong \mathbb{R}\mathbf{H}^8$.

⁶Herbert Busemann (1905–1994), немачко-амерички математичар

⁷Garrett Birkhoff (1911–1996), амерички математичар

⁸Hsien Chung Wang (1918–1978), кинеско-амерички математичар

⁹Jacques Tits (1930), белгијско-француски математичар

¹⁰Sigurdur Helgason (1927), исландски математичар

¹¹Arthur Cayley (1821–1895), британски математичар

ОСЕРМАНОВИ ТЕНЗОРИ

8.1 Осерманови услови

Нека је R алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Карактеристични полином Јакобијевог оператора означавамо са

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X).$$

Кажемо да је R **временски Осерманов** ако ω_X не зависи од јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Кажемо да је R **ипросјорно Осерманов** ако ω_X не зависи од јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$. Природно, R је **Осерманов** ако је и временски и просторно Осерманов. Међутим, испоставља се да су временско Осерманов и просторно Осерманов еквивалентне особине (видети Теорему 8.1).

Осерманов услов је еквивалентан константности (могуће комплексних) сопствених вредности Јакобијевих оператора рачунајући вишеструкости. Првобитно је био успостављен у позитивно дефинитном случају, што омогућава дијагонализацију Јакобијевог оператора као самоадјунгованог оператора. Међутим, за недефинитан скаларни производ, сопствена структура самоадјунгованог оператора није одређена његовим карактеристичним полиномом (у општем случају, Јакобијеви оператори нису дијагонализабилни), те Жорданова нормална форма преузима кључну улогу (видети Секцију А.3).

Даља уопштења Осерманових услова у тачки тичу се сопствене структуре Јакобијевих оператора. Кажемо да је R **временски Жордан-Осерманов** ако Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног временског $X \in \mathcal{V}$. Кажемо да је R **ипросјорно Жордан-Осерманов** ако Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ не зависи од јединичног просторног $X \in \mathcal{V}$. Као и раније, R је **Жордан-Осерманов** ако је и временски и просторно Жордан-Осерманов. Временски и просторни Жордан-Осерманови услови, за разлику од оригиналних Осерманових услова, нису еквивалентни (видети Теорему 8.21).

Најједноставнији случај Жордан-Осермановог R за недефинитно g тиче се дијагонализабилних Јакобијевих оператора, што значи да се одговарајућа Жорданова нормална форма састоји од $\dim \mathcal{V}$ блокова величине један. Кажемо да је R **Јакоби-дијагонализабилан** ако за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база за $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_X$. Јакоби-дијагонализабилни алгебарски тензори кривине су најприближнији дефинитном случају. Међутим, овај услов је на неки начин природан, јер Жордан-Осерманов R који није Клајнов ($\dim \mathcal{V} \neq 2 \operatorname{Ind} g$) мора бити Јакоби-дијагонализабилан (видети Гилки и Иванова¹ [60]).

Кажемо да је алгебарски тензор кривине R **k -корена** ако редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно k различитих сопствених вредности (рачунајући комплексне

¹Raina B. Ivanova

корене) за сваки дефинитан $X \in \mathcal{V}$ (видети Андрејић [10]). Наравно, сваки Осерманов R је k -корена за неко фиксирано $k \in \mathbb{N}$.

Пример 8.1. Нека је $J: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ косоадјунгован ендоморфизам квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . На основу Примера 6.6, такво J генерише алгебарски тензор кривине $R^J \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ са (6.14). За одговарајући оператор кривине важи

$$\mathcal{R}^J(X, Y)Z = g(JX, Z)JY - g(JY, Z)JX + 2g(JX, Y)JZ,$$

одакле последично Јакобијев оператор задовољава

$$\mathcal{J}_X^J Y = \mathcal{R}^J(Y, X)X = 3g(JY, X)JX - g(JX, X)JY = -3g(Y, JX)JX,$$

односно

$$\mathcal{J}_X^J = \begin{cases} -3\varepsilon_{JX} \mathbb{1} & \text{на } \text{Span}\{JX\} \\ 0 & \text{на } \text{Span}\{JX\}^\perp \end{cases}.$$

Ако додатно претпоставимо да $J^2 = c \mathbb{1}$ важи за неку константу $c \in \mathbb{R}$, онда добијамо $\varepsilon_{JX} = g(JX, JX) = -g(X, J^2 X) = -c\varepsilon_X$. Јасно је да случај $c \neq 0$ повлачи

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X^J) = \lambda^{\dim \mathcal{V} - 1} (\lambda - 3c\varepsilon_X). \quad (8.1)$$

Случај $c = 0$ даје $\varepsilon_{JX} = 0$, те $\mathcal{J}_X^J$ ишчезава на $\text{Span}\{JX\} + \text{Span}\{JX\}^\perp = \text{Span}\{JX\}^\perp$. Ако је $JX = 0$ имамо $\mathcal{J}_X^J = 0$. У супротном је JX изотропан, $\text{Span}\{JX\}^\perp \leq \text{Ker}((\mathcal{J}_X^J)^n)$ је дегенерисан потпростор димензије $n - 1$, те Лема А.22 повлачи $\dim \text{Ker}((\mathcal{J}_X^J)^n) > n - 1$, што доноси $\text{Ker}((\mathcal{J}_X^J)^n) = \mathcal{V}$. То доказује да су све сопствене вредности нула у случају $c = 0$, те (8.1) важи у сваком случају. Формула (8.1) показује да је $\omega_X(\lambda)$ константно на псеудо-сферама, те је R^J Осерманов алгебарски тензор кривине.

Зато, сваки косоадјунговани ендоморфизам J за који је $J^2 = c \mathbb{1}$, генерише Осерманов алгебарски тензор кривине R^J . Посебно, сваки ортогонални косоадјунговани ендоморфизам ($c = -1$, комплексна структура која чува g) и сваки анти-ортогонални косоадјунговани ендоморфизам ($c = 1$, производ структура) доносе Осерманов алгебарски тензор кривине. $\triangle$

Нека је R просторно Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . Карактеристични полином Јакобијевог оператора $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$ не зависи од јединичног просторног X , те су коефицијенти од ω_X константни, одакле по (А.5) из Леме А.17 постоје константе $C_1, C_2, \dots, C_n$ такве да $\text{Tr}(\mathcal{J}_X^j) = C_j$ важи за свако $1 \leq j \leq n$ и сваки јединичан просторни X . Евидентно важи и обрат, те је R просторно Осерманов ако и само ако такве константе постоје. Како је

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = \text{Tr} \left(\sqrt{|\varepsilon_X|}^{2j} \left(\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}} \right)^j \right) = |\varepsilon_X|^j \text{Tr} \left(\left(\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}} \right)^j \right),$$

наше једначине се могу продужити за просторно X са

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j, \quad (8.2)$$

за свако $1 \leq j \leq n$.

Једначина $\mathcal{R}(Z, X + tY)(X + tY) = \mathcal{R}(Z, X)X + t(\mathcal{R}(Z, X)Y + \mathcal{R}(Z, Y)X) + t^2 \mathcal{R}(Z, Y)Y$ се може записати преко поларизованог Јакобијевог оператора са

$$\mathcal{J}_{X+tY} = \mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2 \mathcal{J}_Y$$

за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ и $t \in \mathbb{R}$.

Ако је X временски, $Y \in X^\perp$ просторан и $|t| > \sqrt{-\varepsilon_X/\varepsilon_Y}$, тада је $\varepsilon_{X+tY} = \varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y > 0$ што повлачи да је $X + tY$ просторан. У овом случају за просторно Осерманов R имамо

$$\mathrm{Tr}((\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^j) = \mathrm{Tr}((\mathcal{J}_{X+tY})^j) = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^j C_j,$$

што доноси

$$\sum_{i=0}^{2j} (\mathrm{Tr}(L_i)) t^i = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (\varepsilon_X)^{j-i} (\varepsilon_Y)^i C_j t^{2i}, \quad (8.3)$$

за неке конкретне линеарне операторе $L_0, L_1, \dots, L_{2j}$. Како полином степена d има највише d нула, док имамо бесконачно много таквих t да (8.3) важи, полиноми у (8.3) су једнаки, те су једнаки и њихови коефицијенти. Евидентно важи $L_0 = (\mathcal{J}_X)^j$, те је зато $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j$ за сваки временски X .

На сличан начин, лако је видети да је R временски Осерманов ако и само ако постоје константе C_j такве да (8.2) важи за свако $1 \leq j \leq n$ и свако временско X . Тако смо доказали да просторно Осерманов R јесте временски Осерманов, док се обрат добија на сличан начин. Зато су просторно Осерманов и временски Осерманов еквивалентни услови у случају недефинитног g , што су првобитно доказали Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Абал² и Васкез-Лорензо 1999. године [64].

Теорема 8.1. *Недефинитни алгебарски тензор кривине је просторно Осерманов ако и само ако је временски Осерманов.*

Последишно, алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако постоје константе $C_1, \dots, C_n$ такве да је $\mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j$ кадгод је X дефинитан. Ако размотримо коефицијенте карактеристичног полинома,

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n + \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n,$$

видимо да једначина (A.5) из Леме A.17 даје

$$m\sigma_m + \sigma_{m-1} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X) + \sigma_{m-2} \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 + \dots + \sigma_1 \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^{m-1} + \mathrm{Tr}(\mathcal{J}_X)^m = 0,$$

за свако $1 \leq m \leq n$. Након замене имамо

$$\frac{\sigma_m}{(\varepsilon_X)^m} = -\frac{1}{m} \left(\frac{\sigma_{m-1}}{(\varepsilon_X)^{m-1}} C_1 + \frac{\sigma_{m-2}}{(\varepsilon_X)^{m-2}} C_2 + \dots + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_X} C_1 + C_m \right),$$

те је индукцијом $\sigma_m/(\varepsilon_X)^m$ константно за $1 \leq m \leq n$. Одавде је

$$\det \left(\lambda \mathbb{1} - \frac{1}{\varepsilon_X} \mathcal{J}_X \right) = \frac{\det(\varepsilon_X \lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)}{(\varepsilon_X)^n} = \frac{\omega_X(\varepsilon_X \lambda)}{(\varepsilon_X)^n} = \lambda^n + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_X} \lambda^{n-1} + \dots + \frac{\sigma_{n-1}}{(\varepsilon_X)^{n-1}} \lambda + \frac{\sigma_n}{(\varepsilon_X)^n}$$

полином са константним коефицијентима што доказује наредну теорему.

Теорема 8.2. *Алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако је полином $\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X/\varepsilon_X)$ независан од дефинитног вектора X .*

Захваљујући Теорему 8.2 Осерманов услов не морамо више гледати кроз две независне константности различитих полинома, једне за просторне јединичне, а друге за временске јединичне векторе, већ смо све то објединили кроз јединствени полином који је константан за сваки дефинитан вектор.

За сада једначина (8.2) важи за дефинитне X , а очигледно и за $X = 0$. Изотропно X се по Лему 4.10 раставља са $X = S + T$, где је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T > 0$. За $n > 2$ постоји дефинитан $Y \in \mathrm{Span}\{S, T\}^\perp$. Како је $Y \perp X$ имамо $\varepsilon_{X+tY} = g(X+tY, X+tY) = t^2\varepsilon_Y \neq 0$ за $t \neq 0$. По Лему

²María Elena Vázquez-Abal, шпанска математичарка

6.5 улази матрице од $\mathcal{J}_X$ су хомогени полиноми степена 2 у коефицијентима од X , те је $\text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j$ полином степена $2j$, а самим тим непрекидно по t . Кад t опада ка нули, $\text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = t^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j$ доноси

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = \lim_{t \searrow 0} \text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = \lim_{t \searrow 0} t^{2j}(\varepsilon_Y)^j C_j = 0.$$

Одавде је $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = 0 = (\varepsilon_X)^j C_j$, што продужава једначину (8.2) за свако $X \in \mathcal{V}$ и мотивише нас да уведемо наредну дефиницију.

За алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ кажемо да је ***k*-шџајн** ако постоје константе $C_1, \dots, C_k$ такве да

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = (\varepsilon_X)^j C_j \quad (8.2 \text{ поновљено})$$

важи за свако $1 \leq j \leq k$ и свако $X \in \mathcal{V}$. Претходни рачун доказује следећу теорему (видети Гилки [57, Лема 1.7.3]).

Теорема 8.3. *Алгебарски тензор кривине димензије n је Осерманов ако и само ако је n -шџајн.*

Последично, Осерманов алгебарски тензор кривине задовољава $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^j = 0$ за изотропно X и $1 \leq j \leq n$, што за коефицијенте од ω_X даје $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 0$. Имајући то у виду, за сваки изотропан X важи $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda^n$, одакле следи наредна последица (видети Гилки [57, Лема 1.7.4]).

Теорема 8.4. *Ако је R Осерманов алгебарски тензор кривине, њада су све сојсџивене вредности од $\mathcal{J}_X$ за изотропан X једнаке нули.*

8.2 Ајнштајн, цвајштајн, k -штајн тензори

Осерманов алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије $n \geq 3$ је n -штајн. Подсетимо се претходне идеје која почиње од $\mathcal{J}_{X+tY}$, где k -штајн услов повлачи да

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^j = \text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^j = (\varepsilon_{X+tY})^j C_j = (\varepsilon_X + 2tg(X, Y) + t^2\varepsilon_Y)^j C_j \quad (8.4)$$

важи за свако $1 \leq j \leq k$ и све $X, Y \in \mathcal{V}$, $t \in \mathbb{R}$. Најједноставнији случај је $k = 1$ који доноси једнаке полиноме,

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X) + 2t \text{Tr}(\mathcal{J}(X, Y)) + t^2 \text{Tr}(\mathcal{J}_Y) = \varepsilon_X C_1 + 2tC_1 g(X, Y) + t^2 \varepsilon_Y C_1,$$

те је $C_1 g(X, Y) = \text{Tr}(\mathcal{J}(X, Y)) = \text{Ric}(X, Y)$, што даје $\text{Ric} = C_1 g$. Зато је алгебарски тензор кривине Ајнштајнов ако и само ако је 1-штајн, што је разлог зашто су Карпенџер³, Греј⁴ и Вилмор⁵ [36] духовито одабрали име k -штајн за уопштење. Наиме, како име славног физичара Ајнштајна на немачком значи један камен, уопштењем добијамо цвајштајн (два камена), драјштајн (три камена), и тако даље.

Размотримо ортонормирану базу $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ за $(\mathcal{V}, g)$, где уводимо скраћенице $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за $1 \leq i \leq n$. Користећи једнакост (6.30), Ајнштајнов услов даје $C_1 g(X, Y) = \text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R(E_i, X, Y, E_i)$, те зато $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{ixyi} = C_1 \varepsilon_x \delta_{xy}$ важи за све $1 \leq x, y \leq n$, где су $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l)$ за $1 \leq i, j, k, l \leq n$ компоненте од R . Одавде, за Ајнштајнов алгебарски тензор кривине R важе формуле

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = \text{Const} = C_1, \quad (8.5)$$

³Paul Carpenter, британски математичар

⁴Alfred Gray (1939–1998), амерички математичар

⁵Thomas James Willmore (1919–2005), енглески математичар

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0. \quad (8.6)$$

Теорема 8.5. *Ако је R Ајнштајнов алгебарски тензор кривине димензије n , тада у ортонормираној бази једнакости (8.5) и (8.6) важе за све $1 \leq x \neq y \leq n$.*

Вратимо се на једначину (8.4) и размотримо по једноставности наредни случај $k = 2$. Не умањујући општост претпостављамо $X \perp Y$, те једначина постаје

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^2 = \text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^2 = (\varepsilon_{X+tY})^2 C_2 = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^2 C_2.$$

Једнаки полиноми имају исте коефицијенте, те поредећи коефицијенте уз 1 , t и t^2 добијамо

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 &= (\varepsilon_X)^2 C_2, \\ \text{Tr}(\mathcal{J}_X \mathcal{J}(X, Y)) + \text{Tr}(\mathcal{J}(X, Y) \mathcal{J}_X) &= 0, \\ \text{Tr}(\mathcal{J}_X \mathcal{J}_Y) + 4 \text{Tr}(\mathcal{J}(X, Y))^2 + \text{Tr}(\mathcal{J}_Y \mathcal{J}_X) &= 2\varepsilon_X \varepsilon_Y C_2, \end{aligned}$$

док су због симетрије по X и Y , једначине добијене поређењем коефицијената уз t^3 и t^4 сувишне.

За произвољни ендоморфизам $\mathcal{J}$ на $\mathcal{V}$, из (4.3) следи $\mathcal{J}(E_q) = \sum_i \varepsilon_i g(\mathcal{J}(E_q), E_i) E_i$, те матрица од $\mathcal{J}$ у односу на изабрану базу има елементе $(\mathcal{J})_{pq} = \varepsilon_p g(\mathcal{J}(E_q), E_p)$ за свако $1 \leq p, q \leq n$. Додатно, за ендоморфизме $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ важи $\text{Tr}(\mathcal{J}\mathcal{K}) = \text{Tr}(\mathcal{K}\mathcal{J})$, што нам омогућава да израчунамо трагове конкретних ендоморфизама,

$$\begin{aligned} C_2 &= (\varepsilon_X)^2 C_2 = \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_X})^2 = \sum_{ij} (\mathcal{J}_{E_X})_{ij} (\mathcal{J}_{E_X})_{ji} = \sum_{ij} \varepsilon_i g(\mathcal{J}_{E_X}(E_j), E_i) \varepsilon_j g(\mathcal{J}_{E_X}(E_i), E_j) \\ &= \sum_{ij} \varepsilon_i R_{jxxi} \varepsilon_j R_{ixxj} = \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_X} \mathcal{J}(E_X, E_Y)) + \text{Tr}(\mathcal{J}(E_X, E_Y) \mathcal{J}_{E_X}) = 2 \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_X} \mathcal{J}(E_X, E_Y)) \\ &= 2 \sum_{ij} \varepsilon_i R_{jxxi} \varepsilon_j \frac{1}{2} (R_{ixyj} + R_{iyxj}) = 2 \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{ixyj}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_X \varepsilon_Y C_2 &= \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_X} \mathcal{J}_{E_Y}) + 4 \text{Tr}(\mathcal{J}(E_X, E_Y))^2 + \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_Y} \mathcal{J}_{E_X}) = 2 \text{Tr}(\mathcal{J}_{E_X} \mathcal{J}_{E_Y}) + 4 \text{Tr}(\mathcal{J}(E_X, E_Y))^2 \\ &= 2 \sum_{ij} \varepsilon_i R_{jxxi} \varepsilon_j R_{iyyj} + 4 \sum_{ij} \varepsilon_i \frac{1}{2} (R_{jxyi} + R_{jyxi}) \varepsilon_j \frac{1}{2} (R_{ixyj} + R_{iyxj}) \\ &= 2 \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2. \end{aligned}$$

Одавде добијамо једнакости које су карактеристичне за цвајштајн R ,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj})^2 = \text{Const} = C_2, \quad (8.7)$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{ixyj} = 0, \quad (8.8)$$

$$2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 2\varepsilon_X \varepsilon_Y C_2. \quad (8.9)$$

Теорема 8.6. *Ако је R цвајштајн алгебарски тензор кривине димензије n , тада у ортонормираној бази (8.5), (8.6), (8.7), (8.8) и (8.9) важе за све $1 \leq x \neq y \leq n$.*

Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . По Теореме 8.3, R је n -штајн. У светлу тога, константне сопствене вредности (са вишеструкошћима) од $\mathcal{J}_X$ додатно дају константе $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^k$ за $k > n$, што продужава R на k -штајн за свако $k \in \mathbb{N}$. Одатле,

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, Y) + t^2\mathcal{J}_Y)^k = \text{Tr}(\mathcal{J}_{X+tY})^k = (\varepsilon_{X+tY})^k C_k = (\varepsilon_X + t^2\varepsilon_Y)^k C_k$$

важи за све $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, и међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$. Ово нас враћа на једначину (8.3),

$$\sum_{i=0}^{2k} t^i \text{Tr}(L_i) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\varepsilon_X)^{k-i} (\varepsilon_Y)^i C_k t^{2i},$$

која важи за конкретне линеарне операторе $L_0, L_1, \dots, L_{2k}$. Посебно важи $\text{Tr}(L_i) = 0$ за непарне i , као и

$$\text{Tr}(L_{2p}) = \binom{k}{p} (\varepsilon_X)^{k-p} (\varepsilon_Y)^p C_k, \quad (8.10)$$

за све $0 \leq p \leq k$. Већ смо видели $L_0 = (\mathcal{J}_X)^k$, што повлачи $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^k = (\varepsilon_X)^k C_k$. Следеће по једноставности је

$$L_1 = 2((\mathcal{J}_X)^{k-1} \mathcal{J}(X, Y) + (\mathcal{J}_X)^{k-2} \mathcal{J}(X, Y) \mathcal{J}_X + \dots + \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^{k-1}).$$

Како је

$$\sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1-i} \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^i) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}((\mathcal{J}_X)^i (\mathcal{J}_X)^{k-1-i} \mathcal{J}(X, Y)) = k \text{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1} \mathcal{J}(X, Y)),$$

то добијамо

$$\text{Tr}((\mathcal{J}_X)^{k-1} \mathcal{J}(X, Y)) = \frac{1}{2k} \text{Tr}(L_1) = 0.$$

Општи случај, за $X = E_x$, $Y = E_y$ са $x \neq y$, је прилично компликован,

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} R_{i_2 x x i_1} R_{i_3 x x i_2} \dots R_{i_k x x i_{k-1}} \frac{1}{2} (R_{i_1 x y i_k} + R_{i_1 y x i_k}) = 0. \quad (8.11)$$

Уколико претпоставимо да је R Јакоби-дијагонализабилан, или барем да је $\mathcal{J}_{E_x}$ дијагонализабилан, то постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \dots, E_n)$ у односу на $\mathcal{J}_{E_x}$. У тој бази је $R_{p x x q} = 0$ за све $p \neq q$, те општа једнакост (8.11) има смисла само за $i_1 = i_2 = \dots = i_k$, одакле је

$$0 = \frac{1}{2} \sum_i (\varepsilon_i)^k (R_{i x x i})^{k-1} (R_{i x y i} + R_{i y x i}) = \sum_i \varepsilon_i (\varepsilon_i R_{i x x i})^{k-1} R_{i x y i}. \quad (8.12)$$

Уколико означимо секционе кривине са $\kappa_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ijji} = \kappa(E_i, E_j)$, тада имамо

$$\mathcal{J}_{E_x} E_i = \sum_p \varepsilon_p g(\mathcal{J}_{E_x}(E_i), E_p) E_p = \sum_p \varepsilon_p R_{i x x p} E_p = \varepsilon_i R_{i x x i} E_i = \varepsilon_x \kappa_{xi} E_i.$$

Нека је $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} = \{\lambda : \det(\varepsilon_x \lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_{E_x}) = 0\}$ спектар оператора $\varepsilon_x \mathcal{J}_{E_x}$, тада за свако $1 \leq a \leq m$ можемо груписати заједно такве $1 \leq i \leq n$ да важи $\kappa_{xi} = \lambda_a$. Множењем (8.12) са $(\varepsilon_x)^{k-1}$ имамо

$$0 = \sum_i \varepsilon_i (\varepsilon_i \varepsilon_x R_{i x x i})^{k-1} R_{i x y i} = \sum_{1 \leq a \leq m} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \varepsilon_i (\lambda_a)^{k-1} R_{i x y i} = \sum_{1 \leq a \leq m} (\lambda_a)^{k-1} W_a,$$

где је $W_a = \sum_{\kappa_{xi}=\lambda_a} \varepsilon_i R_{ixyi}$. Једнакости $\sum_{a=1}^m (\lambda_a)^{k-1} W_a = 0$ за $1 \leq k \leq m$ могу се записати са

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = 0.$$

Овај систем једначина има добро познату Вандермондову⁶ матрицу, која је генерисана различитим бројевима из спектра, те је зато њена детерминанта

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \prod_{1 \leq a < b \leq m} (\lambda_b - \lambda_a) \neq 0.$$

Због тога је наш хомогени систем инвертибилан и има јединствено тривијално решење, што даје $W_a = 0$ за свако $1 \leq a \leq m$, те важи следећа теорема.

Теорема 8.7. Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине и нека је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана сопствена база у односу на $\mathcal{E}_x$. Тада за све $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \neq x$ важи

$$\sum_{\kappa_{xi}=\lambda} \varepsilon_i R_{ixyi} = 0.$$

Задржимо претходну нотацију ($X = E_x$, $Y = E_y$ са $x \neq y$, $R_{pxxq} = 0$ за $p \neq q$) и посматрајмо наредни по једноставности случај L_2 . Није тешко видети да важи

$$L_2 = \sum_{p+q=k-1} (\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}_Y (\mathcal{J}_X)^q + 4 \sum_{p+q+r=k-2} (\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^r = P + S.$$

Рачунамо траг од $L_2 = P + S$. Траг првог члана је једноставан,

$$\text{Tr } P = \sum_{p+q=k-1} \text{Tr} ((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}_Y (\mathcal{J}_X)^q) = k \text{Tr} ((\mathcal{J}_X)^{k-1} \mathcal{J}_Y) = k(\varepsilon_x)^{k-1} \varepsilon_y \sum_{1 \leq i \leq n} \kappa_{yi} (\kappa_{xi})^{k-1}.$$

Међутим, траг другог члана је прилично компликован,

$$\begin{aligned} \text{Tr } S &= 4 \sum_{p+q+r=k-2} \text{Tr} ((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^r) \\ &= 4 \sum_{s+q=k-2} (s+1) \text{Tr} ((\mathcal{J}_X)^s \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X, Y)) \\ &= 2k \sum_{p+q=k-2} \text{Tr} ((\mathcal{J}_X)^p \mathcal{J}(X, Y) (\mathcal{J}_X)^q \mathcal{J}(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2} k \sum_{p+q=k-2} \sum_{ij} (\varepsilon_i)^{p+1} (\varepsilon_j)^{q+1} (R_{ixxi})^p (R_{jxyi} + R_{jyxi}) (R_{jxxj})^q (R_{ixyj} + R_{iyxj}) \\ &= \frac{1}{2} k (\varepsilon_x)^{k-2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \sum_{p+q=k-2} (\kappa_{xi})^p (\kappa_{xj})^q. \end{aligned}$$

Неопходно је дискутовати случајеве, у зависности од тога да ли су κ_{xi} и κ_{xj} једнаки,

$$\sum_{p+q=k-2} (\kappa_{xi})^p (\kappa_{xj})^q = \begin{cases} (k-1)(\kappa_{xi})^{k-2} & \text{if } \kappa_{xi} = \kappa_{xj} \\ \frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi} - \kappa_{xj}} + \frac{(\kappa_{xj})^{k-1}}{\kappa_{xj} - \kappa_{xi}} & \text{if } \kappa_{xi} \neq \kappa_{xj} \end{cases}.$$

⁶Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), француски математичар, музичар и хемичар

Користећи симетрију имамо

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi} - \kappa_{xj}} = \sum_{1 \leq j, i \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \frac{(\kappa_{xj})^{k-1}}{\kappa_{xj} - \kappa_{xi}},$$

те је зато

$$\begin{aligned} \text{Tr } S = & k(\varepsilon_x)^{k-2} \sum_{\kappa_{xi} \neq \kappa_{xj}} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi} - \kappa_{xj}} \\ & + \frac{1}{2} k(\varepsilon_x)^{k-2} \sum_{\kappa_{xi} = \kappa_{xj}} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 (k-1)(\kappa_{xi})^{k-2}. \end{aligned}$$

Са друге стране, једнакост (8.10) за $p = 1$ доноси

$$\text{Tr}(L_2) = k(\varepsilon_x)^{k-1} \varepsilon_y C_k = k \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \text{Tr}(\mathcal{J}_X)^k = k(\varepsilon_x)^{k-1} \varepsilon_y \sum_{1 \leq i \leq n} (\kappa_{xi})^k.$$

Ова једнакост, заједно са претходним рачунима, након дељења са $k(\varepsilon_x)^{k-2}$ даје

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{1 \leq i \leq n} (\kappa_{xi})^k = & \varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{1 \leq i \leq n} \kappa_{yi} (\kappa_{xi})^{k-1} + \sum_{\kappa_{xi} \neq \kappa_{xj}} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \frac{(\kappa_{xi})^{k-1}}{\kappa_{xi} - \kappa_{xj}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\kappa_{xi} = \kappa_{xj}} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 (k-1)(\kappa_{xi})^{k-2}. \end{aligned}$$

Можемо објединити чланове у односу на спектар $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ од $\varepsilon_x \mathcal{J}_{E_x}$ да бисмо добили

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq a \leq m} \lambda_a^{k-1} \left(\varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} (\kappa_{yi} - \lambda_a) + \sum_{b \neq a} \frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \sum_{\kappa_{xj} = \lambda_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \right) \\ & + \sum_{1 \leq a \leq m} (k-1) \lambda_a^{k-2} \left(\frac{1}{2} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \sum_{\kappa_{xj} = \lambda_a} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Уколико поставимо

$$\begin{aligned} U_a = & \varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} (\kappa_{yi} - \lambda_a) + \sum_{b \neq a} \frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \sum_{\kappa_{xj} = \lambda_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2, \\ W_a = & \frac{1}{2} \sum_{\kappa_{xi} = \lambda_a} \sum_{\kappa_{xj} = \lambda_a} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2, \end{aligned}$$

тада наша једнакост постаје

$$\sum_{1 \leq a \leq m} \lambda_a^{k-1} U_a + \sum_{1 \leq a \leq m} (k-1) \lambda_a^{k-2} W_a = 0,$$

што за $1 \leq k \leq 2m$ доводи до матричне једначине у следећем облику,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_m^2 & 2\lambda_1 & \dots & 2\lambda_m \\ \lambda_1^3 & \dots & \lambda_m^3 & 3\lambda_1^2 & \dots & 3\lambda_m^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{2m-1} & \dots & \lambda_m^{2m-1} & (2m-1)\lambda_1^{2m-2} & \dots & (2m-1)\lambda_m^{2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = 0.$$

Како је $(m + a)$ -та колона извод a -те колоне, наш систем има детерминанту Δ изведну из Вандермондове детерминанте као

$$\Delta = \frac{\partial^m V(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_m} \Big|_{\xi_1 = \lambda_1, \dots, \xi_m = \lambda_m}.$$

Са друге стране имамо

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_a (\xi_a - \lambda_a) \prod_{a < b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a < b} (\xi_b - \xi_a) \prod_{a < b} (\xi_b - \lambda_a) \prod_{a < b} (\xi_a - \lambda_b),$$

где након $\frac{\partial}{\partial \xi_a} \Big|_{\xi_a = \lambda_a}$ преживи само члан са изводом од $(\xi_a - \lambda_a)$. Зато је

$$\Delta = \prod_{a < b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a < b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a < b} (\lambda_b - \lambda_a) \prod_{a < b} (\lambda_a - \lambda_b) \neq 0,$$

и систем има јединствено тривијално решење $U_a = W_a = 0$ за свако $1 \leq a \leq m$. То нас доводи до наредне теореме коју је дао Андрејић 2006. године [3] (видети такође [16]), што је уопштење резултата који је оригинално изложио Ракић⁷ 1998. године [106] (видети такође [107]), а покрива дефинитан случај.

Теорема 8.8. Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине и нека је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана сопствена база у односу на $\mathcal{J}_{E_x}$. Тада за све $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \neq x$ важи

$$\sum_{\kappa_{xi}=\lambda} \sum_{\kappa_{xj}=\lambda} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0.$$

Нека је R Лоренцов временски Осерманов алгебарски тензор кривине димензије $n \geq 3$. Посматрајмо јединични временски $T \in \mathcal{V}$. Како је $T^\perp \leq \mathcal{V}$ позитивно дефинитан потпростор, по Леми А.21 он има ортонормирану сопствену базу $(V_1, \dots, V_{n-1})$ у односу на $\mathcal{J}_T$. Тада $\mathcal{J}_T V_i = \lambda_i V_i$ важи за $1 \leq i \leq n-1$, где су $0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ корени карактеристичног полинома $\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_T)$ и зато не зависе од T . За произвољно $X = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i V_i \in T^\perp$ добијамо

$$\kappa(T, X) = \frac{g(\mathcal{J}_T(X), X)}{\varepsilon_T \varepsilon_X} = - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2},$$

што повлачи ограничења

$$- \max_{1 \leq i \leq n-1} \lambda_i \leq \kappa(T, X) \leq - \min_{1 \leq i \leq n-1} \lambda_i.$$

Секциона кривина недефинитних равни је ограничена, те из Теореме 6.10 следи да је κ константно. Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Абал су искористили овај аргумент 1997. године [63] да би добили следећу теорему.

Теорема 8.9. Лоренцов временски Осерманов алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.

Међутим, да би важила Теорема 8.9, довољно је претпоставити да је R цвајштајн уместо Осерманов. Нека је R цвајштајн алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . За произвољну ортонормирану базу и $1 \leq x \neq y \leq n$, користећи (8.9) и (8.7) из Теореме 8.6 имамо

$$2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = \varepsilon_x \varepsilon_y \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j ((R_{ixxj})^2 + (R_{iyyj})^2).$$

⁷Зоран Ракић (1964), српски математичар

Одавде је

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y (\varepsilon_x R_{ixxj} - \varepsilon_y R_{iyyj})^2 \right) = 0,$$

што за $\varepsilon_x \varepsilon_y < 0$ постаје

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) = 0.$$

Претпоставимо додатно да је $(\mathcal{V}, g)$ Лоренцов ($\text{Ind } g = 1$), где $\varepsilon_x \varepsilon_y < 0$ повлачи да $\varepsilon_i = 1$ важи за свако $i \notin \{x, y\}$. Претходну суму растављамо на четири члана,

$$\begin{aligned} & \sum_{i, j \notin \{x, y\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) \\ & + \sum_{j \notin \{x, y\}} \left(\varepsilon_x \varepsilon_j ((R_{xyxj})^2 + (R_{xyyj})^2) + \varepsilon_y \varepsilon_j ((R_{yxyj})^2 + (R_{yxxj})^2) \right) \\ & + \sum_{i \notin \{x, y\}} \left(\varepsilon_i \varepsilon_x ((R_{ixyx})^2 + (R_{iyyx})^2) + \varepsilon_i \varepsilon_y ((R_{iyxy})^2 + (R_{ixxy})^2) \right) \\ & + \left(\varepsilon_x \varepsilon_x (R_{xyyx})^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y (R_{xyxy})^2 + \varepsilon_y \varepsilon_x (R_{yxyx})^2 + \varepsilon_y \varepsilon_y (R_{yxxxy})^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

где сви чланови осим првог ишчезавају. Зато је

$$\sum_{i, j \notin \{x, y\}} \left((R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 + (R_{ixxj} + R_{iyyj})^2 \right) = 0,$$

те $R_{ixyj} + R_{iyxj} = 0$ и $R_{ixxj} + R_{iyyj} = 0$ важи за све $i, j \notin \{x, y\}$. Посебно, за $i = j$ имамо исте секционе кривине

$$\kappa(E_i, E_x) = \kappa_{ix} = \varepsilon_i \varepsilon_x R_{ixxi} = \varepsilon_i \varepsilon_y R_{iyyi} = \kappa_{iy} = \kappa(E_i, E_y),$$

кад год су i, x, y различити са $\varepsilon_x \varepsilon_y = -1$, на пример $\varepsilon_x = -1$.

Да комплетирамо доказ користимо наредни аргумент који је дао Андрејић 2018. године [9], а који значајно скраћује доказ, што претходни аутори нису уочили. Како је цвајштајн по дефиницији Ајнштајнов, за фиксирано x и $i \neq x$, једнакост (8.5) даје

$$C_1 = \kappa_{ix} + \sum_{y \neq i, x} \kappa_{iy} = \kappa_{ix} + \sum_{y \neq i, x} \kappa_{ix} = (n-1)\kappa_{ix},$$

одакле је $\kappa_{ix} = \kappa_{iy} = C_1/(n-1)$ за сваку ортонормирану базу, те R има константну секциону кривину. На овај начин добили смо следећу теорему коју су оригинално поставили Блажић⁸, Бокан⁹ и Гилки 1997. године [23].

Теорема 8.10. *Сваки Лоренцов цвајштајн алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

8.3 Четвородимензиони цвајштајн тензори

Нека је R четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. На основу Теореме 6.4, четвородимензиони алгебарски тензор кривине има двадесет независних компоненти. Оне се састоје од шест

⁸Новица Блажић (1959–2005), српски математичар

⁹Неда Бокан (1947), српска математичарка

компоненти облика $\kappa_{xy} = R_{yxyx} = R_{xyyx}$, дванаест компоненти облика $\mu_{xy} = R_{zxxv}$, те две додатне компоненте дате са $p = R_{1342} + R_{1432}$ и $q = R_{1243} + R_{1423}$, где (x, y, z, v) представља пермутацију од $(1, 2, 3, 4)$. Последишно, компоненте R_{1234} и R_{1324} су дате са $R_{1234} = -(p + 2q)/3$ и $R_{1324} = -(2p + q)/3$.

Како по Теореме 8.10 сваки Лоренцов цвајштајн алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину, без губитка општости можемо претпоставити да важи $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1$.

Из (8.5), за $1 \leq x \leq 4$, имамо систем четири једнакости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_{12} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \kappa_{13} + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \kappa_{14} &= C_1, & \varepsilon_2 \varepsilon_1 \kappa_{12} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_{23} + \varepsilon_2 \varepsilon_4 \kappa_{24} &= C_1, \\ \varepsilon_3 \varepsilon_1 \kappa_{13} + \varepsilon_3 \varepsilon_2 \kappa_{23} + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_{34} &= C_1, & \varepsilon_4 \varepsilon_1 \kappa_{14} + \varepsilon_4 \varepsilon_2 \kappa_{24} + \varepsilon_4 \varepsilon_3 \kappa_{34} &= C_1, \end{aligned}$$

са решењем $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_{23} = \varepsilon_1 \varepsilon_4 \kappa_{14}$, $\varepsilon_2 \varepsilon_4 \kappa_{24} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \kappa_{13}$ и $\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_{34} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_{12}$. Одавде добијамо

$$\kappa_{23} = \kappa_{14}, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13}, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12}. \quad (8.13)$$

Из (8.6), за $1 \leq x \neq y \leq 4$, имамо наредних шест једнакости

$$\begin{aligned} \mu_{41} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{14}, & \mu_{31} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{13}, & \mu_{21} &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{12} \\ \mu_{43} &= -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{34}, & \mu_{42} &= -\varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{24}, & \mu_{32} &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{23}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Из (8.7), за $1 \leq x \leq 4$, добијамо четири једнакости

$$\begin{aligned} \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{14}^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{14}^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{13}^2 + 2\varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{12}^2 &= C_2, \\ \kappa_{12}^2 + \kappa_{23}^2 + \kappa_{24}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{24}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{23}^2 + 2\varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{21}^2 &= C_2, \\ \kappa_{13}^2 + \kappa_{23}^2 + \kappa_{34}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{34}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{32}^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{31}^2 &= C_2, \\ \kappa_{14}^2 + \kappa_{24}^2 + \kappa_{34}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{43}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{42}^2 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{41}^2 &= C_2, \end{aligned}$$

што се, након употребе (8.13) и (8.14), своди на

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{14}^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{13}^2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{12}^2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{24}^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{23}^2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{21}^2 \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{34}^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{23}^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{13}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{34}^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{24}^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{14}^2, \end{aligned}$$

и доноси решење $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{14}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_4 \mu_{23}^2$, $\varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{13}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mu_{24}^2$, $\varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{12}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_{34}^2$. Тако добијамо

$$\mu_{23}^2 = \mu_{14}^2, \quad \mu_{24}^2 = \mu_{13}^2, \quad \mu_{34}^2 = \mu_{12}^2. \quad (8.15)$$

Из двоструке примене формуле (8.8) добијамо релацију

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixyj} (\varepsilon_x R_{ixxj} \pm \varepsilon_y R_{iyyj}) = \varepsilon_x \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{ixyj} \pm \varepsilon_y \sum_{1 \leq j, i \leq n} \varepsilon_j \varepsilon_i R_{jyyi} R_{jyxi} = 0,$$

из које, у случају $n = 4$, за $x = 2, y = 3$, имамо

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \varepsilon_4 (p + q) (\varepsilon_2 \mu_{23} \pm \varepsilon_3 \mu_{32}) + (\mp 1 - 1) (\varepsilon_4 \mu_{24} \mu_{34} + \varepsilon_1 \mu_{31} \mu_{21}) \\ + \mu_{14} (\varepsilon_2 \kappa_{12} \pm \varepsilon_3 \kappa_{13}) + \mu_{41} (\varepsilon_2 \kappa_{24} \pm \varepsilon_3 \kappa_{34}) = 0. \end{aligned}$$

Примена (8.13) и (8.14), то своди на

$$(1 \mp 1) (-\varepsilon_3 \mu_{23} (p + q) + \mu_{14} (\varepsilon_2 \kappa_{12} - \varepsilon_3 \kappa_{13})) = (\pm 1 + 1) \varepsilon_4 (\mu_{24} \mu_{34} + \mu_{13} \mu_{12}),$$

те одатле важи

$$\mu_{24} \mu_{34} + \mu_{13} \mu_{12} = 0, \quad (8.16)$$

заједно са

$$-\varepsilon_3\mu_{23}(p+q) + \mu_{14}(\varepsilon_2\kappa_{12} - \varepsilon_3\kappa_{13}) = 0. \quad (8.17)$$

Изведене формуле су валидне у произвољној ортонормираној бази, те важе и за сваку пермутацију индекса. Из (8.16), за пермутације $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 4, 2, 3)$ и $(1, 3, 4, 2)$, добијамо

$$\mu_{24}\mu_{34} = -\mu_{13}\mu_{12}, \quad \mu_{34}\mu_{23} = \varepsilon_3\varepsilon_4\mu_{12}\mu_{14}, \quad \mu_{23}\mu_{24} = -\varepsilon_3\varepsilon_4\mu_{14}\mu_{13}.$$

Из (8.15) видимо да компоненте μ_{23} , μ_{24} и μ_{34} , у том редоследу, одговарају компонентама μ_{14} , μ_{13} и μ_{12} , могуће са супротним знаком. Ако је $\mu_{14} \neq 0$, онда постоји знак $s \in \{-1, 1\}$ тако да је $\mu_{23} = -\varepsilon_3s\mu_{14}$, док остале две релације следе из изведених формула, што даје

$$\mu_{23} = -\varepsilon_3s\mu_{14}, \quad \mu_{24} = \varepsilon_4s\mu_{13}, \quad \mu_{34} = -\varepsilon_4s\mu_{12}. \quad (8.18)$$

Штавише, ако за било коју ненула компоненту поставимо s у складу са (8.18), онда изведене релације доносе преостале једнакости у (8.18). То доказује да у свим случајевима постоји знак s (ако су све компоненте једнаке нули довољан је произвољан избор знака) такав да важи (8.18).

Преостаје нам да искористимо (8.9). За $x = 2, y = 3$ добијамо

$$4\mu_{14}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_{24}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_4\mu_{21}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3\mu_{34}^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_4\mu_{31}^2 + 4\mu_{41}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3\kappa_{23}^2 + 2\kappa_{12}\kappa_{13} + 2\kappa_{24}\kappa_{34} + 4\varepsilon_1\varepsilon_4\mu_{23}\mu_{32} - 2\varepsilon_1\varepsilon_4(p+q)^2 = 2\varepsilon_2\varepsilon_3C_2.$$

Коришћење (8.13), (8.14) и (8.15), то своди на

$$2\mu_{14}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_{13}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3\mu_{12}^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3\kappa_{14}^2 + 2\kappa_{12}\kappa_{13} - \varepsilon_1\varepsilon_4(p+q)^2 = \varepsilon_2\varepsilon_3C_2,$$

што даље повлачи

$$2\varepsilon_2\varepsilon_3\mu_{14}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_4\mu_{13}^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_4\mu_{12}^2 + \kappa_{14}^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3\kappa_{12}\kappa_{13} + (p+q)^2 = C_2.$$

Тако долазимо до важног идентитета

$$(p+q)^2 = (\varepsilon_2\kappa_{12} - \varepsilon_3\kappa_{13})^2. \quad (8.19)$$

Како он важи у произвољној ортонормираној бази, такође имамо

$$\begin{aligned} -p - q &= R_{1234} + R_{1324} = r_4(\varepsilon_2\kappa_{12} - \varepsilon_3\kappa_{13}), \\ q &= R_{1423} + R_{1243} = -2R_{1234} + R_{1324} = r_3(\varepsilon_4\kappa_{14} - \varepsilon_2\kappa_{12}), \\ p &= R_{1342} + R_{1432} = R_{1234} - 2R_{1324} = r_2(\varepsilon_3\kappa_{13} - \varepsilon_4\kappa_{14}), \end{aligned} \quad (8.20)$$

за неко $r_2, r_3, r_4 \in \{-1, 1\}$. Одговарајућа сума је

$$(r_j - r_k)\varepsilon_i\kappa_{1i} + (r_k - r_i)\varepsilon_j\kappa_{1j} + (r_i - r_j)\varepsilon_k\kappa_{1k} = 0,$$

где је (i, j, k) пермутација од $(2, 3, 4)$. Ако је $r_i = r_j = -r_k$, онда важи $\varepsilon_i\kappa_{1i} = \varepsilon_j\kappa_{1j}$. У том случају, у једнакостима (8.20) можемо заменити r_k са $-r_k$, што доноси $r_2 = r_3 = r_4 = r$. Последишно је

$$rR_{1234} = \varepsilon_2\kappa_{12} - \frac{\varepsilon_1C_1}{3}, \quad rR_{1342} = \varepsilon_3\kappa_{13} - \frac{\varepsilon_1C_1}{3}, \quad rR_{1423} = \varepsilon_4\kappa_{14} - \frac{\varepsilon_1C_1}{3}, \quad (8.21)$$

са напоменом да важи $\varepsilon_1C_1 = \varepsilon_2\kappa_{12} + \varepsilon_3\kappa_{13} + \varepsilon_4\kappa_{14}$.

Коначно, формула (8.16) за три пермутације одређује везу између s и r , тако да је $s = r$ осим ако је $\mu_{14}(\varepsilon_2\kappa_{12} - \varepsilon_3\kappa_{13}) = 0$, $\mu_{13}(\varepsilon_2\kappa_{12} - \varepsilon_4\kappa_{14}) = 0$ и $\mu_{12}(\varepsilon_3\kappa_{13} - \varepsilon_4\kappa_{14}) = 0$. Зато, једини случај у којем не можемо закључити $s = r$ је кад имамо $\mu_{1z} = \mu_{1y} = 0 \neq \mu_{1x}$

и $\varepsilon_x \kappa_{1x} \neq \varepsilon_y \kappa_{1y} = \varepsilon_z \kappa_{1z}$ за неку пермутацију (x, y, z) од $(2, 3, 4)$. Формуле важе у свакој ортонормираној бази, те окретањем смера једног базног вектора, и s и r мењају знак.

Због тога, полазећи од елемената матрице Јакобијевог оператора за први базни вектор у произвољној ортонормираној бази,

$$\mathcal{J}_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \kappa_{12} & \varepsilon_2 \mu_{14} & \varepsilon_2 \mu_{13} \\ 0 & \varepsilon_3 \mu_{14} & \varepsilon_3 \kappa_{13} & \varepsilon_3 \mu_{12} \\ 0 & \varepsilon_4 \mu_{13} & \varepsilon_4 \mu_{12} & \varepsilon_4 \kappa_{14} \end{pmatrix},$$

све компоненте од R су одређене формулама (8.13), (8.14), (8.18) и (8.21) до на знакове s и r . Штавише, ако је потребно, можемо окренути смер произвољног базног вектора да бисмо поставили $s = 1$, док се случај $s \neq r$ јавља само у присуству реалног Жордановог блока као што је описано у (8.24). Мало смо прилагодили једначине како бисмо удомили Лоренцов случај ($\mu_{xy} = 0$ и $\varepsilon_x \varepsilon_y \kappa_{xy} = C_1$ за $x \neq y$), из чега добијамо следећи резултат који је представио Андрејић 2025. године [12].

Лема 8.11. *За произвољну ортонормирану базу, постоје знакови $s, r \in \{-1, 1\}$ иако да четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине задовољава следеће релације:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_{23} &= \varepsilon_1 \varepsilon_4 \kappa_{14}, & \varepsilon_2 \varepsilon_4 \kappa_{24} &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 \kappa_{13}, & \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_{34} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_{12}, \\ -\varepsilon_3 s \mu_{23} &= \varepsilon_2 s \mu_{32} = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mu_{41} = \mu_{14}, & -\varepsilon_2 s \mu_{42} &= \varepsilon_4 s \mu_{24} = -\varepsilon_2 \varepsilon_4 \mu_{31} = \mu_{13}, \\ -\varepsilon_4 s \mu_{34} &= \varepsilon_3 s \mu_{43} = -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \mu_{21} = \mu_{12}, & p &= r(\varepsilon_3 \kappa_{13} - \varepsilon_4 \kappa_{14}), & q &= r(\varepsilon_4 \kappa_{14} - \varepsilon_2 \kappa_{12}). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Главна предност Леме 8.11 је то да важи у произвољној ортонормираној бази. Међутим, ако алгебарски тензор кривине задовољава услове (8.22), то не мора да значи да је тензор цвајштајн. За обрат тврђења, уобичајено је дискутовати Жорданову нормалну форму редукованог Јакобијевог оператора.

Размотримо четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору сигнатуре $(2, 2)$. Пионирски рад [24] дискутује четири могућности за Жорданову нормалну форму тродимензионог самоадјунгованог ендоморфизма $A = \tilde{\mathcal{J}}_{E_1}: E_1^\perp \rightarrow E_1^\perp$ за произвољни јединични вектор E_1 , користећи Теорему А.24.

Тип Ia одговара дијагонализабилном ендоморфизму, а у том случају постоји база $e = (E_2, E_3, E_4)$ од $E_1^\perp$ таква да ендоморфизам A и скаларни производ g имају матрице

$$[A]_e = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad [g]_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Без умањења општости, можемо изабрати ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3, E_4) тако да важи $\mu_{14} = \mu_{13} = \mu_{12} = 0$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$. Примена (8.22) са $r = \varepsilon_4$ доноси

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= \mu_{13} = \mu_{14} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{32} = \mu_{34} = \mu_{41} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \\ \kappa_{23} &= \kappa_{14}, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13}, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12}, \quad p = \kappa_{13} - \kappa_{14}, \quad q = \kappa_{12} + \kappa_{14}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где је

$$R_{1234} = \frac{-2\kappa_{12} - \kappa_{13} - \kappa_{14}}{3}, \quad R_{1324} = \frac{-\kappa_{12} - 2\kappa_{13} + \kappa_{14}}{3}, \quad R_{1423} = \frac{\kappa_{12} - \kappa_{13} + 2\kappa_{14}}{3}.$$

Тип Ib одговара ендоморфизму који има комплексну сопствену вредност, а у том случају постоји база $e = (E_2, E_3, E_4)$ од $E_1^\perp$ таква да је

$$[A]_e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad [g]_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где је $\beta \neq 0$ и $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$. Можемо претпоставити $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, јер у супротном можемо разменити векторе E_2 и E_3 и заменити β са $-\beta$. У том случају, постоји ортонормирана база (E_1, E_2, E_3, E_4) таква да је $\kappa_{13} = -\kappa_{12}$, $\mu_{13} = \mu_{12} = 0$, $\mu_{14} \neq 0$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$. Примена (8.22) са $s = r = \varepsilon_4$ доноси

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \quad \mu_{41} = -\mu_{32} = -\mu_{23} = \mu_{14} \neq 0, \\ \kappa_{23} = \kappa_{14}, \quad \kappa_{34} = -\kappa_{24} = -\kappa_{13} = \kappa_{12}, \quad -p = q = \kappa_{12} + \kappa_{14}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где је

$$R_{1234} = -\frac{1}{3}(\kappa_{12} + \kappa_{14}), \quad R_{1324} = \frac{1}{3}(\kappa_{12} + \kappa_{14}), \quad R_{1423} = \frac{2}{3}(\kappa_{12} + \kappa_{14}).$$

Тип II одговара Жордановом блоку величине два, а у том случају постоји база $e = (E_2, E_3, E_4)$ од $E_1^\perp$ таква да је

$$[A]_e = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad [g]_e = \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}.$$

Ако поставимо $F_2 = E_2 \mp E_3$ и $F_3 = E_2 \pm E_3$, добијамо

$$\begin{aligned} AF_2 &= AE_2 \mp AE_3 = \lambda E_2 \mp \lambda E_3 \mp E_2 = \lambda F_2 \mp \frac{1}{2}(F_2 + F_3), \\ AF_3 &= AE_2 \pm AE_3 = \lambda E_2 \pm \lambda E_3 \pm E_2 = \lambda F_3 \pm \frac{1}{2}(F_2 + F_3), \end{aligned}$$

тако да у бази $f = (F_2, F_3, E_4)$ имамо

$$[A]_f = \begin{pmatrix} \lambda \mp \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} & 0 \\ \mp \frac{1}{2} & \lambda \pm \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad [g]_f = \begin{pmatrix} \mp 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}.$$

Ако нормирамо ν тако да је $|\nu| = 1/2$, онда за $\varepsilon = \pm \operatorname{sgn} \nu$ уз смену $\alpha = \pm \lambda$ добијамо

$$[A]_f = \varepsilon \operatorname{sgn} \nu \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \alpha + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad [g]_f = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}.$$

Без умањења општости, у овом случају постоји ортонормирана база (E_1, E_2, E_3, E_4) са $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ таква да је $\kappa_{12} = \mu - \beta$, $\kappa_{13} = \mu + \beta$, $\mu_{13} = \mu_{12} = 0$, $-\mu_{14} = \mu = \mp 1/2 \neq 0$ за неки знак $\pm \in \{-1, 1\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Примена (8.22) са $s = r = \varepsilon_4$ доноси

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \\ \mu_{41} = -\mu_{32} = -\mu_{23} = \mu_{14} = -\mu = \pm \frac{1}{2}, \quad p = \mu + \beta - \kappa, \quad q = \mu - \beta + \kappa \\ \kappa_{23} = \kappa_{14} = \kappa, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13} = \mu + \beta, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12} = \mu - \beta, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где је

$$R_{1234} = \frac{\beta - \kappa}{3} - \mu, \quad R_{1324} = \frac{\kappa - \beta}{3} - \mu, \quad R_{1423} = \frac{2}{3}(\kappa - \beta).$$

Тип III одговара Жордановом блоку величине три, а у том случају постоји база $e = (E_2, E_3, E_4)$ од $E_1^\perp$ таква да је

$$[A]_e = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad [g]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 0 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ако поставимо $F_2 = E_2 \mp E_4$, $F_3 = E_2 \pm E_4$ и $F_4 = \sqrt{2}E_3$, добијамо

$$\begin{aligned} AF_2 &= AE_2 \mp AE_4 = \lambda E_2 \mp \lambda E_4 \mp E_3 = \lambda F_2 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}F_4, \\ AF_3 &= AE_2 \pm AE_4 = \lambda E_2 \pm \lambda E_4 \pm E_3 = \lambda F_3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}F_4, \\ AF_4 &= \sqrt{2}AE_3 = \sqrt{2}\lambda E_3 + \sqrt{2}E_2 = \lambda F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(F_2 + F_3), \end{aligned}$$

тако да у бази $f = (F_2, F_3, F_4)$ имамо

$$[A]_f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda \end{pmatrix}, \quad [g]_f = \begin{pmatrix} \mp 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \end{pmatrix}.$$

Ако нормирамо ν тако да је $|\nu| = 1/2$, онда за $\varepsilon = \text{sgn } \nu$ и $\pm = 1$ добијамо

$$[A]_f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda \end{pmatrix}, \quad [g]_f = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

У овом случају постоји ортонормирана база (E_1, E_2, E_3, E_4) таква да је $\kappa_{13} = \kappa_{14} = -\kappa_{12}$, $\mu_{14} = 0$, $-\mu_{13} = \mu_{12} = \sqrt{2}/2$ са $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$. Примена (8.22) са $s = -\varepsilon_4$ доноси

$$\begin{aligned} \mu_{24} &= \mu_{34} = \mu_{42} = -\mu_{13} = -\mu_{21} = -\mu_{31} = -\mu_{43} = \mu_{12}, \\ \mu_{14} &= \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_{41} = 0, \quad p = q = 0 \\ \kappa_{13} &= \kappa_{14} = \kappa_{23} = \kappa_{24} = -\kappa_{34} = -\kappa_{12}, \end{aligned} \tag{8.26}$$

где је $R_{1234} = R_{1324} = R_{1423} = 0$.

Сумирајући резултате из [24] и [65], закључујемо да је четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине R сигнатуре $(2, 2)$ Осерманов ако и само ако постоји ортонормирана база (E_1, E_2, E_3, E_4) таква да важи једна од четири могућности (8.23), (8.24), (8.25) или (8.26). Посебно смо заинтересовани за ако смер овог тврђења, односно довољност ових услова да R буде цвајштајн или Осерманов.

Ово се елегантно може постићи на начин који је предложен у [30, Лема 3.2], где су Жордан-Осерманови тензори конструисани помоћу паракватернионске структуре. Алтернативно, ово можемо директно верификовати тако што поставимо $X = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$ са $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, те израчунамо $\mathcal{J}_X$ и $(\mathcal{J}_X)^2$ док покушавамо да извучемо фактор $\varepsilon_4 \varepsilon_X = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$. Након што израчунамо $\text{Tr } \mathcal{J}_X$, $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2$ и $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^3$, карактеристични полином добијамо са

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_X(x) &= x^3 - (\text{Tr } \mathcal{J}_X)x^2 + \frac{1}{2}((\text{Tr } \mathcal{J}_X)^2 - \text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2)x \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3} \text{Tr}(\mathcal{J}_X)^3 + \frac{1}{2}(\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2)(\text{Tr } \mathcal{J}_X) - \frac{1}{6}(\text{Tr } \mathcal{J}_X)^3 \right), \end{aligned}$$

што омогућава да испитамо да ли је R Осерманов.

Да бисмо поједноставили рачун, често разматрамо тензор $R' = R + \lambda R^1$ уместо R , за неко погодно $\lambda \in \mathbb{R}$. Нови тензор R' задржава компоненте облика μ_{xy} , као и p и q , док транслира компоненте $\varepsilon_x \varepsilon_y \kappa_{xy}$. Како R' чува сопствену структуру Јакобијевог оператора док транслира његове сопствене вредности, R' је Осерманов ако и само ако је R Осерманов.

За тип Ia, посматрамо тензор R дат у (8.23) са $\kappa_{12} = 0$, $\kappa_{13} = \kappa$ и $\kappa_{14} = \mu$, те рачунамо

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_4 \begin{pmatrix} -\kappa c^2 - \mu d^2 & (-\kappa + \mu)cd & \kappa ac - \mu bd & \kappa bc + \mu ad \\ (-\kappa + \mu)cd & -\kappa d^2 - \mu c^2 & \kappa ad + \mu bc & \kappa bd - \mu ac \\ -\kappa ac + \mu bd & -\kappa ad - \mu bc & \kappa a^2 + \mu b^2 & (\kappa - \mu)ab \\ -\kappa bc - \mu ad & -\kappa bd + \mu ac & (\kappa - \mu)ab & \kappa b^2 + \mu a^2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{J}_X)^2 = -\varepsilon_4 \varepsilon_X \begin{pmatrix} -\kappa^2 c^2 - \mu^2 d^2 & (-\kappa^2 + \mu^2)cd & \kappa^2 ac - \mu^2 bd & \kappa^2 bc + \mu^2 ad \\ (-\kappa^2 + \mu^2)cd & -\kappa^2 d^2 - \mu^2 c^2 & \kappa^2 ad + \mu^2 bc & \kappa^2 bd - \mu^2 ac \\ -\kappa^2 ac + \mu^2 bd & -\kappa^2 ad - \mu^2 bc & \kappa^2 a^2 + \mu^2 b^2 & (\kappa^2 - \mu^2)ab \\ -\kappa^2 bc - \mu^2 ad & -\kappa^2 bd + \mu^2 ac & (\kappa^2 - \mu^2)ab & \kappa^2 b^2 + \mu^2 a^2 \end{pmatrix},$$

што даје $\text{Tr } \mathcal{J}_X = -\varepsilon_X(\kappa + \mu)$, $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 = (\varepsilon_X)^2(\kappa^2 + \mu^2)$ и $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^3 = -(\varepsilon_X)^3(\kappa^3 + \mu^3)$. Зато је $\tilde{\omega}_X(x) = x(x + \varepsilon_X \kappa)(x + \varepsilon_X \mu)$, што доказује да је R Осерманов, као и $R + \kappa_{12}R^1$. Штавише, случај дуплог корена $\kappa_{12} = \kappa_{13}$ се може приказати са $\kappa = 0$, где имамо $(\mathcal{J}_X)^2 = -\varepsilon_X \mu \mathcal{J}_X$, те је $x(x + \varepsilon_X \mu)$ минимални полином од $\mathcal{J}_X$. Зато су и R и $R + \kappa_{12}R^1$ Јакоби-дијагонализабилни, те услови (8.23) одређују Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине.

За тип Ib, посматрамо тензор R дат у (8.24) са $\kappa_{12} = 0$, $\kappa_{14} = \kappa$ и $\mu_{14} = \mu$, те рачунамо

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_4 \begin{pmatrix} -2bc\mu - d^2\kappa & (ac - bd)\mu + cd\kappa & (ab - cd)\mu - bd\kappa & (b^2 + c^2)\mu + ad\kappa \\ (ac - bd)\mu + cd\kappa & 2ad\mu - c^2\kappa & -(a^2 + d^2)\mu + b\kappa & (cd - ab)\mu - ac\kappa \\ (cd - ab)\mu + bd\kappa & (a^2 + d^2)\mu - b\kappa & -2ad\mu + b^2\kappa & (ac - bd)\mu - ab\kappa \\ -(b^2 + c^2)\mu - ad\kappa & (ab - cd)\mu + ac\kappa & (ac - bd)\mu - ab\kappa & 2bc\mu + a^2\kappa \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{J}_X)^2 = \varepsilon_4 \varepsilon_X \begin{pmatrix} (b^2 - c^2)\mu^2 + d^2\kappa^2 & -(ab + cd)\mu^2 - cd\kappa^2 & (ac + bd)\mu^2 + bd\kappa^2 & -ad\kappa^2 \\ -(ab + cd)\mu^2 - cd\kappa^2 & (a^2 - d^2)\mu^2 + c^2\kappa^2 & -bc\kappa^2 & (ac + bd)\mu^2 + ac\kappa^2 \\ -(ac + bd)\mu^2 - bd\kappa^2 & bc\kappa^2 & (a^2 - d^2)\mu^2 - b^2\kappa^2 & (ab + cd)\mu^2 + ab\kappa^2 \\ ad\kappa^2 & -(ac + bd)\mu^2 - ac\kappa^2 & (ab + cd)\mu^2 + ab\kappa^2 & (b^2 - c^2)\mu^2 - a^2\kappa^2 \end{pmatrix},$$

што даје $\text{Tr } \mathcal{J}_X = -\varepsilon_X \kappa$, $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 = (\varepsilon_X)^2(\kappa^2 - 2\mu^2)$, као и

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{J}_X)^3 &= \varepsilon_4 (\varepsilon_X)^2 ((2bc\mu^3 - d^2\kappa^3) + (-2ad\mu^3 - c^2\kappa^3) + (2ad\mu^3 + b^2\kappa^3) + (-2bc\mu^3 + a^2\kappa^3)) \\ &= -(\varepsilon_X)^3 \kappa. \end{aligned}$$

Одавде је $\tilde{\omega}_X(x) = (x + \varepsilon_X \kappa)(x^2 + (\varepsilon_X)^2 \mu^2)$, што доказује да је R Жордан-Осерманов који има комплексну сопствену вредност. Зато је $R + \kappa_{12}R^1$ такође Жордан-Осерманов, те услови (8.24) одређују Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине.

За тип II, посматрамо тензор R у (8.25) са $\kappa_{14} = \kappa = 0$, те рачунамо

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_4 \begin{pmatrix} -(b-c)^2\mu + (b^2 - c^2)\beta & (a+d)(b-c)\mu - (ab+cd)\beta & (a+d)(c-b)\mu + (ac+bd)\beta & -(b-c)^2\mu \\ (a+d)(b-c)\mu - (ab+cd)\beta & -(a+d)^2\mu + (a^2 - d^2)\beta & (a+d)^2\mu & (a+d)(b-c)\mu + (ac+bd)\beta \\ (a+d)(b-c)\mu - (ac+bd)\beta & -(a+d)^2\mu & (a+d)^2\mu + (a^2 - d^2)\beta & (a+d)(b-c)\mu + (ab+cd)\beta \\ (b-c)^2\mu & (a+d)(c-b)\mu - (ac+bd)\beta & (a+d)(b-c)\mu + (ab+cd)\beta & (b-c)^2\mu + (b^2 - c^2)\beta \end{pmatrix}$$

и $(\mathcal{J}_X)^2 = \varepsilon_4 \varepsilon_X \Delta$, где је

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2(b-c)^2\mu + (c^2 - b^2)\beta & 2(a+d)(c-b)\mu + (ab+cd)\beta & 2(a+d)(b-c)\mu - (ac+bd)\beta & 2(b-c)^2\mu \\ 2(a+d)(c-b)\mu + (ab+cd)\beta & 2(a+d)^2\mu + (d^2 - a^2)\beta & -2(a+d)^2\mu & 2(a+d)(c-b)\mu - (ac+bd)\beta \\ 2(a+d)(c-b)\mu + (ac+bd)\beta & 2(a+d)^2\mu & -2(a+d)^2\mu + (d^2 - a^2)\beta & 2(a+d)(b-c)\mu + (ab+cd)\beta \\ -2(b-c)^2\mu & 2(a+d)(b-c)\mu + (ac+bd)\beta & 2(a+d)(c-b)\mu - (ab+cd)\beta & -2(b-c)^2\mu + (c^2 - b^2)\beta \end{pmatrix},$$

што даје $\text{Tr } \mathcal{J}_X = -2\varepsilon_X \beta$, $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^2 = 2(\varepsilon_X)^2 \beta^2$ и $\text{Tr}(\mathcal{J}_X)^3 = -(\varepsilon_X)^3 \beta^3$. Ово доказује да важи $\tilde{\omega}_X(x) = x(x + \varepsilon_X \beta)^2$, те је R Осерманов, што важи и за $R - \kappa R^1$. Како смо већ изучили случај за тип Ia, знамо да не постоји дијагонализабилан $\mathcal{J}_X$ за неко дефинитно X , што значи да су и R и $R - \kappa R^1$ Жордан-Осерманови са једним Жордановим блоком величине два. Зато услови (8.25) одређују Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине.

За тип III, посматрамо тензор R у (8.26) са $\kappa_{12} = 0$. Директан рачун доноси

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_4 \mu_{12} \begin{pmatrix} 2d(b-c) & c(b-c) + d(d-a) & b(c-b) + d(a-d) & (a+d)(c-b) \\ c(b-c) + d(d-a) & 2c(d-a) & (a-d)(b+c) & a(a-d) + c(c-b) \\ b(b-c) + d(d-a) & (d-a)(b+c) & 2b(a-d) & a(a-d) + b(c-b) \\ (a+d)(b-c) & a(d-a) + c(b-c) & a(a-d) + b(c-b) & 2a(c-b) \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{J}_X)^2 = \varepsilon_4 \mu_{12}^2 \varepsilon_X \begin{pmatrix} (c-b)^2 & (c-b)(a-d) & (c-b)(d-a) & -(c-b)^2 \\ (c-b)(a-d) & (a-d)^2 & -(a-d)^2 & (c-b)(d-a) \\ (c-b)(a-d) & (a-d)^2 & -(a-d)^2 & (c-b)(d-a) \\ (c-b)^2 & (c-b)(a-d) & (c-b)(d-a) & -(c-b)^2 \end{pmatrix},$$

што повлачи $(\mathcal{J}_X)^3 = 0$. Лако је видети да $(\mathcal{J}_X)^2 = 0$ повлачи $b = c$ и $a = d$, али онда је $\varepsilon_X = 0$. Зато је R Осерманов где се $\tilde{\mathcal{J}}_X$ састоји од Жордановог блока величине три за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$. Посебно је R Жордан-Осерманов, што важи и за $R + \kappa_{12}R^1$. Зато услови (8.26) одређују Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине.

Лема 8.12. *Ако алгебарски тензор кривине на квадрантном векторском простору сигнаатуре $(2, 2)$ задовољава неки од услова (8.23), (8.24), (8.25), или (8.26), онда је тензор Жордан-Осерманов.*

Нека је R четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине. Као последица Леме 8.12, ако је R Клајнов онда је R Жордан-Осерманов. На основу Теореме 8.10, исто то важи кад је R Лоренцов. Преостаје размотрити случај Римановог R , а тада је $\mathcal{J}_X$ увек дијагонализабилно. Слично случају за тип Ia, можемо изабрати ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3, E_4) такву да је $\mu_{14} = \mu_{13} = \mu_{12} = 0$. Из Леме 8.11 имамо

$$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{14} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{32} = \mu_{34} = \mu_{41} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \\ \kappa_{23} = \kappa_{14}, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13}, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12}, \quad p = \kappa_{13} - \kappa_{14}, \quad q = \kappa_{14} - \kappa_{12}.$$

Као и раније, посматрамо тензор R са $\kappa_{12} = 0$, $\kappa_{13} = \kappa$, $\kappa_{14} = \mu$, те рачунамо

$$\mathcal{J}_X = \begin{pmatrix} \kappa c^2 + \mu d^2 & (\kappa - \mu)cd & -\kappa ac + \mu bd & -\kappa bc - \mu ad \\ (\kappa - \mu)cd & \kappa d^2 + \mu c^2 & -\kappa ad - \mu bc & -\kappa bd + \mu ac \\ -\kappa ac + \mu bd & -\kappa ad - \mu bc & \kappa a^2 + \mu b^2 & (\kappa - \mu)ab \\ -\kappa bc - \mu ad & -\kappa bd + \mu ac & (\kappa - \mu)ab & \kappa b^2 + \mu a^2 \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{J}_X)^2 = \varepsilon_X \begin{pmatrix} \kappa^2 c^2 + \mu^2 d^2 & (\kappa^2 - \mu^2)cd & -\kappa^2 ac + \mu^2 bd & -\kappa^2 bc - \mu^2 ad \\ (\kappa^2 - \mu^2)cd & \kappa^2 d^2 + \mu^2 c^2 & -\kappa^2 ad - \mu^2 bc & -\kappa^2 bd + \mu^2 ac \\ -\kappa^2 ac + \mu^2 bd & -\kappa^2 ad - \mu^2 bc & \kappa^2 a^2 + \mu^2 b^2 & (\kappa^2 - \mu^2)ab \\ -\kappa^2 bc - \mu^2 ad & -\kappa^2 bd + \mu^2 ac & (\kappa^2 - \mu^2)ab & \kappa^2 b^2 + \mu^2 a^2 \end{pmatrix},$$

где је $\varepsilon_X = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Одавде добијамо $\text{Tr } \mathcal{J}_X = \varepsilon_X(\kappa + \mu)$, $\text{Tr } (\mathcal{J}_X)^2 = (\varepsilon_X)^2(\kappa^2 + \mu^2)$ и $\text{Tr } (\mathcal{J}_X)^3 = (\varepsilon_X)^3(\kappa^3 + \mu^3)$. Зато је карактеристични полином $\tilde{\omega}_X(x) = x(x - \varepsilon_X \kappa)(x - \varepsilon_X \mu)$, што доказује да је R Осерманов, као што је то и $R + \kappa_{12}R^1$. Сумирајући претходне резултате, добијамо наредну теорему.

Теорема 8.13. *Четвородимензиони алгебарски тензор кривине је цвајштајн ако и само ако је Жордан-Осерманов.*

8.4 Принцип дуалности

Нека је R Осерманов алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . За јединичне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ природно се јавља импликација

$$\mathcal{J}_X Y = \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \lambda X, \quad (8.27)$$

која значајно може упростити неке рачуне. За јединичан $X \in \mathcal{V}$, Лема А.21 даје ортонормирану сопствену базу $(E_1, \dots, E_{n-1})$ у $X^\perp$ такву да $\mathcal{J}_X E_i = \lambda_i E_i$ важи за $1 \leq i \leq n-1$. Произвољно $Y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i E_i \in X^\perp$ задовољава $g(\mathcal{J}_X Y, Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \lambda_i$, те се све секционне кривине налазе између $\min_i \lambda_i$ и $\max_i \lambda_i$, при чему достижу ове екстремне вредности тачно тада кад су X и Y један другом сопствени вектори. Због тога тврђење (8.27) важи кад је λ екстремна (минимум или максимум) сопствена вредност Јакобијевог оператора, што је искористио Чи 1988. године [37, Лема 3]. Штавише, Ракић

је искористио импликацију (8.27) да формулише и докаже принцип дуалности 1998. године [106, 107].

Међутим, у недефинитном случају импликација (8.27) је непрецизна у случају да X и Y припадају различитим јединичним псеудо-сферама. Стање се исправља у складу са Теоремом 8.2 помоћу наредне импликације коју је дао Андрејић 2006. године [3] (видети такође [16]),

$$\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y \implies \mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X. \quad (8.28)$$

Због компатибилности $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y)$, кадгод су X и Y један другом сопствени вектори, одговарајуће сопствене вредности су исте, те из (8.28) можемо искључити λ увођењем еквивалентне импликације,

$$Y \text{ је сопствени вектор од } \mathcal{J}_X \implies X \text{ је сопствени вектор од } \mathcal{J}_Y. \quad (8.29)$$

Важно је (поготово ако се бавимо обратним проблемом из Секције 8.6) испитати оптимално продужење за наш (X, Y) домен из (8.29). Користимо три врсте дуалности у зависности од тог домена. Ако (8.29) важи за међусобно ортогоналне јединичне X и Y , као што је то случај у оригиналној дефиницији (видети Ракић [106, 107]), кажемо да је R **слабо Јакоби-дуалан**. Ако (8.29) важи за све $X, Y \in \mathcal{V}$ са $\varepsilon_X \neq 0$, кажемо да је R **Јакоби-дуалан** или да R **задовољава њринциј дуалности** (видети Андрејић и Ракић [17]). Коначно, ако (8.29) важи са једином рестрикцијом $X \neq 0$ (концепт у којем импликација (8.28) нема рестрикције на X и Y), кажемо да је R **још још Јакоби-дуалан**.

По дефиницији, потпуно Јакоби-дуалан повлачи Јакоби-дуалан, док Јакоби-дуалан повлачи слабо Јакоби-дуалан. Размотримо друге везе између ових дуалних особина. Како је

$$\mathcal{J}_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}}(Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|}) = \varepsilon_{X/\sqrt{|\varepsilon_X|}} \lambda(Y/\sqrt{|\varepsilon_Y|})$$

еквивалентно са $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ (множење са $|\varepsilon_X| \sqrt{|\varepsilon_Y|} \neq 0$), имамо праволинијско продужење са јединичних на дефинитне векторе. Услов међусобне ортогоналности лако се уклања коришћењем наредне леме коју је изложио Андрејић 2010. године [5, Лема 2].

Лема 8.14. *Ако импликација (8.28) важи за све међусобно ортогоналне X и Y са $\varepsilon_X \neq 0$, тада она важи са једином рестрикцијом $\varepsilon_X \neq 0$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ за $\varepsilon_X \neq 0$ са $g(X, Y) \neq 0$. Ортогонална декомпозиција $Y = \alpha X + Z$ са $g(Z, X) = 0$ повлачи $\alpha \neq 0$. Како је

$$0 = g(\mathcal{J}_X X, \alpha X + Z) = g(\mathcal{J}_X(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z), X) = g(\varepsilon_X \lambda \alpha X, X) = (\varepsilon_X)^2 \alpha \lambda,$$

то $\varepsilon_X \neq 0$ и $\alpha \neq 0$ повлаче $\lambda = 0$. Одавде је $\mathcal{J}_X Z = \mathcal{J}_X(\alpha X + Z) = \varepsilon_X \lambda(\alpha X + Z) = 0$, те због $g(Z, X) = 0$ и $\varepsilon_X \neq 0$, претпоставке леме дају $\mathcal{J}_Z X = 0$. Добијамо

$$\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_{\alpha X + Z}(X) = \alpha \mathcal{R}(X, Z)X + \mathcal{R}(X, Z)Z = -\alpha \mathcal{J}_X Z + \mathcal{J}_Z X = 0,$$

што доказује $\mathcal{J}_Y X = 0 = \varepsilon_Y \lambda X$. □

У случају да је R Јакоби-дијагонализабилан, наш домен се еквивалентно може продужити на све $X, Y \in \mathcal{V}$ са $\varepsilon_X \neq 0$, што је изложио Андрејић 2006. године [3, Теорема 3.1] (видети такође [16, Теорема 3.2] и [5, Теорема 2]).

Теорема 8.15. *Ако је R Јакоби-дијагонализабилан алиѐбарски тензор кривине, тада је R Јакоби-дуалан ако и само ако је слабо Јакоби-дуалан.*

Доказ. Претпоставимо да важи $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$, $g(X, Y) = 0$, $\varepsilon_X \neq 0$ и $\varepsilon_Y = 0$. Како је R Јакоби-дијагонализабилан то је $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) \ni Y$ (уопштени) сопствени простор. По Лему А.22 он је недегенерисан, те Лема 4.10 дозвољава декомпозицију $Y = S + T$, тако да важи $S, T \in \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1})$ и $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1$. За $\theta^2 \neq 1$, $S + \theta T$ је дефинитно због $\varepsilon_{S+\theta T} = \varepsilon_S + \theta^2 \varepsilon_T = (1 - \theta^2) \neq 0$. Вектори $S + \theta T$, S и T су дефинитни, ортогонални на X , сопствени вектори од $\mathcal{J}_X$ који одговарају сопственој вредности $\varepsilon_X \lambda$, те слаба Јакоби-дуалност даје

$$\mathcal{J}_{S+\theta T} X = \varepsilon_{S+\theta T} \lambda X, \quad \mathcal{J}_S X = \varepsilon_S \lambda X, \quad \mathcal{J}_T X = \varepsilon_T \lambda X.$$

Одавде је

$$\varepsilon_{S+\theta T} \lambda X = \mathcal{J}_{S+\theta T} X = \mathcal{J}_S X + \theta^2 \mathcal{J}_T X + 2\theta \mathcal{J}(S, T)X = \varepsilon_S \lambda X + \theta^2 \varepsilon_T \lambda X + 2\theta \mathcal{J}(S, T)X,$$

што за свако $\theta \notin \{-1, 0, 1\}$ повлачи $\mathcal{J}(S, T)X = 0$. Тада је

$$\mathcal{J}_Y X = \mathcal{J}_{S+T} X = \mathcal{J}_S X + \mathcal{J}_T X + 2\mathcal{J}(S, T)X = \varepsilon_S \lambda X + \varepsilon_T \lambda X = 0 = \varepsilon_Y \lambda X,$$

што доказује (8.28) за $X \perp Y$ и $\varepsilon_X \neq 0$. Коначно, Лема 8.14 уклања услов $X \perp Y$. $\square$

Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . За свако фиксирано јединично $X = E_x \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \dots, E_n)$ за $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_X$. За сваки корен $\lambda \in \mathbb{R}$ од $\det(\varepsilon_X \lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$, постављамо $\Lambda = \{1 \leq j \leq n : \varepsilon_X \varepsilon_j R_{xjx} = \lambda\}$ и примењујемо Теорему 8.8, те добијамо

$$\sum_{i,j \in \Lambda} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0,$$

за све $1 \leq y \neq x \leq n$.

Под претпоставком да $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора, сваки сопствени простор састоји се од вектора који су истог типа, $\varepsilon_i \varepsilon_j = 1$ важи за $i, j \in \Lambda$, што повлачи $\sum_{i,j \in \Lambda} (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 0$. Одавде важи $R_{ixyj} + R_{iyxj} = 0$ за све $i, j \in \Lambda$, те посебно за $i = j$ имамо $R_{ixxi} = 0$ за свако $i \in \Lambda$. Како је свако z у неком Λ имамо $R_{xzzz} = 0$ за све $z \neq x$, те зато услов $\mathcal{J}_{E_x} E_z = \varepsilon_X \lambda E_z$ повлачи $\mathcal{J}_{E_z} E_x = \sum_p \varepsilon_p R_{xzzp} E_p = \varepsilon_X R_{xzzx} E_x = \varepsilon_z \lambda E_x$, што доказује да је R Јакоби-дуалан.

Теорема 8.16. *Нека је R Јакоби-дијагонализабилан Осерманов алгебарски тензор кривине иакав да $\mathcal{J}_X$ нема изотропних сопствених вектора за све јединичне X . Тада је R Јакоби-дуалан.*

Теорему 8.16 је поставио Андрејић 2006. године [3, Теорема 3.4] (видети такође [16, Последица 3.5]) и она има значајне последице. На пример, Осерманов R са свим различитим сопственим вредностима за Јакобијев оператор је обавезно Јакоби-дијагонализабилан са једнодимензионим сопственим просторима, те је зато Јакоби-дуалан. Приметимо да се ово тврђење пре може видети као последица Теореме 8.7, неголи Теореме 8.8.

У сваком случају, најзначајнија последица долази у дефинитном случају, кад изотропни вектори не постоје и свако R је Јакоби-дијагонализабилно. Зато је сваки Риманов Осерманов R Јакоби-дуалан, штавише он је потпуно Јакоби-дуалан. Напоменимо да је ово важно тврђење (заправо чињеницу да је Риманов Осерманов R слабо Јакоби-дуалан) први доказао Ракић 1998. године [106, Теорема 2.5] [107, Теорема 1.1], док је касније другачији доказ изложио Гилки 2001. године [57, Теорема 3.1.2].

Теорема 8.17. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине је потпуно Јакоби-дуалан.*

Сваки Осерманов тензор је цвајштајн, а у димензији $n = 4$ рачуни се значајно поједностављују због малог броја компоненти тензора кривине. Претпоставимо да је R четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине и преузмимо нотацију и резултате из Секције 8.3.

Ако $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за јединичне међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$, онда је најједноставније рачунати у ортонормираној бази (E_1, E_2, E_3, E_4) за $\mathcal{V}$ где је $E_1 = X, E_2 = Y$. Претпоставка $\mathcal{J}_{E_1} E_2 = \varepsilon_1 \lambda E_2$ даје $\kappa_{12} = R_{2112} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda, \mu_{14} = R_{2113} = 0$ и $\mu_{13} = R_{2114} = 0$, одакле (8.15) (или општије (8.22)) даје $\mu_{23} = R_{1224} = 0$ и $\mu_{24} = R_{1223} = 0$. Имамо $\mathcal{J}_{E_2} E_1 = \varepsilon_1 \kappa_{12} E_1 + \varepsilon_3 \mu_{24} E_3 + \varepsilon_4 \mu_{23} E_4 = \varepsilon_2 \lambda E_1$, што даје $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$.

Овако смо доказали да је сваки четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине слабо Јакоби-дуалан, што је резултат који је оригинално поставио Андрејић 2006. године [3] (видети такође [16, Теорема 4.1]), док је презентован једноставнији доказ из [5, Теорема 3].

Претпоставимо да $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$, где је X јединичан, а Y изотропан. Поставимо $E_1 = X$. Лема 4.10 раставља $Y = E_2 + E_3$ са међусобно ортогоналним јединичним E_2 и E_3 , који су ортогонални на X , тако да је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3$. Изаберимо вектор E_4 тако да је (E_1, E_2, E_3, E_4) ортонормирана база за $\mathcal{V}$, што је погодна база за посматрање компоненти тензора R .

Из услова $\mathcal{J}_{E_1} (E_2 + E_3) = \varepsilon_1 \lambda (E_2 + E_3)$ добијамо $\varepsilon_2 \kappa_{12} + \varepsilon_2 \mu_{14} = \varepsilon_1 \lambda, \varepsilon_3 \kappa_{13} + \varepsilon_3 \mu_{14} = \varepsilon_1 \lambda, \mu_{13} + \mu_{12} = 0$, одакле је $\kappa_{12} + \kappa_{13} = -2\mu_{14}$. Ако је R цвајштајн, из (8.14) следи $\mu_{23} = \mu_{32}$, док (8.18) даје $\mu_{24} = \varepsilon_4 s \mu_{13} = -\varepsilon_4 s \mu_{12} = \mu_{34}$. Са друге стране из (8.17) и (8.15) имамо $\mu_{23}(p + q) = -\mu_{14}(\kappa_{12} + \kappa_{13}) = 2\mu_{14}^2 = 2\mu_{23}^2$, док (8.19) даје $(p + q)^2 = (\kappa_{12} + \kappa_{13})^2 = 4\mu_{23}^2$, што доноси $p + q = 2\mu_{23} = \mu_{23} + \mu_{32}$. Како је

$$\mathcal{J}_{E_2+E_3} E_1 = \varepsilon_1(\kappa_{12} + 2\mu_{14} + \kappa_{13})E_1 + \varepsilon_2(-\mu_{24} + \mu_{34})E_2 + \varepsilon_3(\mu_{24} - \mu_{34})E_3 + \varepsilon_4(\mu_{23} - (p + q) + \mu_{32})E_4,$$

то претходни резултати дају $\mathcal{J}_{E_2+E_3} E_1 = 0 = \varepsilon_{E_2+E_3} \lambda E_1$, односно $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X$.

Показали смо да импликација (8.28) важи за међусобно ортогоналне X и Y где је X дефинитно, те се по Леми 8.14 услов ортогоналности може искључити, одакле добијамо наредну теорему коју је дао Андрејић 2010. године [5, Теорема 4].

Теорема 8.18. *Сваки четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан.*

Наравно, Осерманов R је цвајштајн те је зато сваки четвородимензиони Осерманов алгебарски тензор кривине Јакоби-дуалан.

8.5 Квази-Клифордови тензори

Подсетимо се првих примера алгебарских тензора кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Они укључују R^1 из (6.13) и R^J из (6.14), где је J косоадјунгован ендоморфизам од $\mathcal{V}$. Како што је показано у Примеру 6.7 свака линеарна комбинација

$$R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^{J_i} \quad (8.30)$$

је такође алгебарски тензор кривине, где су $J_1, \dots, J_m$ косоадјунговани ендоморфизми од $\mathcal{V}$ и $\mu_j \in \mathbb{R}$ за $0 \leq j \leq m$.

Клифордова фамилија ранга m је антикомутативна фамилија косоадјунгованих комплексних структура J_i за $1 \leq i \leq m$. Алгебарске тензоре кривине облика (8.30) који су повезани са Клифордовом фамилијом увео је Гилки 1994. године [56] (видети

такође [61]). Ми разматрамо уопштење, антикомутативну фамилију ендоморфизма J_i таквих да је $J_i^2 = c_i \mathbb{1}$ за неке $c_i \in \mathbb{R}$. Ови ендоморфизми испуњавају уопштене Хурвицове релације,

$$J_i J_j + J_j J_i = 2c_i \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad (8.31)$$

за $1 \leq i, j \leq m$. Алгебарски тензор кривине R је **квази-Клифоров** ако има облик (8.30) и задовољава (8.31). овај концепт увели су Андрејић и Лукић¹⁰ 2019. године [13]. У специјалном случају где је $c_i = -1$ за све $1 \leq i \leq m$, тензор R је **Клифоров**.

Добро је познато да је Клифоров алгебарски тензор кривине Осерманов. Обрат, међутим, јесте дубок резултат. На основу резултата Николајевског [96, Секција 2], у Римановом окружењу сваки Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине је обавезно Клифоров. Ово важи у свим димензијама осим за $n = 16$, те и у многим случајевима где је $n = 16$.

Размотримо квази-Клифоров алгебарски тензор кривине R и произвољан вектор $X \in \mathcal{V}$. Како је свако J_i косоадјунговано, имамо $g(J_i X, X) = 0$. То поједностављује Јакобијев оператор који узима облик,

$$\mathcal{J}_X Y = \mathcal{R}(Y, X)X = \mu_0(g(X, X)Y - g(Y, X)X) + \sum_{i=1}^m 3\mu_i g(J_i Y, X)J_i X,$$

те је зато

$$\mathcal{J}_X Y = \mu_0(\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) - 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(Y, J_i X)J_i X. \quad (8.32)$$

Штавише, уопштене Хурвицеве релације (8.31) повлаче $g(J_i X, J_j X) = 0$ и $\varepsilon_{J_i X} = -c_i \varepsilon_X$ за $1 \leq i \neq j \leq m$. Ако дефинишемо

$$\mathcal{F}_t = \{X, J_1 X, \dots, J_t X\}$$

за $1 \leq t \leq m$, добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_X(J_i X) &= \varepsilon_X(\mu_0 + 3c_i \mu_i)J_i X, \\ \mathcal{J}_X Z &= \varepsilon_X \mu_0 Z, \end{aligned}$$

за свако $1 \leq i \leq m$ и $Z \in \mathcal{F}_m^\perp$.

Важно је разликовати случај $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$ од случаја $c_i = 0$, $k < i \leq m$. За дефинитно X , скуп $\mathcal{F}_k$ састоји се од међусобно ортогоналних дефинитних сопствених вектора, те су и $\text{Span}(\mathcal{F}_k)$ и $\mathcal{F}_k^\perp$ недегенерисани, док је $\text{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k)$ потпуно изотропан потпростор. Из инклузије $\mathcal{F}_k^\perp \cap \text{Span}(\mathcal{F}_m \setminus \mathcal{F}_k)^\perp \leq \text{Ker}((\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1})^n)$ следи да је

$$\mathcal{F}_k^\perp \cap \text{Ker}((\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1})^n)^\perp \leq \text{Span}\{J_{k+1} X, \dots, J_m X\}.$$

Међутим, уопштени сопствени простор је недегенерисан (Лема А.22), као и његов ортогонал, који не може бити садржан у потпуно изотропном потпростору, осим ако је тривијалан. Зато је $\text{Ker}((\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1})^n) = \mathcal{F}_k^\perp$, одакле је

$$\det \left(x \mathbb{1} - \frac{1}{\varepsilon_X} \mathcal{J}_X \right) = x(x - \mu_0)^{n-k-1} \prod_{i=1}^k (x - (\mu_0 + 3c_i \mu_i))$$

константно. На основу Теореме 8.2, то показује да је R Осерманов (видети Андрејић и Лукић 2019 [13, Теорема 2.1]).

Теорема 8.19. *Сваки квази-Клифоров алгебарски тензор кривине је Осерманов.*

¹⁰Катарина Лукић (1994), српска математичарка

Додатно, Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ има критичан део на $\mathcal{F}_k^\perp$, где је

$$\text{Im}(\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1}) \subseteq \text{Span}\{J_{k+1}X, \dots, J_m X\} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1}).$$

Одатле је $(\mathcal{J}_X|_{\mathcal{F}_k^\perp} - \varepsilon_X \mu_0 \mathbb{1})^2 = 0$, те је рестрикција нилпотентна у два корака. Следи да квази-Клиффорд R не допушта Жорданове блокове величине веће од 2. Са друге стране, Пример 9.5 приказује Жордан-Осерманов тензор кривине чија Жорданова нормална форма има Жорданов блок величине 3. То значи да обрат не важи у сигнатури $(2, 2)$, где Осерманов R не мора бити квази-Клиффорд.

Сада следимо аргументе које су дали Андрејић и Лукић 2019. године [13], што уопштава претходни рад Андрејића и Ракића [17], у циљу провере да ли је квази-Клиффорд $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^i$ Јакоби-дуалан. Нека је $X \in \mathcal{V}$ дефинитно и претпоставимо да је Y сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$, тако да $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада (8.32) доноси

$$\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)Y = -\mu_0 g(Y, X)X - 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(Y, J_i X) J_i X, \quad (8.33)$$

док промена улога за X и Y у (8.32) даје

$$\mathcal{J}_Y X = \mu_0(\varepsilon_Y X - g(X, Y)Y) - 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(X, J_i Y) J_i Y. \quad (8.34)$$

У случају $\lambda \neq \mu_0$, једнакоат (8.33) нам омогућава да изразимо Y са

$$Y = \frac{-\mu_0 g(Y, X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} X - 3 \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i g(Y, J_i X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} J_i X. \quad (8.35)$$

Ако то заменимо у (8.34) добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Y X = & \mu_0 \left(\varepsilon_Y X - g(X, Y) \left(\frac{-\mu_0 g(Y, X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} X - 3 \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j g(Y, J_j X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} J_j X \right) \right. \\ & \left. - 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(X, J_i Y) J_i \left(\frac{-\mu_0 g(Y, X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} X - 3 \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j g(Y, J_j X)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} J_j X \right) \right). \end{aligned}$$

Ово се даље поједностављује са

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Y X = & \mu_0 \left(\varepsilon_Y + \frac{\mu_0 (g(X, Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} \right) X + \frac{3\mu_0 g(X, Y)}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} \sum_{i=1}^m \mu_i (g(Y, J_i X) + g(X, J_i Y)) J_i X \\ & + \frac{9}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i \mu_j g(X, J_i Y) g(Y, J_j X) J_i J_j X. \end{aligned}$$

Како је свако J_i косоадјунговано, средњи члан на десној страни нестаје. Штавише, за $1 \leq i \neq j \leq m$ релација $\mu_i \mu_j g(X, J_i Y) g(Y, J_j X) J_i J_j X + \mu_j \mu_i g(X, J_j Y) g(Y, J_i X) J_j J_i X = 0$ елиминише унакрсне чланове у двострукој суми. Последишно добијамо

$$\mathcal{J}_Y X = \left(\mu_0 \varepsilon_Y + \frac{\mu_0^2 (g(X, Y))^2}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} - \frac{9}{\varepsilon_X(\lambda - \mu_0)} \sum_{i=1}^m \mu_i^2 (g(Y, J_i X))^2 c_i \right) X,$$

те је зато X сопствени вектор од $\mathcal{J}_Y$.

У супротном, кад је $\lambda = \mu_0$, једнакост (8.33) се своди на

$$\mu_0 g(Y, X)X + 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(Y, J_i X) J_i X = 0. \quad (8.36)$$

Раздвајањем индекса тако да је $c_i \neq 0$ за $1 \leq i \leq k$ и $c_i = 0$ за $k < i \leq m$, видимо да је за свако дефинитно X потпростор $\text{Span}\{X, J_1 X, \dots, J_k X\}$ недегенерисан димензије $k+1$ и ортогоналан на $\{J_{k+1} X, \dots, J_m X\}$. За такво X , једнакост (8.36) доноси $\mu_i g(X, J_i Y) = \mu_i g(Y, J_i X) = 0$ за $1 \leq i \leq k$ заједно са $\mu_0 g(Y, X) = 0$. Тако остаје $\sum_{i=k+1}^m \mu_i g(Y, J_i X) J_i X = 0$, док (8.34) постаје $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu_0 X - 3 \sum_{i=k+1}^m \mu_i g(X, J_i Y) J_i Y$.

У случају $m = k+1$, горња релација се своди на $\mu_{k+1} g(Y, J_{k+1} X) J_{k+1} X = 0$, што форсира $\mu_{k+1} g(Y, J_{k+1} X) = 0$. Последишно добијамо релацију дуалности, $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu_0 X$. Ово успоставља наредни резултат (видети [13, Теорема 3.1]).

Теорема 8.20. *Сваки квази-Клифоров алгебарски тензор кривине са највише једним индексом i са $c_i = 0$ је Јакоби-дуалан.*

Међутим, тврђење више није тачно ако постоје бар два таква J_i са $c_i = 0$. Нека је $(T_1, \dots, T_p, S_1, \dots, S_q)$ ортонормирана база квадратног векторског простора $(\mathcal{V}, g)$ сигнатуре (p, q) . Дефинишимо ендоморфизам J од $\mathcal{V}$ са

$$\begin{aligned} JT_1 &= T_2 + S_2 = -JS_1, & -JT_2 &= T_1 + S_1 = JS_2 \\ JT_3 &= T_4 + S_4 = -JS_3, & -JT_4 &= T_3 + S_3 = JS_4 \\ JT_5 &= \dots = JT_p = JS_5 = JS_6 = \dots = JS_q = 0. \end{aligned}$$

Праволинијски је проверити да је J косоадјунгован са $J^2 = 0$, те конструишемо алгебарски тензор кривине са $R = R^J$. Његов Јакобијев оператор је по формули (8.32) дат са $\mathcal{J}_X Y = -3g(Y, JX)JX$, одакле следи да му је карактеристични полином x^{p+q} . Уколико је $JX \neq 0$, онда Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ има има тачно један блок величине 2, док за $JX = 0$ имамо $\mathcal{J}_X = 0$ и такви блокови се не појављују. Ако запишемо $X = \sum_{i=1}^p \alpha_i T_i + \sum_{i=1}^q \beta_i S_i$, видимо да $JX = 0$ важи ако и само ако је $\alpha_i = \beta_i$ за свако $1 \leq i \leq 4$. Овај услов се никад не дешава за дефинитно $X \in \text{Span}\{T_1, \dots, T_4, S_1, \dots, S_4\}$, док увек важи за произвољно $X \in \text{Span}\{T_5, \dots, T_p, S_5, \dots, S_q\}$. У специјалном случају $4 = p < q$, Осерманов тензор $R = R^J$ је временски Жордан-Осерманов, али није просторно Жордан-Осерманов. Тако добијамо резултат попут оног који су дали Гилки и Иванова [59, Теорема 3], као и Гилки [57, Секција 3.2].

Теорема 8.21. *Постоје временски Жордан-Осерманови алгебарски тензори кривине који нису просторно Жордан-Осерманови.*

За конструкцију примера квази-Клифоровог тензора R који није Јакоби-дуалан, поред већ дефинисаног косоадјунгованог ендоморфизма J са $J^2 = 0$, по Теорему 8.20, потребан нам је барем још један косоадјунговани ендоморфизам K са $K^2 = 0$. Неопходно је ствари уредити тако да постоји дефинитан X такав да су JX и KX линеарно зависни. У исто време морамо обезбедити и антикомутативну релацију $JK = -KJ$. Уводимо такав ендоморфизам K од $\mathcal{V}$ са

$$\begin{aligned} KT_1 &= T_2 + S_2 = -KS_1, & -KT_2 &= T_1 + S_1 = KS_2 \\ KT_5 &= T_6 + S_6 = -KS_5, & -KT_6 &= T_5 + S_5 = KS_6 \\ KT_3 &= KT_4 = KT_7 = \dots = KT_p = KS_3 = KS_4 = KS_7 = \dots = KS_q = 0. \end{aligned}$$

Нови ендоморфизам K је направљен по узору на J , тако да вектори T_3, T_4, S_3, S_4 мењају улоге са T_5, T_6, S_5, S_6 , тим редом. Због тога је K косоадјунгован са $K^2 = 0$ и

додатно имамо $JK = KJ = 0$, што задовољава захтев антикомутативности. Уколико дефинишемо

$$R = R^J - R^K,$$

онда добијамо квази-Клифоров алгебарски тензор кривине R који је Осерманов по Теорему 8.19.

Из (8.32), Јакобијев оператор од R задовољава $\mathcal{J}_X Y = 3(g(Y, KX)KX - g(Y, JX)JX)$. Како је $JT_1 = KT_1 = T_2 + S_2$, то следи $\mathcal{J}_{T_1} Y = 0$ за свако $Y \in \mathcal{V}$. Са друге стране, за $Y = T_2 + \sqrt{2}S_4$ имамо

$$g(Y, JT_1) = g(Y, KT_1) = g(T_2 + \sqrt{2}S_4, T_2 + S_2) = -1,$$

те је зато $\mathcal{J}_Y T_1 = 3(g(Y, JT_1)JY - g(Y, KT_1)KY) = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3)$. Тако добијамо

$$\mathcal{J}_{T_1}(T_2 + \sqrt{2}S_4) = 0, \quad \mathcal{J}_{T_2 + \sqrt{2}S_4}(T_1) = -3\sqrt{2}(T_3 + S_3),$$

што демонстрира да R није Јакоби-дуалан. Штавише, овај контрапример садржи међусобно ортогоналне јединичне векторе $X = T_1$ и $Y = T_2 + \sqrt{2}S_4$ за које принцип дуалности пада.

Теорема 8.22. *Постоје квази-Клифорови (и заједно Осерманови) алгебарски тензори кривине који нису Јакоби-дуални.*

Први покушај конструкције Осермановог алгебарског тензора кривине који није Јакоби-дуалан објављен је 2019. године у [13, Теорема 3.2]. У тој конструкцији K је направљен по узору на J тако да се само вектори S_4 и S_5 мењају. Нажалост, овај оригинални пример не обезбеђује услов антикомутативности за J и K , те добијени тензор није ни квази-Клифоров ни Осерманов. Ипак, основна идеја је исправна и наши рачуни након увођења K прате оригинални приступ готово дословно.

Нека је R квази-Клифоров алгебарски тензор кривине. За ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ и $\theta_0, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}$ посматрајмо релацију

$$\theta_0 X + \theta_1 J_1 X + \dots + \theta_m J_m X = 0. \quad (8.37)$$

За свако $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^m$ дефинишемо ендоморфизам $J^\alpha = J_m^{\alpha_m} \dots J_1^{\alpha_1}$ и $(-1)^\alpha = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}$. Применом $(-1)^\alpha J^\alpha$ на (8.37), добијамо $\sum_{i=0}^m (-1)^\alpha \theta_i J^\alpha J^i X = 0$, где уводимо $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im})$ са додатном конвенцијом $e_0 = (0, \dots, 0)$, тако да је $J^{e_i} = J_i$ и $J^{e_0} = 1$. Како је $(-1)^\alpha J^\alpha J^{e_i} = (-1)^{\alpha_i + \dots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} J^{\alpha \pm e_i}$, за $1 \leq i \leq m$, где се $\alpha \pm e_i$ разликује од α само на i -том месту, за свако $\alpha \in \{0, 1\}^m$ добијамо једнакост

$$\sum_{i=0}^m (-1)^{\alpha_i + \dots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} \theta_i J^{\alpha \pm e_i} X = 0.$$

На овај начин долазимо до хомогеног система од 2^m линеарних једначина са 2^m непознатих, $\sum_\beta M_{\alpha\beta} J^\beta X = 0$, где је

$$M_{\alpha\alpha} = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} \theta_0, \\ M_{\alpha(\alpha \pm e_i)} = (-1)^{\alpha_i + \dots + \alpha_m} (c_i)^{\alpha_i} \theta_i,$$

за $1 \leq i \leq m$, а у супротном $M_{\alpha\beta} = 0$. Сад посматрамо квадрат ове матрице. Његови елементи су дати са

$$(M^2)_{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha} M_{\alpha\alpha} + M_{\alpha(\alpha \pm e_1)} M_{(\alpha \pm e_1)\alpha} + \dots + M_{\alpha(\alpha \pm e_m)} M_{(\alpha \pm e_m)\alpha} = \theta_0^2 - c_1 \theta_1^2 - \dots - c_m \theta_m^2, \\ (M^2)_{\alpha(\alpha \pm e_i)} = M_{\alpha\alpha} M_{\alpha(\alpha \pm e_i)} + M_{\alpha(\alpha \pm e_i)} M_{(\alpha \pm e_i)(\alpha \pm e_i)} = 0, \\ (M^2)_{\alpha(\alpha \pm e_i \pm e_j)} = M_{\alpha(\alpha \pm e_i)} M_{(\alpha \pm e_i)(\alpha \pm e_i \pm e_j)} + M_{\alpha(\alpha \pm e_j)} M_{(\alpha \pm e_j)(\alpha \pm e_i \pm e_j)} = 0,$$

док је у супротном $(M^2)_{\alpha\beta} = 0$. Тако је M^2 дијагонално и важи

$$(\det M)^2 = \det(M^2) = (\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \dots - c_m\theta_m^2)^{2^m}.$$

За $\det M \neq 0$, систем дозвољава само тривијално решење $X = J_1X = \dots = J_mX = 0$. Како је $X \neq 0$, мора бити $\det M = 0$. То доказује наредну теорему коју су поставили Андрејић и Лукић 2019. године [13, Теорема 4.1].

Теорема 8.23. Нека је $\{J_1, \dots, J_m\}$ квази-Клифорова фамилија са $J_i^2 = c_i 1$ за $1 \leq i \leq m$. Ако за неки ненула вектор X и $\theta_0, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}$ важи релација $\theta_0X + \theta_1J_1X + \dots + \theta_mJ_mX = 0$, онда је $\theta_0^2 - c_1\theta_1^2 - \dots - c_m\theta_m^2 = 0$.

Посебно, ако је R Клифоров, онда је $c_i = -1$ за све $1 \leq i \leq m$. По Теорему 8.23 услов $\theta_0X + \theta_1J_1X + \dots + \theta_mJ_mX = 0$ повлачи $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \dots + \theta_m^2 = 0$, што даје $\theta_i = 0$ за све $0 \leq i \leq m$, те је скуп $\{X, J_1X, \dots, J_mX\}$ линеарно независан. По Теорему 8.20, R је Јакоби-дуалан. Сад претпоставимо да је Y сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$ за изотропан вектор X . Тада Теорема 8.4 даје $\mathcal{J}_XY = 0$, и (8.32) се своди на (8.36) доносећи $\mu_i g(Y, J_iX) = 0$ за $1 \leq i \leq m$, заједно са $\mu_0 g(Y, X) = 0$. Следи $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y \mu_0 X$, те је X сопствени вектор од $\mathcal{J}_Y$. Ово успоставља наредни резултат који је дат у [13, Theorem 4.2].

Теорема 8.24. Сваки Клифоров алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан.

Нека је R квази-Клифоров алгебарски тензор кривине. Косоадјунговани ендоморфизми са $J_i^2 = 0$ мењају Жорданову нормалну форму од $\mathcal{J}_X$ те зато нису компатибилни са принципом дуалности, као што смо већ приметили у Теорему 8.22. Уклонимо такве тако што поставимо $m = k$, остављајући само оне J_i који су аутоморфизми. Не умањујући општост, након скалирања сваког J_i са $(1/\sqrt{|c_i|})J_i$, можемо претпоставити $c_i \in \{-1, 1\}$. Тада кажемо да је такав R **полу-Клифоров**. Праволнијски је приметити да полу-Клифоров R јесте Јакоби-дијагонализабилан, те зато и Жордан-Осерманов.

Последично, посматрамо фамилију $\{J_1, \dots, J_k\}$ антикомутативних косоадјунгованих ортогоналних и антиортогоналних оператора на $\mathcal{V}$. Они су заправо комплексне структуре ($c_i = -1$) и производ структуре ($c_i = 1$). Важно је напоменути да производ структуре J_i мењају сигнатуру, због $\varepsilon_{J_iX} = -\varepsilon_X$. Зато, сваки полу-Клифоров R које није Клајнов јесте Клифоров.

Нека је R полу-Клифоров алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. По Теорему 8.20, R је Јакоби-дуалан и наредни корак је испитати да ли је R потпуно Јакоби-дуалан. Размотримо почетни услов $\mathcal{J}_XY = 0$ за изотропан вектор $X \in \mathcal{V}$. Ако поставимо $\theta_0 = \mu_0 g(Y, X)$ и $\theta_i = 3\mu_i g(Y, J_iX)$ за $1 \leq i \leq m$, онда је $\theta_0X + \theta_1J_1X + \dots + \theta_mJ_mX = 0$. Одатле је

$$\theta_0^2 = \mu_0 g(Y, \theta_0X) = -\mu_0 \sum_{i=1}^m \theta_i g(Y, J_iX) = -\mu_0 \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3\mu_i},$$

док Теорема 8.23 доноси

$$\theta_0^2 = \sum_{i=1}^m c_i \theta_i^2 = -\mu_0 \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i^2}{3\mu_i}, \quad (8.38)$$

те зато имамо

$$\sum_{i=1}^m (c_i + \frac{\mu_0}{3\mu_i}) \theta_i^2 = 0. \quad (8.39)$$

Питање да ли је R потпуно Јакоби-дуалан своди се на то да ли почетни услов увек даје $\mathcal{J}_YX = \varepsilon_Y \mu_0 X - \theta_0 Y + \theta_1 J_1 Y + \dots + \theta_m J_m Y$ које мора бити пропорционално са X . Ово одмах важи кад $\theta_i = 0$ је за све $0 \leq i \leq m$.

Ако су сви бројеви $(3c_i\mu_i + \mu_0)/\mu_i$ за $1 \leq i \leq m$ позитивни, или сви негативни, онда је $\theta_1 = \dots = \theta_m = 0$ једино решење једначине (8.39). Замена у (8.38) онда даје $\theta_0 = 0$, што успоставља наредну теорему из [13, Теорема 4.3].

Теорема 8.25. *Нека је R полу-Клиффордов алгебарски тензор кривине дефинисан полу-Клиффордском фамилијом $\{J_1, \dots, J_m\}$, где $J_i^2 = c_i \mathbb{1}$ за $1 \leq i \leq m$. Ако $(3c_i\mu_i + \mu_0)\mu_i > 0$ за све $1 \leq i \leq m$, или $(3c_i\mu_i + \mu_0)\mu_i < 0$ за све $1 \leq i \leq m$, онда је R Јакоби-дуалан.*

Претпоставимо да постоји барем једна производ структура $J = J_k$. Како је $J^2 = \mathbb{1}$, имамо $(J - \mathbb{1})(J + \mathbb{1}) = 0$. Зато је $(x - 1)(x + 1)$ минимални полином од J , што показује да J нема Жорданове блокове и самим тим је дијагонализабилно. Ако $JX = \pm X$ и $JY = \pm Y$ за неке $X, Y \in \mathcal{V}$, онда $g(X, Y) = g(\pm X, \pm Y) = g(JX, JY) = -g(X, Y)$, што форсира $X \perp Y$. Због тога су сопствени потпростори $\text{Ker}(J \pm \mathbb{1})$ потпуно изотропни, те добијамо декомпозицију $\mathcal{V} = \text{Ker}(J - \mathbb{1}) \oplus \text{Ker}(J + \mathbb{1})$. У овом случају, скуп $\{X, J_1X, \dots, J_mX\}$ постаје линеарно зависан за неко $X \in \mathcal{V}$, те се аргумент коришћен у доказу Теореме 8.24 не може више применити.

За полу-Клиффорд тензор R кажемо да је **анти-Клиффорд** ако је $c_i = 1$ за све $1 \leq i \leq m$. У том случају, Теорема 8.23 повлачи да из $\theta_1 J_1 X + \dots + \theta_m J_m X = 0$ мора бити $\theta_1^2 + \dots + \theta_m^2 = 0$, што показује да је скуп $\{J_1 X, \dots, J_m X\}$ линеарно независан за свако изотропно $X \in \mathcal{V}$. Зато по Теорему 4.12 постоји изотропни суплемент $M_1, \dots, M_m$, тако да важи $g(J_i X, M_j) = \delta_{ij}$ и $M_i \perp M_j$ за све $1 \leq i, j \leq m$.

За свако $1 \leq k \leq m$, постоји изотропан сопствени вектор X такав да је $J_k X = X$, што даље повлачи $J_k M_k = -M_k$. У том случају имамо

$$\mathcal{J}_X Y = -(3\mu_k + \mu_0)g(X, Y)X - 3 \sum_{i \neq k} \mu_i g(J_i X, Y)J_i X.$$

Теорема 8.25 редукује могућности за конструкцију анти-Клиффордског тензора који није потпуно Јакоби-дуалан. Најједноставније је оборити услов те теореме кад је $3\mu_k + \mu_0 = 0$ за неко $1 \leq k \leq m$. Нека је сад $Z \in \text{Span}\{J_1 X, \dots, J_m X, M_1, \dots, M_m\}^\perp$. Онда имамо $\mathcal{J}_X(M_k + Z) = 0$. Са друге стране,

$$\mathcal{J}_{M_k+Z} X = \mu_0 \varepsilon_Z X - \mu_0(M_k + Z) + 3\mu_k J_k(M_k + Z) = \mu_0 \varepsilon_Z X + 3\mu_k(Z + J_k Z).$$

Ако је $n > 2m$, онда постоји дефинитно Z и у том случају $\mathcal{J}_{M_k+Z} X$ није пропорционално са X , што показује да R није потпуно Јакоби-дуалан.

Теорема 8.26. *Нека је $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^i$ анти-Клиффорд алгебарски тензор кривине димензије n . Ако је $3\mu_k + \mu_0 = 0$ за неко $1 \leq k \leq m$ и $n > 2m$, онда R није Јакоби-дуалан.*

Пример 8.2. Нека је J косоадјунгована производ структура на квадратном векторском простору димензије $n > 2$. Тада је $R = 3R^1 - R^J$ Осерманов, али не и потпуно Јакоби-дуалан. $\triangle$

На основу Теореме 8.25, једина преостала могућност за конструкцију таквог примера је случај кад за $j \neq k$ имамо

$$(3\mu_j + \mu_0)(3\mu_k + \mu_0)\mu_j\mu_k < 0.$$

Како је $(J_j \cos t + J_k \sin t)^2 = J_j^2 \cos^2 t + J_k^2 \sin^2 t = \mathbb{1}$, то следи да за свако $t \in \mathbb{R}$ постоји изотропан вектор X такав да важи

$$X = J_j X \cos t + J_k X \sin t.$$

Ако додатно узмемо $Y \perp J_i X$ за свако $i \neq j, k$, онда услов постаје

$$\mu_0 g(Y, X)X + 3\mu_j g(J_j X, Y)J_j X + 3\mu_k g(J_k X, Y)J_k X = 0,$$

што се своди на

$$\begin{aligned} & \left((\mu_0 \cos^2 t + 3\mu_j)g(J_j X, Y) + (\mu_0 \sin t \cos t)g(J_k X, Y) \right) J_j X \\ & + \left((\mu_0 \cos t \sin t)g(J_j X, Y) + (\mu_0 \sin^2 t + 3\mu_k)g(J_k X, Y) \right) J_k X = 0. \end{aligned}$$

Идеја је изабрати $t \in \mathbb{R}$ такво да је $g(J_j X, Y) \neq 0 \neq g(J_k X, Y)$ и

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \cos^2 t + 3\mu_j & \mu_0 \sin t \cos t \\ \mu_0 \cos t \sin t & \mu_0 \sin^2 t + 3\mu_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(J_j X, Y) \\ g(J_k X, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Услов за детерминанту даје $\mu_0 \mu_j \sin^2 t + \mu_0 \mu_k \cos^2 t + 3\mu_j \mu_k = 0$, што је еквивалентно са

$$\cos^2 t = \frac{\mu_j(3\mu_k + \mu_0)}{\mu_0(\mu_j - \mu_k)}, \quad \sin^2 t = \frac{\mu_k(3\mu_j + \mu_0)}{\mu_0(\mu_k - \mu_j)}.$$

Приметимо да су изрази са десне стране симетрични и у збиру дају 1, а такође су позитивни јер важи

$$\left(3 + \frac{\mu_0}{\mu_j}\right) \left(3 + \frac{\mu_0}{\mu_k}\right) < 0 \implies \left(3 + \frac{\mu_0}{\mu_k}\right) \left(\left(3 + \frac{\mu_0}{\mu_j}\right) - \left(3 + \frac{\mu_0}{\mu_k}\right) \right) < 0.$$

Због тога можемо узети

$$t = \cos^{-1} \sqrt{\frac{\mu_j(3\mu_k + \mu_0)}{\mu_0(\mu_j - \mu_k)}}, \quad Y = (\mu_0 \cos^2 t + 3\mu_j)M_j + (\mu_0 \sin t \cos t)M_k,$$

да бисмо добили $\mathcal{J}_X Y = 0$. За $Z \in \text{Span}\{J_1 X, \dots, J_m X, M_1, \dots, M_m\}^\perp$, имамо $\mathcal{J}_X(Y + Z) = 0$. Са друге стране је $\mathcal{J}_{Y+Z} X = \mathcal{J}_Y X + \mu_0 \varepsilon_Z X - g(X, Y)Z + 3\mu_j g(J_j X, Y)J_j Z + 3\mu_k g(J_k X, Y)J_k Z$. Тако, ако је $\mathcal{J}_Y X \propto X$, онда $\mathcal{J}_{Y+Z} X$ није пропорционалан са X док год је Z дефинитно.

Теорема 8.27. Нека је $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^i$ аниш-Клиффорд алгебарски тензор кривине димензије n . Ако је $(3\mu_j + \mu_0)(3\mu_k + \mu_0)\mu_j \mu_k < 0$ за неке $j \neq k$ и $n > 2m$, онда R није аниш-Јакоби-дуалан.

8.6 Јакоби-дуални тензори

У претходној секцији доказали смо да су Осерманови алгебарски тензори кривине Јакоби-дуални под претпоставком малог индекса или ситне димензије. У Римановом окружењу ($\text{Ind } g = 0$), сваки Осерманов R је потпуно Јакоби-дуалан (Теорема 8.17). У Лоренцовом окружењу ($\text{Ind } g = 1$), сваки Осерманов R има константну секциону кривину (Теорема 8.10), те је зато потпуно Јакоби-дуалан (Теорема 8.24).

У случају димензије $n = 4$, сваки Осерманов R је Јакоби-дуалан (Теорема 8.18). Међутим, четвородимензиони Осерманов R не мора бити потпуно Јакоби-дуалан (Пример 8.2), те је главно питање оброта да ли Јакоби-дуалан R обавезно повлачи да је R Осерманов.

Најпре прикажимо елементаран и елегантан доказ да је сваки Риманов Јакоби-дуалан R барем Ајнштајнов (Андрејић и Лукић 2024 [15]).

Лема 8.28. Сваки Риманов Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине је Ајнштајнов.

Доказ. За произвољан јединични вектор $E_1 \in \mathcal{V}$ постоји ортонормирана сопствена база $(E_1, \dots, E_n)$ у $\mathcal{V}$ у односу на $\mathcal{J}_{E_1}$, те постоје скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ који зависе од E_1 , тако да $\mathcal{J}_{E_1} E_i = \lambda_i E_i$ важи за $1 \leq i \leq n$. Ако је R Јакоби-дуалан онда важи $\mathcal{J}_{E_1} E_1 = \lambda_1 E_1$, те посматрајући повисилицу Ричијевог тензора као линеарни оператор имамо $\text{Ric}^\sharp = \mathcal{J}_{E_1} + \dots + \mathcal{J}_{E_n}$, одакле је $\text{Ric}^\sharp(E_1) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)E_1$. Зато је сваки јединични $E_1 \in \mathcal{V}$ сопствени вектор од $\text{Ric}^\sharp$, те су све сопствене вредности од $\text{Ric}^\sharp$ исте, што повлачи да је $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ константно, и доказује да је R Ајнштајнов. $\square$

У решавању обратног проблема веома је корисна наредна универзална лема коју је поставио Андрејић 2009. године [4, Лема 1].

Лема 8.29. *Ако је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$ за $X \perp Y$, њада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи*

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y).$$

Доказ. У питању је последица праволинијског рачуна,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) &= \mathcal{R}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y, \alpha X + \beta Y)(\alpha X + \beta Y) \\ &= (\varepsilon_X \alpha^2 + \varepsilon_Y \beta^2) \mathcal{R}(X, Y)(\alpha X + \beta Y) \\ &= \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} (\beta \mathcal{J}_Y(X) - \alpha \mathcal{J}_X(Y)) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y). \end{aligned}$$

$\square$

Посматрамо обратни проблем у ситним димензијама. Почнимо са тродимензионим Јакоби-дуалним алгебарским тензором кривине R . Како тродимензиони Ајнштајнов R има константну секциону кривину (Пример 6.13), очекујемо наредну теорему коју је изложио Андрејић 2009. године [4, Теорема 1].

Теорема 8.30. *Тродимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

Доказ. Нека је (E_1, E_2, E_3) произвољна ортонормирана база у $\mathcal{V}$, таква да је $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Како Јакобијев оператор $\mathcal{J}_{E_1}$ има матрицу

$$\mathcal{J}_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 R_{2112} & \varepsilon_2 R_{3112} \\ 0 & \varepsilon_3 R_{2113} & \varepsilon_3 R_{3113} \end{pmatrix},$$

карактеристични полином његовог редукованог Јакобијевог оператора $\tilde{\mathcal{J}}_{E_1}$ је

$$\tilde{\omega}_{E_1}(\lambda) = \lambda^2 - (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})\lambda + \varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{2112} R_{3113} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{3112} R_{2113}.$$

Дискриминанта D квадратне једначине $\tilde{\omega}_{E_1}(\lambda) = 0$ је

$$\begin{aligned} D &= (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})^2 - 4\varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{2112} R_{3113} + 4\varepsilon_2 \varepsilon_3 R_{3112} R_{2113} \\ &= (\varepsilon_2 R_{2112} + \varepsilon_3 R_{3113})^2 + 4(R_{2113})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

За $D > 0$ наша квадратна једначина има два различита реална корена, који дају две различите сопствене вредности од $\tilde{\mathcal{J}}_{E_1}$, те постоје два једнодимензиона сопствена простора. У супротном, $D = 0$ даје $\varepsilon_2 R_{2112} = \varepsilon_3 R_{3113}$ и $R_{2113} = 0$, те је $\tilde{\mathcal{J}}_{E_1}$ дијагоналан са двоструким кореном и имамо дводимензиони сопствени простор. Зато постоји ортонормирана сопствена база (E_1, E_2, E_3) у односу на $\mathcal{J}_{E_1}$.

Како је R Јакоби-дуалан, E_1 је сопствени вектор од $\mathcal{J}_{E_2}$ што испуњава захтеве Леме 8.29, те је $\varepsilon_2 \beta E_1 - \varepsilon_1 \alpha E_2$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha E_1 + \beta E_2}$. Штавише, за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ где важи

$\alpha^2\varepsilon_1 + \beta^2\varepsilon_2 \neq 0$, и $\alpha E_1 + \beta E_2$ и $\varepsilon_2\beta E_1 - \varepsilon_1\alpha E_2$ су дефинитни и међусобно ортогонални. Како је $\mathcal{J}_{\alpha E_1 + \beta E_2}$ самоадјунгован, $\mathcal{J}_{\alpha E_1 + \beta E_2}E_3$ је ортогоналан и на $\varepsilon_2\beta E_1 - \varepsilon_1\alpha E_2$ и на $\alpha E_1 + \beta E_2$, те је E_3 сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha E_1 + \beta E_2}$. Из Јакоби-дуалности $\alpha E_1 + \beta E_2$ је сопствени вектор од $\mathcal{J}_{E_3}$, што је могуће само ако је $\text{Span}\{E_1, E_2\}$ дводимензиони сопствени простор од $\tilde{\mathcal{J}}_{E_3}$. Слично, можемо доказати да је $\text{Span}\{E_1, E_3\}$ сопствени простор од $\tilde{\mathcal{J}}_{E_2}$. Одавде имамо $\varepsilon_1\varepsilon_2R_{1221} = \varepsilon_2\varepsilon_3R_{2332} = \varepsilon_1\varepsilon_3R_{1331} = \kappa$ и $R_{2113} = R_{1223} = R_{1332} = 0$. Ове једначине у потпуности одређују R , те он има константну секциону кривину κ . $\square$

Нека је R четвородимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$. Претпоставимо да постоји неко дефинитно X такво да је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан. Тада постоји ортонормирана сопствена база (E_1, E_2, E_3, E_4) у $\mathcal{V}$ таква да $\mathcal{J}_{E_1}E_i = \varepsilon_1\lambda_{1i}E_i$ важи за $i = 2, 3, 4$. Не умањујући општост претпоставимо $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.

Како из Јакоби-дуалности следи $\mathcal{J}_{E_2}E_1 = \varepsilon_2\lambda_{12}E_1$, то је $\mathcal{J}_{E_2}$ инваријантно на дефинитном потпростору $\text{Span}\{E_3, E_4\}$. Зато је $\mathcal{J}_{E_2}$ дијагонализабилно са два међусобно ортогонална сопствена вектора $\alpha_3E_3 + \alpha_4E_4$ и $\varepsilon_4\alpha_4E_3 - \varepsilon_3\alpha_3E_4$ за неко $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_3^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2\varepsilon_4 \neq 0$. Одавде следе пропорционалности

$$\begin{aligned}\alpha_3^2\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + \alpha_4^2\mathcal{J}_{E_4}(E_2) + 2\alpha_3\alpha_4\mathcal{J}(E_3, E_4)(E_2) &\propto E_2, \\ \alpha_4^2\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + \alpha_3^2\mathcal{J}_{E_4}(E_2) - 2\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_3\alpha_4\mathcal{J}(E_3, E_4)(E_2) &\propto E_2,\end{aligned}$$

те је зато

$$(\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_3^2 + \alpha_4^2)\mathcal{J}_{E_3}(E_2) + (\varepsilon_3\varepsilon_4\alpha_4^2 + \alpha_3^2)\mathcal{J}_{E_4}(E_2) \propto E_2.$$

Одавде, $\mathcal{J}_{E_3}E_2 \perp E_4$ заједно са $\mathcal{J}_{E_3}(\text{Span}\{E_2, E_4\}) \subseteq \text{Span}\{E_2, E_4\}$ (из $\mathcal{J}_{E_3}E_1 = \varepsilon_3\lambda_{13}E_1$) повлачи $\mathcal{J}_{E_3}E_2 \propto E_2$, те је $\mathcal{J}_{E_3}E_4 \propto E_4$. Добијамо $\mathcal{J}_{E_2}E_3 \propto E_3$ и $\mathcal{J}_{E_2}E_4 \propto E_4$, одакле се види да наша база дијагонализује све операторе $\mathcal{J}_{E_1}, \mathcal{J}_{E_2}, \mathcal{J}_{E_3}, \mathcal{J}_{E_4}$. Тако долазимо до $\mathcal{J}_{E_i}E_j = \varepsilon_i\lambda_{ij}E_j$, где је $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ за све $1 \leq i, j \leq 4$.

Овај закључак допушта једноставне рачуне,

$$\mathcal{J}(E_1, E_2)(E_3) = \sum_i \varepsilon_i \frac{1}{2} (R_{312i} + R_{321i})E_i = \frac{1}{2}\varepsilon_4(R_{3124} + R_{3214})E_4,$$

што важи у свим пермутацијама индекса из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Како је

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(E_3) &= (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23})E_3 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon_4(R_{3124} + R_{3214})E_4, \\ \mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(E_4) &= (\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24})E_4 + \alpha_1\alpha_2\varepsilon_3(R_{4123} + R_{4213})E_3,\end{aligned}$$

након смене $Q_{12} = R_{3124} + R_{3214} = R_{4123} + R_{4213}$, имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(\alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4) &= (\alpha_3(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23}) + \alpha_4\alpha_1\alpha_2\varepsilon_3Q_{12})E_3 \\ &\quad + (\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24}) + \alpha_3\alpha_1\alpha_2\varepsilon_4Q_{12})E_4.\end{aligned}$$

Потребно је дискутовати два случаја, $Q_{12} \neq 0$ и $Q_{12} = 0$.

Најпре претпоставимо да је $Q_{12} \neq 0$. За све $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_2^2\varepsilon_2 \neq 0$, по Леми 8.29 је $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(\varepsilon_2\alpha_2 E_1 - \varepsilon_1\alpha_1 E_2) = \varepsilon_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}\lambda_{12}(\varepsilon_2\alpha_2 E_1 - \varepsilon_1\alpha_1 E_2)$. Зато постоје $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ тако да је $\alpha_3^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2\varepsilon_4 \neq 0$ и $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(\alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4) \propto \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4$. Одавде је

$$\alpha_4(\alpha_3(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{23}) + \alpha_4\alpha_1\alpha_2\varepsilon_3Q_{12}) = \alpha_3(\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1\lambda_{14} + \alpha_2^2\varepsilon_2\lambda_{24}) + \alpha_3\alpha_1\alpha_2\varepsilon_4Q_{12}),$$

што повлачи

$$\alpha_3\alpha_4(\alpha_1^2\varepsilon_1(\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \alpha_2^2\varepsilon_2(\lambda_{23} - \lambda_{24})) = \alpha_1\alpha_2Q_{12}(\alpha_3^2\varepsilon_4 - \alpha_4^2\varepsilon_3).$$

Међутим, Јакоби-дуалност повлачи да је $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{\alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4}$, те због $Q_{34} = R_{2341} + R_{2431} = R_{1342} + R_{1432} = Q_{12}$, можемо користити симетричну формулу да добијемо

$$\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3^2 \varepsilon_3 (\lambda_{31} - \lambda_{32}) + \alpha_4^2 \varepsilon_4 (\lambda_{41} - \lambda_{42})) = \alpha_3 \alpha_4 Q_{12} (\alpha_1^2 \varepsilon_2 - \alpha_2^2 \varepsilon_1).$$

Рескалирајмо са $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = y$, $\alpha_4 = 1$, што значи да за свако x (са $x^2 \neq -\varepsilon_1 \varepsilon_2$) постоји y (са $y^2 \neq -\varepsilon_3 \varepsilon_4$) такво да је

$$\begin{aligned} (\varepsilon_4 Q_{12} x) y^2 - (\varepsilon_1 x^2 (\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2 (\lambda_{23} - \lambda_{24})) y - \varepsilon_3 Q_{12} x &= 0, \\ (\varepsilon_3 (\lambda_{13} - \lambda_{23}) x) y^2 - (Q_{12} (\varepsilon_2 x^2 - \varepsilon_1)) y + \varepsilon_4 (\lambda_{14} - \lambda_{24}) x &= 0. \end{aligned}$$

Како решења (квадратне једначине по y) иду у паровима (међусобно ортогонални сопствени вектори), последње две једначине дају иста решења, што повлачи

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 Q_{12} x &= K \varepsilon_3 (\lambda_{13} - \lambda_{23}) x, \\ \varepsilon_1 x^2 (\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2 (\lambda_{23} - \lambda_{24}) &= K Q_{12} (\varepsilon_2 x^2 - \varepsilon_1), \\ -\varepsilon_3 Q_{12} x &= K \varepsilon_4 (\lambda_{14} - \lambda_{24}) x, \end{aligned}$$

за бесконачно много x и неко $K = K(x) \in \mathbb{R}$. Одмах је $\lambda_{13} - \lambda_{23} = -(\lambda_{14} - \lambda_{24})$, што даје

$$\lambda_{13} + \lambda_{14} = \lambda_{23} + \lambda_{24}.$$

Додатно важи

$$\varepsilon_3 (\lambda_{13} - \lambda_{23}) (\varepsilon_1 x^2 (\lambda_{13} - \lambda_{14}) + \varepsilon_2 (\lambda_{23} - \lambda_{24})) = \varepsilon_4 Q_{12}^2 (\varepsilon_2 x^2 - \varepsilon_1),$$

те полиномијална једначина

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\lambda_{13} - \lambda_{23}) (\lambda_{13} - \lambda_{14}) - \varepsilon_2 \varepsilon_4 Q_{12}^2) x^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\lambda_{13} - \lambda_{23}) (\lambda_{23} - \lambda_{24}) + \varepsilon_1 \varepsilon_4 Q_{12}^2 = 0$$

има бесконачно много решења, одакле следи

$$\begin{aligned} (\lambda_{13} - \lambda_{23}) (\lambda_{13} - \lambda_{14}) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 Q_{12}^2, \\ (\lambda_{13} - \lambda_{23}) (\lambda_{23} - \lambda_{24}) &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 Q_{12}^2. \end{aligned}$$

Зато је $\lambda_{13} - \lambda_{14} = \lambda_{24} - \lambda_{23}$, што заједно са $\lambda_{13} + \lambda_{14} = \lambda_{24} + \lambda_{23}$ повлачи

$$\lambda_{13} = \lambda_{24} \quad \text{и} \quad \lambda_{14} = \lambda_{23}.$$

Штавише, имамо

$$(\lambda_{13} - \lambda_{14})^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 Q_{12}^2, \tag{8.40}$$

из чега одмах следи $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1$, што значи да $Q_{12} \neq 0$ није могуће у Лоренцовом окружењу.

Пређимо сада на случај $Q_{12} = 0$, где важи $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(E_3) = (\alpha_1^2 \varepsilon_1 \lambda_{13} + \alpha_2^2 \varepsilon_2 \lambda_{23}) E_3$, одакле Јакоби-дуалност даје

$$\alpha_1 \varepsilon_3 \lambda_{13} E_1 + \alpha_2 \varepsilon_3 \lambda_{23} E_2 = \mathcal{J}_{E_3}(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2) = \varepsilon_3 \frac{\alpha_1^2 \varepsilon_1 \lambda_{13} + \alpha_2^2 \varepsilon_2 \lambda_{23}}{\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2} (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2),$$

што повлачи $\lambda_{13} = \lambda_{23}$. Слично, $\mathcal{J}_{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}(E_4) = (\alpha_1^2 \varepsilon_1 \lambda_{14} + \alpha_2^2 \varepsilon_2 \lambda_{24}) E_4$ даје $\lambda_{14} = \lambda_{24}$.

Закључак дискусије је да $Q_{12} \neq 0$ даје $\lambda_{13} = \lambda_{24}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{23}$, док иначе $Q_{12} = 0$ доноси $\lambda_{13} = \lambda_{23}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{24}$. Сличне закључке добијамо користећи симетрије за $Q_{13} = R_{2134} + R_{2314}$ и $Q_{14} = R_{3142} + R_{3412}$ у односу на $Q_{12} = R_{3124} + R_{3214}$. Случај $Q_{13} \neq 0$

даје $\lambda_{12} = \lambda_{34}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{23}$, док $Q_{13} = 0$ доноси $\lambda_{12} = \lambda_{23}$ и $\lambda_{14} = \lambda_{34}$, као што $Q_{14} \neq 0$ даје $\lambda_{13} = \lambda_{24}$ и $\lambda_{12} = \lambda_{34}$, док $Q_{14} = 0$ доноси $\lambda_{13} = \lambda_{34}$ и $\lambda_{12} = \lambda_{24}$.

Случај $Q_{12} = Q_{13} = Q_{14} = 0$ одмах даје $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34}$, док једначина $0 = R_{1234} + R_{2314} + R_{3124} = R_{1234} + (Q_{13} - R_{2134}) + (R_{3412} - Q_{14}) = 3R_{1234}$ следи из првог Бјанкијевог идентитета, те је $R_{1234} = -R_{1324} = 0$. Одавде је $R = \lambda_{12}R^1$, те је R константне секционе кривине. Приметимо да је ово једини могући случај у Лоренцовом окружењу, јер ако је $Q_{1i} \neq 0$ за неко $2 \leq i \leq 4$ одмах, због (8.40), важи $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1$.

Како први Бјанкијев идентитет даје $Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} = 0$, то остали случајеви имају барем два од Q_{12} , Q_{13} и Q_{14} који су различити од нуле. Одавде је очигледно да у сваком случају (рачунајући и онај са $Q_{12} = Q_{13} = Q_{14} = 0$) важи

$$\lambda_{12} = \lambda_{34}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{24}, \quad \lambda_{14} = \lambda_{23}.$$

Захваљујући формули (8.40) која важи за $Q_{12} \neq 0$, као и њој симетричним формулама, додатно имамо $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 1$ и једначине $(\lambda_{14} - \lambda_{13})^2 = Q_{12}^2$, $(\lambda_{12} - \lambda_{14})^2 = Q_{13}^2$, $(\lambda_{13} - \lambda_{12})^2 = Q_{14}^2$, јер за евентуално $Q_{1i} = 0$ важи $\lambda_{1j} = \lambda_{ik} = \lambda_{ij} = \lambda_{1k}$, где је $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Мењајући, уколико је потребно, знак једног вектора у нашој бази, можемо поставити

$$\lambda_{14} - \lambda_{13} = Q_{12}, \quad \lambda_{12} - \lambda_{14} = Q_{13}, \quad \lambda_{13} - \lambda_{12} = Q_{14}.$$

На пример, ако је $Q_{12} \neq 0$ тада $\lambda_{14} - \lambda_{13} = -Q_{12}$, након што заменимо E_4 са $-E_4$, даје $\lambda_{14} - \lambda_{13} = Q_{12}$. Сада, ако је $\lambda_{12} - \lambda_{14} \neq Q_{13}$ то је $\lambda_{12} - \lambda_{14} = -Q_{13}$, и добијамо $\pm(\lambda_{13} - \lambda_{12}) = Q_{14} = -Q_{12} - Q_{13} = \lambda_{12} - 2\lambda_{14} + \lambda_{13}$. Како је $\lambda_{14} \neq \lambda_{13}$ то следи $\lambda_{14} = \lambda_{12}$, те је $Q_{13} = 0 = \lambda_{12} - \lambda_{14}$. Тако добијамо

$$\begin{aligned} \lambda_{14} - \lambda_{13} &= Q_{12} = -R_{1324} + R_{1432} = R_{1234} - 2R_{1324}, \\ \lambda_{12} - \lambda_{14} &= Q_{13} = -R_{1234} + R_{1423} = -2R_{1234} + R_{1324}, \end{aligned}$$

те је зато

$$R_{1234} = -\frac{2}{3}\lambda_{12} + \frac{1}{3}\lambda_{13} + \frac{1}{3}\lambda_{14}, \quad R_{1324} = -\frac{1}{3}\lambda_{12} + \frac{2}{3}\lambda_{13} - \frac{1}{3}\lambda_{14}.$$

На овај начин израчунали смо последња два од 20 независних координатних компоненти тензора кривине (видети Теорему 6.4), што у потпуности одређује R . Рачуни су урађени у зависности од три параметра $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14} \in \mathbb{R}$, док од раније имамо 6 независних чланова облика $R_{ijji} = \lambda_{ij} = \lambda_{ki}$ и још 12 њих облика $R_{jiik} = 0$, где је $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине је и Осерманов (Теорема 8.19) и Јакоби-дуалан (Теорема 8.20), тако да је основна идеја конструисати полу-Клифордов алгебарски тензор кривине који ће имати компоненте једнаке компонентама нашег R , те ће из једнозначности следити да је R Осерманов.

Ако је сигнатура дефинитна, не умањујући општост можемо претпоставити да је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, те увести кватернионску Клифордову фамилију $\{J_1, J_2, J_3\}$ дату са

$$\begin{aligned} J_1 E_1 &= E_2, & J_1 E_2 &= -E_1, & J_1 E_3 &= E_4, & J_1 E_4 &= -E_3, \\ J_2 E_1 &= E_3, & J_2 E_2 &= -E_4, & J_2 E_3 &= -E_1, & J_2 E_4 &= E_2, \\ J_3 E_1 &= E_4, & J_3 E_2 &= E_3, & J_3 E_3 &= -E_2, & J_3 E_4 &= -E_1, \end{aligned}$$

где је наше R индуковано Клифордовим

$$R = -\frac{\lambda_{12}}{3}R^{J_1} - \frac{\lambda_{13}}{3}R^{J_2} - \frac{\lambda_{14}}{3}R^{J_3}.$$

Ако је сигнатура неутрална, можемо претпоставити $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, те увести паракватернионску полу-Клифтордову фамилију $\{J_1, J_2, J_3\}$ дату са

$$\begin{aligned} J_1 E_1 &= -E_2, & J_1 E_2 &= E_1, & J_1 E_3 &= E_4, & J_1 E_4 &= -E_3, \\ J_2 E_1 &= E_3, & J_2 E_2 &= E_4, & J_2 E_3 &= E_1, & J_2 E_4 &= E_2, \\ J_3 E_1 &= E_4, & J_3 E_2 &= -E_3, & J_3 E_3 &= -E_2, & J_3 E_4 &= E_1, \end{aligned}$$

где је наше R индуковано полу-Клифтордовим

$$R = -\frac{\lambda_{12}}{3}R^{J_1} + \frac{\lambda_{13}}{3}R^{J_2} + \frac{\lambda_{14}}{3}R^{J_3}.$$

Претходна разматрања доказују наредну теорему коју је дао Андрејић 2018. године [9, Теорема 4.2].

Теорема 8.31. *Сваки четвородимензиони Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине такав да је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилан за неко дефинитно X је Осерманов.*

Последично, сваки Риманов четвородимензиони Јакоби-дуалан R је Осерманов, што је варијанта ове теореме коју су оригинално доказали Брозос-Васкез¹¹ и Мерино¹² 2012. године [29]. Додатно, можемо приметити да сваки Лоренцов четвородимензиони Јакоби-дуалан R има константну секциону кривину.

На основу Теореме 8.10 Лоренцов Осерманов тензор кривине има константну секциону кривину, тако да је природно имати следећу теорему коју су поставили Андрејић и Ракић 2015. године [17, Теорема 4.1].

Теорема 8.32. *Лоренцов дефинитно Јакоби-дуалан алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

Доказ. Нека је T јединични временски вектор у Лоренцовом квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Тада је $T^\perp$ позитивно дефинитан, те је $\tilde{\mathcal{J}}_T$ дијагонализабилан. Нека је $(S_1, \dots, S_{n-1})$ ортонормирана сопствена база за $T^\perp$ у односу на $\tilde{\mathcal{J}}_T$. Тада добијамо $\mathcal{J}_T S_i = \varepsilon_T \lambda_i S_i$ и Јакоби-дуалност даје $\mathcal{J}_{S_i} T = \varepsilon_{S_i} \lambda_i T$ за свако $1 \leq i \leq n-1$. Како је

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{T \pm S_i} T &= \mathcal{R}(T, T \pm S_i)(T \pm S_i) = \mp \mathcal{J}_T S_i + \mathcal{J}_{S_i} T = \lambda_i(T \pm S_i), \\ \mathcal{J}_{T \pm S_i} S_i &= \mathcal{R}(S_i, T \pm S_i)(T \pm S_i) = \mathcal{J}_T S_i \mp \mathcal{J}_{S_i} T = \mp \lambda_i(T \pm S_i), \end{aligned}$$

то је $\mathcal{J}_{T \pm S_i}$ инваријантан на $\mathcal{U}_i = \text{Span}\{T, S_i\}$, те како је самоадјунгован, онда је инваријантан и на $\mathcal{U}_i^\perp = \text{Span} \bigcup_{j \neq i} \{S_j\}$. Рестрикција $\mathcal{J}_{T \pm S_i}|_{\mathcal{U}_i^\perp}$ је дијагонализабилна као самоадјунговани оператор на дефинитном простору. Ако је M дефинитан сопствени вектор од $\mathcal{J}_{T \pm S_i}|_{\mathcal{U}_i^\perp}$, тада $\mathcal{J}_{T \pm S_i} M = \mu M$ заједно са условом потпуне Јакоби-дуалности даје $\mathcal{J}_M(T \pm S_i) = \nu(T \pm S_i)$. Међутим из компатибилности,

$$\mu \varepsilon_M = g(\mathcal{J}_{T \pm S_i} M, M) = g(\mathcal{J}_M(T \pm S_i), T \pm S_i) = \nu \varepsilon_{T \pm S_i} = 0,$$

те је $\mu = 0$ и зато $\mathcal{J}_{T \pm S_i} M = 0$. Последично је $\mathcal{J}_{T \pm S_i} = 0$ на $\mathcal{U}_i^\perp$, одакле $\mathcal{J}_{T \pm S_i} S_j = 0$ важи за све $1 \leq i \neq j \leq n-1$. Тада релација $\mathcal{J}_{T \pm S_i} S_j = 0$ и потпуна Јакоби-дуалност повлаче да је $T + S_i$ сопствени вектор од $\mathcal{J}_{S_j}$. Како је $g(T, T + S_i) = -1 \neq 0$, сопствени вектори T и $T + S_i$ од $\mathcal{J}_{S_j}$ нису ортогонални, те имају исту сопствену вредност. Тако је $\mathcal{J}_{S_j} S_i = \lambda_j S_i$, што повлачи $\lambda_i = \lambda_j$ и R има константну секциону кривину.

Алтернативно, из $\mathcal{J}_{T \pm S_i} = \mathcal{J}_T + \mathcal{J}_{S_i} \pm 2\mathcal{J}(T, S_i)$ добијамо $\mathcal{J}_{T+S_i} + \mathcal{J}_{T-S_i} = 2(\mathcal{J}_T + \mathcal{J}_{S_i})$. Зато $\mathcal{J}_{T \pm S_i} S_j = 0$ повлачи $\mathcal{J}_{S_i} S_j = -\mathcal{J}_T S_j = \lambda_j S_j$. Упоредивши ову једначину након (i, j) -симетрије $\mathcal{J}_{S_j} S_i = \lambda_i S_i$ и након особине Јакоби-дуалности $\mathcal{J}_{S_j} S_i = \lambda_j S_i$, лако закључујемо да је $\lambda_i = \lambda_j$ за $1 \leq i \neq j \leq n-1$, што доказује да R има константну секциону кривину. $\square$

¹¹Miguel Brozos-Vázquez, шпански математичар

¹²Eugenio Merino, шпански математичар

Нека је R Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Размотримо аналитичку криву $\gamma: I \rightarrow \mathcal{V}$ дефинисану на отвореном интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ и дефинишимо једнопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама $A(t) = \mathcal{J}_{\gamma(t)}$ за $t \in I$. На основу Леме 6.5, елементи матрице $\mathcal{J}_{\gamma(t)}$ су хомогени полиноми степена 2 у компонентама од $\gamma(t)$, те су зато аналитички на I . Са друге стране, како је R Јакоби-дијагонализабилан, свако $\mathcal{J}_{\gamma(t)}$ има хиперболички карактеристични полином.

Услови Теореме А.26 су испуњени, што доноси аналитичку функцију сопствене вредности $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ и аналитичку криву сопственог вектора $V: I \rightarrow \mathcal{V}$ тако да

$$\mathcal{J}_{\gamma(t)} V(t) = \lambda(t) V(t)$$

важи за $t \in I$. Одавде следи

$$R(V(t), \gamma(t), \gamma(t), V(t)) = g(\mathcal{J}_{\gamma(t)} V(t), V(t)) = \lambda(t) g(V(t), V(t)) = \lambda(t) \varepsilon_{V(t)}.$$

Ако узмемо извод у односу на t , добијамо

$$2g(\mathcal{J}_{\gamma(t)} V(t), V'(t)) + 2g(\mathcal{J}_{V(t)} \gamma(t), \gamma'(t)) = \lambda'(t) g(V(t), V(t)) + 2\lambda(t) g(V(t), V'(t)),$$

што доводи до идентитета

$$2g(\mathcal{J}_{V(t)} \gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{V(t)} \lambda'(t). \quad (8.41)$$

Претпоставимо да је R Осерманов. Сопствене вредности задовољавају $\lambda(t) = \varepsilon_{\gamma(t)} C$ за неку константу $C \in \mathbb{R}$, те имамо $\lambda'(t) = 2g(\gamma(t), \gamma'(t))C$. Замена тога у (8.41) доноси $g(\mathcal{J}_{V(t)} \gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{V(t)} g(\gamma(t), \gamma'(t))C$, те добијамо

$$\mathcal{J}_{V(t)} \gamma(t) - \varepsilon_{V(t)} C \gamma(t) \perp \gamma'(t). \quad (8.42)$$

Претпоставимо да важи $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \mu Y$ за неко $\mu \in \mathbb{R}$ и векторе $X, Y \in \mathcal{V}$, где је $\varepsilon_X \neq 0$ и $Y \neq 0$. За произвољно $Z \in \mathcal{V}$ дефинишемо криву $\gamma: I \rightarrow \mathcal{V}$ са $\gamma(t) = X + tZ$, где је $I = (-\delta, \delta)$ за неко мало $\delta > 0$. Сада рачун за (8.42) у $t = 0$ даје $\mathcal{J}_{V(0)} X - \varepsilon_{V(0)} CX \perp Z$ за свако $Z \in \mathcal{V}$. Недегенерисаност скаларног производа повлачи $\mathcal{J}_{V(0)} X = \varepsilon_{V(0)} CX$. Конструкција из Теореме А.26 дозвољава почетне услове $V(0) = Y$ и $\lambda(0) = \varepsilon_X \mu = \varepsilon_X C$, што доноси $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \mu X$. То доказује да је R Јакоби-дуалан.

Обратно, претпоставимо да је R Јакоби-дуалан. Тада, за сваки дефинитан вектор $\gamma(t)$ имамо $\mathcal{J}_{V(t)} \gamma(t) = (\varepsilon_{V(t)} / \varepsilon_{\gamma(t)}) \lambda(t) \gamma(t)$. Из (8.41) добијамо $2\varepsilon_{V(t)} \lambda(t) g(\gamma(t), \gamma'(t)) = \varepsilon_{V(t)} \varepsilon_{\gamma(t)} \lambda'(t)$, што се поједностављује као

$$\varepsilon_{V(t)} \left(\frac{\lambda(t)}{\varepsilon_{\gamma(t)}} \right)' = 0. \quad (8.43)$$

Фиксирајмо векторе $X, Z \in \mathcal{V}$ тако да је $\varepsilon_X = \varepsilon_Z \neq 0$ и нека је $\operatorname{sgn} g(X, Z) \neq -\operatorname{sgn} \varepsilon_X$. Дефинишемо криву $\gamma: I \rightarrow \mathcal{V}$ са $\gamma(t) = (1-t)X + tZ$, где је $I = (-\delta, 1+\delta)$ за мало $\delta > 0$. Услов за $g(X, Z)$ даје $\varepsilon_{\gamma(t)} \neq 0$ за све $t \in I$, јер $\varepsilon_{\gamma(t)} = ((1-t)^2 + t^2) \varepsilon_X + 2(1-t)tg(X, Z) \neq 0$. По Теореме А.27 постоје аналитичке функције $\lambda_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ и аналитичка пресликавања $V_j: I \rightarrow \mathcal{V}$, за $1 \leq j \leq n$, тако да је $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ ортонормирана база од $\mathcal{V}$ за све $t \in I$, и $\mathcal{J}_{\gamma(t)} V_j(t) = \lambda_j(t) V_j(t)$. Из (8.43), свако $\lambda_j(t)$ мора имати облик $\lambda_j(t) = \varepsilon_{\gamma(t)} C_j$ за неке константе $C_j \in \mathbb{R}$, те посебно важи $\lambda_j(0) = \lambda_j(1)$ за свако j . То повлачи да $\mathcal{J}_X$ и $\mathcal{J}_Z$ имају исти карактеристични полином. Приметимо да је $\mathcal{J}_Z = \mathcal{J}_{-Z}$, те се услов $\operatorname{sgn} g(X, Z) \neq -\operatorname{sgn} \varepsilon_X$ може искључити, што доказује да је R Осерманов.

Теорема 8.33. *Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине је Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан.*

Претходна теорема је последица општијег резултата који су дали Николајевски и Ракић 2016. године [98]. Конкретно, сваки Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан [98, Теорема 1], док је полупрост алгебарски тензор кривине Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан [98, Теорема 2]. Напоменимо такође да је Риманов алгебарски тензор кривине Осерманов ако и само ако је Јакоби-дуалан, што је специјалан случај Теореме 8.33, који су претходно доказали Николајевски и Ракић 2013. године [97, Теорема 2.1].

8.7 Принцип ортогоналности

За алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору кажемо да је **Јакоби-ортогоналан** ако за све међусобно ортогоналне векторе X и Y важи да је Јакобијев оператор од X примењен на Y ортогоналан на Јакобијев оператор од Y примењен на X . Појам Јакоби-ортогоналности су увели Андрејић и Лукић 2024. године [15], а испоставља се да је ова особина тесно повезана са Осермановим тензорима (такође видети [84] и [12]).

Испоставља се да је наведени услов довољно верификовати за јединичне векторе, као што видимо у наредној лемми (видети [84, Лема 2.1]).

Лема 8.34. *Ако $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$ важи за све међусобно ортогоналне јединичне векторе X и Y , онда је R Јакоби-ортогоналан.*

Доказ. Потребно је доказати да $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$ важи за све међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$. Можемо претпоставити да су X и Y линеарно независни јер у супротном важи $\mathcal{J}_X Y = 0$. Ако је неки од X или Y дефинитан, можемо га нормирати и заменити га пропорционалним јединичним вектором. То решава случај кад су и X и Y дефинитни.

Сад размотримо случај кад је X јединичан, а Y изотропан. По Лемми 4.10, можемо раставити $Y = S + T$, где су $S, T \in X^\perp$ међусобно ортогонални јединични вектори. Претпоставка леме даје $\mathcal{J}_X S \perp \mathcal{J}_S X$ и $\mathcal{J}_X T \perp \mathcal{J}_T X$, те зато за свако $t \in \mathbb{R}$ имамо

$$g(\mathcal{J}_X(S + tT), \mathcal{J}_{S+tT}X) = g(\mathcal{J}_X S + t\mathcal{J}_X T, \mathcal{J}_S X + 2t\mathcal{J}(S, T)X + t^2\mathcal{J}_T X) = At^2 + Bt,$$

где је $A = g(\mathcal{J}_X S, \mathcal{J}_T X) + g(\mathcal{J}_X T, 2t\mathcal{J}(S, T)X)$ и $B = g(\mathcal{J}_X S, 2t\mathcal{J}(S, T)X) + g(\mathcal{J}_X T, \mathcal{J}_S X)$. За свако $t \neq \pm 1$, вектор $S + tT$ је дефинитан, те $\mathcal{J}_X(S + tT) \perp \mathcal{J}_{S+tT}X$, што повлачи $A = B = 0$. Зато је $g(\mathcal{J}_X(S + T), \mathcal{J}_{S+T}X) = 0$, односно $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$.

Преостаје да решимо случај где су и X и Y изотропни. По Теореми 4.12 постоји изотропан вектор M такав да је $g(Y, M) = 1$ и $X \perp M$. Поставимо $S = (Y + M)/2$ и $T = (Y - M)/2$. Онда је $\varepsilon_S = -\varepsilon_T = 1/2$ и $S \perp T \perp X \perp S$. Примена претходног случаја, за све $t \in \mathbb{R}$ поново добијамо $g(\mathcal{J}_X(S + tT), \mathcal{J}_{S+tT}X) = At^2 + Bt$. За $t \neq \pm 1$, вектор $S + tT$ је дефинитан, те претходни резултат даје $At^2 + Bt = 0$, што доноси $A = B = 0$. Заменом $t = 1$ добијамо $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$. $\square$

Нека је R Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине. Ако је $X \perp Y$ за неке $X, Y \in \mathcal{V}$, онда за свако $t \in \mathbb{R}$ такође имамо $X + tY \perp \varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y$. Рачун даје

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y) &= (\varepsilon_X + \varepsilon_Y t^2)\mathcal{R}(X, Y)(X + tY) = \varepsilon_{X+tY}(t\mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_X Y) \\ \mathcal{J}_{\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y}(X + tY) &= (\varepsilon_X + \varepsilon_Y t^2)\mathcal{R}(Y, X)(\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y) = \varepsilon_{X+tY}(\varepsilon_Y t\mathcal{J}_X Y + \varepsilon_X \mathcal{J}_Y X). \end{aligned}$$

Како је $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$, Јакоби-ортогоналност доноси $(\varepsilon_{X+tY})^2(\varepsilon_X t\varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} - \varepsilon_Y t\varepsilon_{\mathcal{J}_X Y}) = 0$. За дефинитно Y , можемо изабрати произвољно $t \neq 0$ такво да је $t^2 \neq -\varepsilon_X/\varepsilon_Y$. То даје основни идентитет

$$\varepsilon_X \varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} = \varepsilon_Y \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y}. \quad (8.44)$$

По симетрији, (8.44) такође важи кад је X дефинитно, док је у случају $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = 0$ то тривијално задовољено. Зато идентитет (8.44) важи за све међусобно ортогоналне векторе X и Y .

Обратно, претпоставимо да (8.44) важи за све међусобно ортогоналне X и Y . За $X \perp Y$ и свако $t \in \mathbb{R}$ тада имамо

$$\varepsilon_{X+tY}g(\mathcal{J}_{\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y}(X+tY), \mathcal{J}_{\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y}(X+tY)) = \varepsilon_{\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y}g(\mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y), \mathcal{J}_{X+tY}(\varepsilon_Y tX - \varepsilon_X Y)).$$

То доноси

$$(\varepsilon_{X+tY})^3 g(\varepsilon_Y t \mathcal{J}_X Y + \varepsilon_X \mathcal{J}_Y X, \varepsilon_Y t \mathcal{J}_X Y + \varepsilon_X \mathcal{J}_Y X) = (\varepsilon_{X+tY})^3 \varepsilon_X \varepsilon_Y g(t \mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_X Y, t \mathcal{J}_Y X - \mathcal{J}_X Y),$$

те зато

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{X+tY})^3 \left((\varepsilon_Y)^2 t^2 \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y} + (\varepsilon_X)^2 \varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} + 2\varepsilon_X \varepsilon_Y t g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) \right) \\ &= (\varepsilon_{X+tY})^3 \varepsilon_X \varepsilon_Y \left(t^2 \varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} + \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y} - 2t g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) \right). \end{aligned}$$

Коришћењем (8.44), то се своди на $(\varepsilon_{X+tY})^3 \varepsilon_X \varepsilon_Y t g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) = 0$. За дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$ можемо изабрати $t \neq 0$ такво да је $\varepsilon_X + t^2 \varepsilon_Y \neq 0$, што доноси $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$. Коначно, Лема 8.34 показује да је R Јакоби-ортогоналан и добијамо наредну лему.

Лема 8.35. *Алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан ако и само ако $\varepsilon_X \varepsilon_{\mathcal{J}_Y X} = \varepsilon_Y \varepsilon_{\mathcal{J}_X Y}$ важи за све међусобно ортогоналне векторе X, Y .*

Сад можемо размотрити питање да ли Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине мора бити Јакоби-ортогоналан. Претпоставимо да је $R = \mu_0 R^1 + \sum_{i=1}^m \mu_i R^i$ Клифордов, или општије квази-Клифордов, где $J_1, \dots, J_m$ чини антикомутативну фамилију косоадјунгованих ендоморфизама који задовољавају $J_i^2 = c_i \mathbb{1}$ за $1 \leq i \leq m$. Јакобијев оператор узима облик израчунат у (8.32),

$$\mathcal{J}_X Y = \mu_0 (\varepsilon_X Y - g(Y, X)X) - 3 \sum_{i=1}^m \mu_i g(Y, J_i X) J_i X.$$

За $X \perp Y$ рачунамо

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) &= g \left(\mu_0 \varepsilon_X Y - 3 \sum_i \mu_i g(Y, J_i X) J_i X, \mu_0 \varepsilon_Y X - 3 \sum_j \mu_j g(X, J_j Y) J_j Y \right) \\ &= 9 \sum_{i,j} \mu_i \mu_j g(Y, J_i X) g(X, J_j Y) g(J_i X, J_j Y) = 9 \sum_{i,j} \mu_i \mu_j g(Y, J_i X) g(Y, J_j X) g(Y, J_j J_i X) \\ &= \frac{9}{2} \sum_{i,j} \mu_i \mu_j g(Y, J_i X) g(Y, J_j X) g(Y, (J_i J_j + J_j J_i) X) = 9 \sum_i \mu_i^2 c_i g(Y, J_i X)^2 g(Y, X) = 0, \end{aligned}$$

што показује да је R Јакоби-ортогоналан и доноси наредну теорему (видети [15, Теорема 2] и [84, Теорема 2.1]).

Теорема 8.36. *Сваки квази-Клифордов алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан.*

Једини други познати примери Риманових Осерманових тензора су два-корена. Претпоставимо да је R два-корена Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине. Тада постоје две различите сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ тако да за свако ненула $Y \in \mathcal{V}$ имамо декомпозицију $\mathcal{V} = \text{Span}\{Y\} \oplus \mathcal{V}_1(Y) \oplus \mathcal{V}_2(Y)$, где је $\mathcal{V}_i(Y) = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_Y - \varepsilon_Y \lambda_i \mathbb{1})$

за $i = 1, 2$. Раставимо произвољно $X \perp Y$ као $X = X_1 + X_2$ са $X_1 \in \mathcal{V}_1(Y)$ и $X_2 \in \mathcal{V}_2(Y)$. Како је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$, добијамо

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X Y, \mathcal{J}_Y X) &= \varepsilon_Y R(Y, X_1 + X_2, X_1 + X_2, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \\ &= \varepsilon_Y(\lambda_2 - \lambda_1) R(Y, X_1 + X_2, X_1, X_2) = \varepsilon_Y(\lambda_2 - \lambda_1)(g(\mathcal{J}_{X_1} Y, X_2) - g(\mathcal{J}_{X_2} Y, X_1)). \end{aligned}$$

На основу Теореме 8.17, сваки Риманов Осерманов тензор је Јакоби-дуалан, одакле добијамо $g(\mathcal{J}_{X_1} Y, X_2) = g(\varepsilon_{X_1} \lambda_1 Y, X_2) = 0$ и $g(\mathcal{J}_{X_2} Y, X_1) = 0$. Зато је $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$, што доказује да је R Јакоби-ортогоналан.

Теорема 8.37. *Сваки два-корена Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан.*

Желимо да испитамо под којим условима Јакоби-ортогоналност повлачи Јакоби-дуалност. Претпоставимо да $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ важи за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ и $X \perp Y$, где је $\varepsilon_X \neq 0$. Како је $g(\mathcal{J}_Y X, X) = g(\mathcal{J}_X Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \lambda$, добијамо $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X + Z$ за неко $Z \in \text{Span}\{X, Y\}^\perp$. На основу Леме 8.14, да бисмо извели Јакоби-дуалност довољно је показати да важи $Z = 0$.

Ако је R Јакоби-ортогоналан, тада (8.44) доноси $\varepsilon_X((\varepsilon_Y)^2 \lambda^2 \varepsilon_X + \varepsilon_Z) = \varepsilon_Y(\varepsilon_X)^2 \lambda^2 \varepsilon_Y$, што форсира $\varepsilon_Z = 0$. Нека је $W \in \mathcal{V}$ произвољан вектор ортогоналан на X . Како је $Y + tW \perp X$ за свако $t \in \mathbb{R}$, Јакоби-ортогоналност повлачи $\mathcal{J}_{Y+tW} X \perp \mathcal{J}_X(Y + tW)$, и зато

$$R(X, Y + tW, Y + tW, \mathcal{J}_X Y + t\mathcal{J}_X W) = 0.$$

Коефицијент од t у овом изразу је $R(X, Y, Y, \mathcal{J}_X W) + \varepsilon_X \lambda R(X, Y, W, Y) = 0$, те добијамо $\mathcal{J}_Y X \perp \mathcal{J}_X W - \varepsilon_X \lambda W$, што се може записати са

$$Z \perp (\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1})W. \quad (8.45)$$

Нека је $\mu \in \mathbb{R}$ са $\mu \neq \lambda$. За $W \in \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})$ имамо $Z \perp \varepsilon_X(\mu - \lambda)W$, те $Z \perp W$, одакле следи $Z \perp \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})$. Штавише, за $W \in \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})^{k+1}$ релација (8.45) постаје $Z \perp (\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})W + \varepsilon_X(\mu - \lambda)W$. Ако је $Z \perp \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})^k$, онда следи $Z \perp W$. Користећи индукцију по k , закључујемо да је $Z \perp \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})^n$. Зато је Z ортогоналан на сваки уопштени сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$ који одговара сопственој вредности различитој од $\varepsilon_X \lambda$. По Теорему А.24 следи да је $Z \in \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1})^n$.

Лема 8.38. *Нека је $\mathcal{J}_X Y = \varepsilon_X \lambda Y$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ и $X \perp Y$, где је $\varepsilon_X \neq 0$. Ако је R Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине, онда је $\mathcal{J}_Y X = \varepsilon_Y \lambda X + Z$, где је $Z \perp X$ изотропан уопштени сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$ који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X \lambda$. Штавише важи $Z \perp \text{Im}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1})$.*

Посебно, у Римановом окружењу услов $\varepsilon_Z = 0$ одмах даје $Z = 0$. Штавише, по Теорему 8.17, сваки Риманов Јакоби-ортогоналан R је Осерманов. Тако добијамо наредни резултат из [15, Теорема 1, Последица 1].

Теорема 8.39. *Сваки Риманов Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине је Јакоби-дуалан, те тако и Осерманов.*

Општије, нека је R Јакоби-дијагонализабилан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине. Уколико успемо да покажемо да је R слабо Јакоби-дуалан, онда Теорема 8.15 обезбеђује да је R Јакоби-дуалан, те из Теореме 8.33 следи да је R Осерманов. Да бисмо ово окончали, претпоставимо да је Y јединичан вектор и применимо Лему 8.38. Ако је $\dim \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) \leq 2$, онда је $(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) \cap Y^\perp$ недегенерисан потпростор димензије највише један, одакле следи $Z = 0$. У димензији $n = 4$, преостали случај $\dim \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) = 3$ повлачи да је R један-корен. Међутим, сваки Јакоби-дијагонализабилан један-корен тензор мора бити константне секционе кривине (видети Секцију 9.3). Тако добијамо наредни резултат, оригинално постављен у [84, Теорема 3.2].

Теорема 8.40. *Сваки четвородимензиони Јакоби-дијагонализаблан Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине је Осерманов.*

Нека је R Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на Лоренцовом квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. За временско $T \in \mathcal{V}$ и ненула $X \in T^\perp$, имамо $\varepsilon_X \mathcal{J}_T X = \varepsilon_X \mathcal{R}(X, T)T = R(X, T, T, X)X + P$ и $\varepsilon_T \mathcal{J}_X T = \varepsilon_T \mathcal{R}(T, X)X = R(T, X, X, T)T + Q$, где $P, Q \in \text{Span}\{T, X\}^\perp$. Применом (8.44) добијамо

$$(R(X, T, T, X))^2 + \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_X} = \varepsilon_X \varepsilon_{\mathcal{J}_T X} = \varepsilon_T \varepsilon_{\mathcal{J}_X T} = (R(T, X, X, T))^2 + \frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_T},$$

што води ка релацији $\varepsilon_P/\varepsilon_X = \varepsilon_Q/\varepsilon_T$. Међутим, како је $\varepsilon_T < 0$, $\varepsilon_X > 0$ то је $\text{Span}\{T, X\}^\perp$ позитивно дефинитан потпростор који садржи P и Q , одакле следи $P = Q = 0$.

Ако фиксирамо временско $T \in \mathcal{V}$, тада $P = 0$ повлачи $\mathcal{J}_T X \propto X$, те је свако ненула $X \in T^\perp$ сопствени вектор од $\tilde{\mathcal{J}}_T$, и последично имамо $\tilde{\mathcal{J}}_T = \varepsilon_T \kappa_T \mathbb{1}$ за неко $\kappa_T \in \mathbb{R}$. Слично, ако фиксирамо просторно $X \in \mathcal{V}$, тада $Q = 0$ повлачи $\mathcal{J}_X T \propto T$, те је свако временско $T \in X^\perp$ сопствени вектор од $\tilde{\mathcal{J}}_X$. За ненула $Z \in \text{Span}\{T, X\}^\perp$ такво да је $\varepsilon_Z < -\varepsilon_T$, и T и $T+Z$ су временски вектори који нису међусобно ортогонални. Како су Јакобијеви оператори самоадјунговани, T и $T+Z$, као и Z , су сопствени вектори од $\mathcal{J}_X$ који одговарају истој сопственој вредности $\varepsilon_X \kappa_X = g(\mathcal{J}_X T, T)/\varepsilon_T = g(\mathcal{J}_X Z, Z)/\varepsilon_T = \varepsilon_X \kappa_X$. Сада је лако закључити да за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, постоји $\kappa_X \in \mathbb{R}$ такво да је $\tilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \kappa_X \mathbb{1}$.

На овај начин добијамо Лоренцов R такав да $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има јединствену сопствену вредност за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, те по Теорему 8.10 R има константну секциону кривину. Наравно, није неопходно да користимо ову теорему јер $\kappa_X = \kappa_T$ важи за све међусобно ортогоналне, просторно X и временско T , те није тешко директно закључити да R има константну секциону кривину.

Теорема 8.41. *Сваки Лоренцов Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину.*

Нека је R Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине и нека је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирана база за $\mathcal{V}$ у односу на скаларни производ g , где је $\varepsilon_i = \varepsilon_{E_i} \in \{-1, 1\}$ за $1 \leq i \leq n$. За $x \neq y$, имамо $E_x \perp E_y$, те Јакоби-ортогоналност повлачи $\mathcal{J}_{E_x} E_y \perp \mathcal{J}_{E_y} E_x$. Како је $\mathcal{J}_{E_x} E_y = \mathcal{R}(E_y, E_x)E_x = \sum_i \varepsilon_i R_{yxxi} E_i$, добијамо

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{yxxi} R_{xyyi} = 0. \quad (8.46)$$

Са друге стране, основни идентитет (8.44) се може записати са

$$\varepsilon_x \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{xyyi}^2 = \varepsilon_y \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{yxxi}^2. \quad (8.47)$$

Другу једнакост изводимо из (8.44) тако што поставимо $X = E_x$ и $Y = E_y + tE_z$. За различите x, y, z , то доводи до $\sum_i \varepsilon_i (R_{yxxi} + tR_{zxxi})(R_{xyyi} + t(R_{xyzi} + R_{xzyi}) + t^2 R_{xzzi}) = 0$ за све $t \in \mathbb{R}$. Ако узмемо коефицијент од t добијамо

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{yxxi} (R_{xyzi} + R_{xzyi}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{zxxi} R_{xyyi} = 0. \quad (8.48)$$

Слично, постављајући $X = E_x$ и $Y = E_y + tE_z + sE_v$ за различите x, y, z, v , те онда узимајући коефицијент од ts , добијамо

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{yxxi} (R_{xzvi} + R_{xvzi}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{zxxi} (R_{xyvi} + R_{xvyi}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{vxxi} (R_{xyzi} + R_{xzyi}) = 0. \quad (8.49)$$

Алтернативно, можемо поставити $X = E_x + tE_y$ и $Y = E_z + sE_v$ за различите x, y, z, v , те узети коефицијент од ts где добијамо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{zxxi} (R_{yzvi} + R_{yvzi}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (R_{zxyi} + R_{zyxi}) (R_{xzvi} + R_{xvzi}) \\ & + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i R_{vxxi} R_{yzzi} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (R_{vxyi} + R_{vyxi}) R_{xzzi} = 0. \end{aligned} \quad (8.50)$$

8.8 Нискодимензиони Јакоби-ортогонални тензори

Нека је R тродимензиони Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ и нека је (E_1, E_2, E_3) ортонормирана база од $\mathcal{V}$. По Теореме 6.4, R има шест независних компоненти: три облика $\kappa_{xy} = R_{xyyx}$ и три облика $\mu_x = R_{yxxz}$, где (x, y, z) означава пермутацију од $(1, 2, 3)$.

Сада, (8.46) постаје $\mu_x \mu_y = 0$, док (8.47) постаје $\kappa_{xy}^2 + \varepsilon_x \varepsilon_z \mu_y^2 = \kappa_{xy}^2 + \varepsilon_y \varepsilon_z \mu_x^2$, што повлачи $\varepsilon_x \mu_x^2 = \varepsilon_y \mu_y^2$ за различите x, y, z . Зато је $\mu_x = 0$ за свако x . Приметимо да су $E_y + tE_z$ и $\varepsilon_z tE_y - \varepsilon_y E_z$ међусобно ортогонални и оба ортогонална на E_x . За свако $t \in \mathbb{R}$ зато добијамо

$$0 = R(E_y + tE_z, E_x, E_x, \varepsilon_z tE_y - \varepsilon_y E_z) = (\varepsilon_z t^2 - \varepsilon_y) \mu_x + (\varepsilon_z \kappa_{xy} - \varepsilon_y \kappa_{xz}) t = (\varepsilon_z \kappa_{xy} - \varepsilon_y \kappa_{xz}) t.$$

Одавде је $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \kappa_{13} = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_{23}$, што показује да R има константну секциону кривину. Обратно, сваки тензор константне секционе кривине је Јакоби-ортогоналан. Зато добијамо наредну теорему, која је дата у [84, Теорема 3.1].

Теорема 8.42. *Тродимензиони алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан ако и само ако има константну секциону кривину.*

Нека је R четвородимензиони алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ и нека је (E_1, E_2, E_3, E_4) ортонормирана база од $\mathcal{V}$. Задржаћемо нотацију коју смо увели у Секцији 8.3, где R има двадесет независних компоненти: шест облика $\kappa_{xy} = R_{xyyx}$, дванаест облика $\mu_{xy} = R_{xxxy}$, те две додатне компоненте $p = R_{1342} + R_{1432}$ и $q = R_{1243} + R_{1423}$, где (x, y, z, v) означава пермутацију од $(1, 2, 3, 4)$.

Ако је R цвајштајн, онда директна примена Леме 8.11 даје

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{E_1} E_2 &= \varepsilon_2 R_{2112} E_2 + \varepsilon_3 R_{2113} E_3 + \varepsilon_4 R_{2114} E_4 = \varepsilon_2 \kappa_{12} E_2 + \varepsilon_3 \mu_{14} E_3 + \varepsilon_4 \mu_{13} E_4, \\ \mathcal{J}_{E_2} E_1 &= \varepsilon_1 R_{1221} E_1 + \varepsilon_3 R_{1223} E_3 + \varepsilon_4 R_{1224} E_4 = \varepsilon_1 \kappa_{12} E_1 + \varepsilon_3 \varepsilon_4 s \mu_{13} E_3 - \varepsilon_4 \varepsilon_3 s \mu_{14} E_4. \end{aligned}$$

Зато је $g(\mathcal{J}_{E_1} E_2, \mathcal{J}_{E_2} E_1) = (\varepsilon_3 \mu_{14})(\varepsilon_3 \varepsilon_4 s \mu_{13}) \varepsilon_3 + (\varepsilon_4 \mu_{13})(-\varepsilon_4 \varepsilon_3 s \mu_{14}) \varepsilon_4 = 0$. Како се Лема 8.11 примењује у произвољној ортонормираној бази, то следи да $\mathcal{J}_X Y \perp \mathcal{J}_Y X$ важи за све међусобно ортогоналне јединичне векторе X и Y . Дакле, сваки четвородимензиони цвајштајн алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан (видети [12, Пропозиција 4]).

Обратно, нека је R четвородимензиони Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине. Можемо искључити Лоренцов случај и поставити $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \varepsilon_v = 1$, јер смо тај случај решили кроз Теорему 8.41. У нашој нотацији идентитети (8.46) и (8.47) постају

$$\begin{aligned} \varepsilon_z \mu_{xz} \mu_{yz} + \varepsilon_v \mu_{xv} \mu_{yv} &= 0, \\ \varepsilon_x \varepsilon_z \mu_{xz}^2 + \varepsilon_x \varepsilon_v \mu_{xv}^2 &= \varepsilon_y \varepsilon_z \mu_{yz}^2 + \varepsilon_y \varepsilon_v \mu_{yv}^2. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Додатно, (8.48) даје $\varepsilon_v \mu_{xy} \mu_{yz} - \varepsilon_z \mu_{xv} \mu_{zv} + \varepsilon_z \kappa_{xz} \mu_{yv} - \varepsilon_y \kappa_{xy} \mu_{yv} + \varepsilon_v \mu_{xz} (R_{xyzv} + R_{xzyv}) = 0$. Због $\mu_{xv} \mu_{zv} = -\varepsilon_v \varepsilon_y \mu_{xy} \mu_{zy}$, добијамо

$$\mu_{xy} (\varepsilon_v \mu_{yz} + \varepsilon_x \mu_{zy}) + \mu_{yv} (\varepsilon_z \kappa_{xz} - \varepsilon_y \kappa_{xy}) + \varepsilon_v \mu_{xz} (R_{xyzv} + R_{xzyv}) = 0, \quad (8.52)$$

што обезбеђује 24 једнакости.

Коначно, (8.49) доноси

$$\begin{aligned} & \varepsilon_y \kappa_{xy} (R_{xzvy} + R_{xvzy}) + \varepsilon_z \kappa_{xz} (R_{xyvz} + R_{xvyz}) + \varepsilon_v \kappa_{xv} (R_{xyzv} + R_{xzyv}) \\ & - \varepsilon_z \mu_{xv} \mu_{zy} - \varepsilon_v \mu_{xz} \mu_{vy} - \varepsilon_y \mu_{xv} \mu_{yz} - \varepsilon_v \mu_{xy} \mu_{vz} - \varepsilon_y \mu_{xz} \mu_{yv} - \varepsilon_z \mu_{xy} \mu_{zv} = 0, \end{aligned} \quad (8.53)$$

док (8.50) доноси

$$\begin{aligned} & \mu_{xz} (\varepsilon_y \kappa_{yz} - \varepsilon_x \kappa_{xz}) + \mu_{zx} (\varepsilon_v \kappa_{xv} - \varepsilon_z \kappa_{xz}) - (\varepsilon_y \mu_{yv} + \varepsilon_v \mu_{vy}) (R_{xzvy} + R_{xvzy}) \\ & + 2\varepsilon_y \mu_{yx} \mu_{xv} - 2\varepsilon_x \mu_{xy} \mu_{xv} + 2\varepsilon_v \mu_{zy} \mu_{vz} - 2\varepsilon_z \mu_{zy} \mu_{zv} - \varepsilon_v \mu_{xy} \mu_{vx} - \varepsilon_y \mu_{yz} \mu_{zv} = 0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Размотримо случај кад $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за неки јединичан $X = E_1 \in \mathcal{V}$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од једног Жордановог блока величине 3. Као што је виђено у Секцији 8.3, постоји ортонормирана база таква да је

$$-\kappa_{12} = \kappa_{13} = \kappa_{14} = \lambda, \quad \mu_{14} = 0, \quad \mu_{12} = -\mu_{13} = m = \sqrt{2}/2,$$

са $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$.

Применом (8.51) добијамо $\mu_{23} = 0$, $\mu_{24}^2 = m^2$ (за $x = 1, y = 2$) и $\mu_{32} = 0$, $\mu_{34}^2 = m^2$ (за $x = 1, y = 3$) са $\mu_{42} = -\mu_{43}$ (за $x = 1, y = 4$). Након тога добијамо $\mu_{21}\mu_{31} \neq 0$ (за $x = 2, y = 3$), што повлачи $\mu_{41} = 0$, $\mu_{21}^2 = \mu_{43}^2$, $\mu_{31}^2 = \mu_{42}^2$ (за $x = 2, y = 4$ и $x = 3, y = 4$). Додатно $\mu_{24}\mu_{34} = \mu_{21}\mu_{31}$ (за $x = 2, y = 3$) даје $\mu_{21}^4 = \mu_{21}^2\mu_{31}^2 = \mu_{24}^2\mu_{34}^2 = m^4$, што води ка

$$\mu_{14} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_{41} = 0, \quad \mu_{24}^2 = \mu_{34}^2 = \mu_{13}^2 = \mu_{12}^2 = \mu_{21}^2 = \mu_{43}^2 = \mu_{42}^2 = \mu_{31}^2 = m^2,$$

са $\mu_{43} = -\mu_{42}$ и $\mu_{24}\mu_{34} = \mu_{21}\mu_{31}$.

Применом (8.52) за пермутације (1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2), (2, 1, 3, 4) и (3, 1, 2, 4), добијамо $\mu_{42} = \mu_{24}$, $\mu_{43} = -\mu_{34}$, $\mu_{31} = \mu_{13}$ и $\mu_{21} = -\mu_{12}$. Пермутације (1, 4, 3, 2) и (1, 4, 2, 3) дају $p = q = 0$. Коначно, пермутације (2, 4, 1, 3), (2, 3, 1, 4) и (3, 1, 4, 2) повлаче $\kappa_{24} = \lambda$, $\kappa_{23} = \lambda$ и $\kappa_{34} = -\lambda$.

Без умањења општости, претпоставимо $\mu_{24} = \mu_{12}$, јер у супротном, ако је потребно, можемо окренути смер од E_4 у ортонормираној бази. На овај начин одредили смо све компоненте тензора R и добијамо услове (8.26), те по Леми 8.12 имамо да је R Жордан-Осерманов.

Лема 8.43. *Ако је R четвородимензиони Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине шакав да $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од једног Жордановог блока величине 3, за неко дефинишно X , онда је R Жордан-Осерманов.*

Размотримо случај кад $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за неки јединичан $X = E_1 \in \mathcal{V}$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од два Жорданова блока. У том случају постоји ортонормирана база (E_1, E_2, E_3, E_4) са $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$ таква да је

$$\mu_{12} = \mu_{13} = 0, \quad \mu_{14} \neq 0.$$

Применом (8.51), добијамо $\mu_{24} = 0$ (за $x = 1, y = 2$), $\mu_{34} = 0$ (за $x = 1, y = 3$). Након тога имамо $\mu_{21} = \mu_{31} = 0$ (за $x = 2, y = 3$) и $\mu_{23}^2 = \mu_{32}^2 = \mu_{14}^2 \neq 0$ (за $x = 1, y = 2$ и $x = 1, y = 3$). Даље је $\mu_{42} = \mu_{43} = 0$ (за $x = 2, y = 4$ и $x = 3, y = 4$) и $\mu_{41}^2 = \mu_{14}^2$. Одавде имамо

$$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \quad \mu_{41}^2 = \mu_{23}^2 = \mu_{32}^2 = \mu_{14}^2 \neq 0.$$

Без умањења општости претпоставимо $\mu_{23} = -\mu_{14}$, јер у случају $\mu_{23} = \mu_{14}$ можемо окренути смер од E_4 . Уведимо знакове $s, r \in \{-1, 1\}$ тако да је $\mu_{32} = s\mu_{14}$ и $\mu_{41} = r\mu_{14}$.

Примена (8.52) за пермутације $(1, 2, 4, 3)$ и $(2, 1, 3, 4)$ даје $\kappa_{23} = \kappa_{14}$, док за пермутације $(1, 2, 4, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(1, 3, 4, 2)$ и $(4, 2, 1, 3)$ добијамо

$$\kappa_{12} + \kappa_{14} = q, \quad \kappa_{34} + \kappa_{14} = -sq, \quad \kappa_{13} - \kappa_{14} = -sp, \quad \kappa_{24} - \kappa_{14} = rp.$$

Применом (8.53) добијамо

$$\begin{aligned} -\kappa_{12}p + \kappa_{13}q - \kappa_{14}(p + q) - \mu_{32}\mu_{14} + \mu_{23}\mu_{14} &= 0, \\ -\kappa_{12}p + \kappa_{24}q - \kappa_{23}(p + q) - \mu_{23}\mu_{41} + \mu_{23}\mu_{14} &= 0, \end{aligned}$$

те је зато $pq = -\mu_{14}^2$ или $r = -s = 1$.

Применом (8.54) за пермутације $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 3, 4, 2)$, $(2, 1, 3, 4)$ и $(2, 4, 3, 1)$ добијамо

$$\begin{aligned} \mu_{14}(\kappa_{14} - \kappa_{24}) + \mu_{41}(\kappa_{13} - \kappa_{14}) + (\mu_{23} - \mu_{32})p &= 0, \\ \mu_{14}(\kappa_{14} + \kappa_{34}) - \mu_{41}(\kappa_{12} + \kappa_{14}) + (\mu_{23} - \mu_{32})q &= 0, \\ \mu_{23}(\kappa_{23} - \kappa_{13}) + \mu_{32}(\kappa_{24} - \kappa_{23}) + (\mu_{14} - \mu_{41})p &= 0, \\ \mu_{23}(\kappa_{23} + \kappa_{34}) - \mu_{32}(\kappa_{12} + \kappa_{23}) + (\mu_{14} - \mu_{41})q &= 0, \end{aligned}$$

и одатле

$$(s + 1)(r + 1)p = 0, \quad (s + 1)(r + 1)q = 0, \quad (s - 1)(r - 1)p = 0, \quad (s - 1)(r - 1)q = 0,$$

те је $(s + r)p = (s + r)q = 0$, што даје $r = -s$ или $p = q = 0$.

Тако свакако имамо $r = -s$, одакле је $\kappa_{34} = \kappa_{12}$ и $\kappa_{24} = \kappa_{13}$. На овај начин добијамо

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} &= 0, \\ s\mu_{32} = -s\mu_{41} = -\mu_{23} = \mu_{14} \neq 0, \quad \kappa_{23} = \kappa_{14}, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12}, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13} \\ p = -s(\kappa_{13} - \kappa_{14}), \quad q = \kappa_{12} + \kappa_{14}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Напоменимо да имамо $\kappa_{12} + \kappa_{13} = q - sp$. Дискутујемо могуће опције, једну са $s = -1$, и другу са $s = 1$ и $pq = -\mu_{14}^2$.

Размотримо случај кад $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за неки јединичан $X = E_1 \in \mathcal{V}$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од реалног Жордановог блока (са комплексним сопственим вредностима) величине 2 и једним Жордановим блоком величине 1. Овај случај дозвољава ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3, E_4) са $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$ тако да је

$$\kappa_{13} = -\kappa_{12}, \quad \mu_{12} = \mu_{13} = 0, \quad \mu_{14} \neq 0.$$

Применимо (8.55). Имамо $q - sp = \kappa_{12} + \kappa_{13} = 0$, те отуда $pq = sp^2$. Како $pq = -\mu_{14}^2$ није могуће за $s = 1$, добијамо $s = -1$. Тако добијамо услове (8.24), те је по Лемми 8.12, R Жордан-Осерманов.

Лема 8.44. *Ако је R четвородимензиони Јакоби-ортононалан алгебарски тензор кривине такав да $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од два Жорданова блока где је један од њих реалан Жорданов блок величине 2, за неко дефиниционо X , онда је R Жордан-Осерманов.*

Размотримо случај кад $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за неки јединичан $X = E_1 \in \mathcal{V}$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од једног Жордановог блока величине 2 и једног Жордановог блока величине 1. Овај случај дозвољава ортонормирану базу (E_1, E_2, E_3, E_4) за коју је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$ тако да је

$$\kappa_{12} = \pm(\lambda - \frac{1}{2}), \quad \kappa_{13} = \mp(\lambda + \frac{1}{2}), \quad \mu_{12} = \mu_{13} = 0, \quad \mu_{14} = \pm\frac{1}{2},$$

за неки знак $\pm \in \{-1, 1\}$.

Размотримо случај $s = 1$, где знамо да (8.53) повлачи $pq = -\mu_{14}^2$. У том случају, $q - p = \kappa_{12} + \kappa_{13} = -2\mu_{14} \neq 0$, те зато $(q - p)^2 = 4\mu_{14}^2 = -4pq$, што даје $(p + q)^2 = 0$ и повлачи $p = -q = \mu_{14}$. Тако добијамо

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0, \quad -\mu_{41} = \mu_{32} = -\mu_{23} = \mu_{14} \neq 0, \\ \kappa_{23} = \kappa_{14}, \quad \kappa_{34} = \kappa_{12}, \quad \kappa_{24} = \kappa_{13}, \quad p = -q = \mu_{14}, \end{aligned} \quad (8.56)$$

где је

$$R_{1234} = \frac{1}{3}\mu_{14}, \quad R_{1324} = -\frac{1}{3}\mu_{14}, \quad R_{1423} = \frac{2}{3}\mu_{14}.$$

Да бисмо упростили рачуне, посматрајмо тензор R који је дат условима (8.56) са $\kappa_{14} = 0$ и $\mu_{14} = \mu$. Рачуни за $X = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$ показују

$$\mathcal{J}_X = \varepsilon_4 \mu \begin{pmatrix} (b-c)^2 & -(ab+bd+cd-ac) & ab+bd+cd-ac & b^2-c^2 \\ -(ab+bd+cd-ac) & (a+d)^2 & d^2-a^2 & -(ab+bd+cd-ac) \\ -(ab+bd+cd-ac) & a^2-d^2 & -(a-d)^2 & ab+bd+cd-ac \\ c^2-b^2 & ab+bd+cd-ac & ab+bd+cd-ac & -(b+c)^2 \end{pmatrix},$$

што доказује да R чак није ни Ајнштајнов, те зато оригинални тензор $R - \kappa_{14}$ није Осерманов.

Испоставља се да наше једнакости (8.51), (8.52), (8.53) и (8.54) не описују Јакоби-ортогоналност у потпуности. Овај пример задовољава све наше једнакости, те уводимо неке лепе векторе $X = E_1 + E_2 - 3E_3 + 2E_4$ и $Y = -4E_1 + E_2 + E_3$, где оба задовољавају $ab + bd + cd - ac = 0$ и поједностављују рачуне. Имамо $X \perp Y$, али $\mathcal{J}_X Y = -64E_1 + 12E_2 - 4E_3 - 32E_4$ није ортогоналан на $\mathcal{J}_Y X = 64E_2 + 64E_3 - 8E_4$. Ово искључује случај $s = 1$, који није Јакоби-ортогоналан.

Преостаје нам да размотримо случај $s = -1$, где имамо $p + q = \kappa_{12} + \kappa_{13} = \mp 1 = -2\mu_{14} \neq 0$. Применом (8.55) у том случају добијамо услове (8.25), те је по Леми 8.12 R Жордан-Осерманов.

Лема 8.45. *Ако је R четвородимензиони Јакоби-ортогоналан алгебарски тензор кривине шакав да $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има Жорданову нормалну форму која се састоји од два Жорданова блока где је један од њих обичан Жорданов блок величине 2, за неко дефиниционо X , онда је R Жордан-Осерманов.*

Размотримо преостали случај где је $\tilde{\mathcal{J}}_X$ дијагонализабилан за неки јединичан $X = E_1 \in \mathcal{V}$. Како смо у претходној анализи исцрпели све остале могућности, закључујемо да је R Јакоби-дијагонализабилан. Ову ситуацију смо већ разрешили у Теорему 8.40. Комбиновањем претходних резултата добијамо нову карактеризацију Осерманових тензора у димензији четири, коју је успоставио Андрејић 2025. године [12, Теорема 1].

Теорема 8.46. *Четвородимензиони алгебарски тензор кривине је Јакоби-ортогоналан ако и само ако је Осерманов.*

8.9 Прост-корен Осерманови тензори

Посматрајмо k -корена Осерманов алгебарски тензор кривине R на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n којем је

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X \lambda_1)^{v_1} \cdots (\lambda - \varepsilon_X \lambda_k)^{v_k}$$

карактеристични полином Јакобијевог оператора, а $(\lambda - \varepsilon_X \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (\lambda - \varepsilon_X \lambda_k)^{\mu_k}$ минимални полином одговарајућег редукваног Јакобијевог оператора. У општем случају знамо да $1 \leq \mu_i \leq v_i$ важи за $1 \leq i \leq k$, док за Јакоби-дијагонализабилно R (на пример за Риманов R) важи $\mu_i = 1$.

Сви самоадјунговани линеарни оператори $\mathcal{K}_X^i = \mathcal{J}_X - \varepsilon_X \lambda_i \mathbb{1}$ за $1 \leq i \leq k$ са $\mathcal{J}_X$ имају заједничке уопштене сопствене просторе,

$$\text{Ker}(\mathcal{K}_X^i - \varepsilon_X(\lambda_j - \lambda_i) \mathbb{1})^{\mu_j} = \text{Ker}(\mathcal{J}_X - \varepsilon_X \lambda_j \mathbb{1})^{\mu_j},$$

за $1 \leq j \leq k$. Свака два таква оператора комутирају,

$$\mathcal{K}_X^i \mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X^j \mathcal{K}_X^i = (\mathcal{J}_X)^2 - \varepsilon_X(\lambda_i + \lambda_j) \mathcal{J}_X + \varepsilon_X^2 \lambda_i \lambda_j \mathbb{1},$$

те су зато њихове композиције такође самоадјунговане. То нас мотивише да за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ дефинишемо самоадјунговани линеарни оператор $L(X): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ са

$$L(X) = (\mathcal{K}_X^2)^{\mu_2} (\mathcal{K}_X^3)^{\mu_3} \dots (\mathcal{K}_X^k)^{\mu_k}.$$

У изабраној ортонормираној бази $(E_1, \dots, E_n)$ за $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ добијамо

$$g(\mathcal{K}_X^i(E_a), E_b) = \sum_{p,q=1}^n (R_{apqb} - \varepsilon_a \varepsilon_p \delta_{ab} \delta_{pq} \lambda_i) x_p x_q,$$

те су зато елементи матрице $L(X)$ хомогени полиноми степена $2(\mu_2 + \dots + \mu_k)$. Међутим, за дефинитно $X \in \mathcal{V}$, због

$$\mathcal{V} = \text{Span}\{X\} \oplus \bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(\mathcal{K}_X^j)^{\mu_j},$$

лако је видети да

$$\text{Ker } L(X) \supseteq \bigoplus_{j=2}^k \text{Ker}(\mathcal{K}_X^j)^{\mu_j}$$

важи са додатним $L(X)X = (-\varepsilon_X)^{\mu_2 + \dots + \mu_k} \lambda_2^{\mu_2} \lambda_3^{\mu_3} \dots \lambda_k^{\mu_k} X$.

У овој секцији истражујемо случај $\nu_1 = 1$, што значи просту сопствену вредност λ_1 , где је $L(X) = (\varepsilon_X)^{\mu_2 + \dots + \mu_k} (\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} (\lambda_1 - \lambda_3)^{\mu_3} \dots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k} \mathbb{1}$ на $\text{Ker}(\mathcal{K}_X^1)^{\mu_1}$. Ако је $\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k \neq 0$, посматрамо нови алгебарски тензор кривине $R' = R - \lambda_k R^1$ уместо оригиналног R , што је стандардни трик. Одговарајући редуковани Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}'_X$ има исте сопствене просторе као што их има $\tilde{\mathcal{J}}_X$, али су сопствене вредности померене тако да важи $\lambda'_k = 0$, што ће омогућити $L(X)X = 0$.

На овај начин, за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$, имамо самоадјунговану матрицу $L(X)$ ранга један тако да су њени елементи L_{ij} хомогени полиноми степена $2(\mu_2 + \dots + \mu_k)$ по n променљивих $x_1, \dots, x_n$. Свака подматрица реда два у матрици ранга један је сингуларна што даје

$$L_{ii}(X)L_{jj}(X) = L_{ij}(X)L_{ji}(X)$$

за све $1 \leq i, j \leq n$. Међутим, $L(X)$ је самоадјунговано што повлачи

$$\varepsilon_i L_{ij}(X) = g(L(X)E_j, E_i) = g(L(X)E_i, E_j) = \varepsilon_j L_{ji}(X),$$

те је зато

$$\varepsilon_i \varepsilon_j L_{ii}(X)L_{jj}(X) = L_{ij}(X)^2. \quad (8.57)$$

Ако фиксирамо неки мономијални поредак (на пример лексикографски) тада постоји јединствени монични (кофицијент највећег монома је 1) $G(X)$ који је највећи заједнички делитељ за све $L_{ij}(X)$. Пермутовањем базе можемо поставити

$$\varepsilon_i L_{ii}(X) = \sigma_i G(X) Q_i(X) P_i(X)^2,$$

где су $P_i(X)$ и $Q_i(X)$ неки ненула полиноми за $1 \leq i \leq m$, уз додатно $L_{ii}(X) = 0$ за $m < i \leq n$, док је $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. Међутим, таква декомпозиција је јединствена до на знак од $P_i(X)$ уколико поставимо да је $Q_i(X)$ моничан бесквадратан. Зато

$$\sigma_i \sigma_j G(X)^2 Q_i(X) Q_j(X) P_i(X)^2 P_j(X)^2 = L_{ij}(X)^2$$

повлачи $Q_i(X) = Q_j(X) = Q(X)$ и $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ за $1 \leq i, j \leq m$, те је

$$\varepsilon_i L_{ij}(X) = \varepsilon_j L_{ji}(X) = \sigma_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j G(X) Q(X) P_i(X) P_j(X),$$

где је $\sigma_{ij} \in \{-1, 1\}$. Са друге стране, на основу (8.57) важи $L_{ij} = 0$ кадгод је $m < i \leq n$ или $m < j \leq n$, што можемо третирати као $P_i(X) = 0$ за $m < i \leq n$ и продужити индексе на $m = n$. Како су сви елементи матрице дељиви са $G(X)Q(X)$ то мора бити $Q(X) = 1$.

Друга подматрица реда два даје

$$L_{1i}(X) L_{ij}(X) = L_{1j}(X) L_{ii}(X),$$

одакле следи $\sigma_{1i} \sigma_{ij} = \sigma_{1j} \sigma_{ii}$, али како је $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sigma$, то имамо $\sigma_{ij} = \sigma \sigma_{1i} \sigma_{1j}$, одакле добијамо $\varepsilon_j L_{ij}(X) = \sigma G(X) \sigma_{1i} P_i(X) \sigma_{1j} P_j(X)$. Како су полиноми $P_i(X)$ јединствени до на знак, можемо искористити $\sigma_{1i} P_i(X)$ уместо $P_i(X)$ да бисмо добили

$$\varepsilon_j L_{ij}(X) = \sigma G(X) P_i(X) P_j(X)$$

за све $1 \leq i, j \leq n$. Претходна једнакост повлачи

$$\begin{aligned} L(X) \left(\sum_{i=1}^n P_i(X) E_i \right) &= \sum_{i=1}^n P_i(X) L(X) E_i = \sum_{i=1}^n P_i(X) \sum_{j=1}^n L_{ji}(X) E_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P_j(X) (\sigma \varepsilon_j G(X) P_i(X) P_j(X)) E_i \\ &= \sigma G(X) \sum_{j=1}^n \varepsilon_j P_j(X)^2 \left(\sum_{i=1}^n P_i(X) E_i \right). \end{aligned}$$

Тако је $\sum_{i=1}^n P_i(X) E_i$ сопствени вектор од $L(X)$ који одговара простој сопственој вредности

$$\sigma G(X) \sum_{j=1}^n \varepsilon_j P_j(X)^2 = \sum_{j=1}^n L_{jj}(X) = \text{Tr } L(X).$$

Штавише, $\sum_{i=1}^n P_i(X) E_i$ је сопствени вектор од $\tilde{\mathcal{J}}'_X$ за $\varepsilon_X(\lambda_1 - \lambda_k)$ и такође сопствени вектор од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ који одговара сопственој вредности $\varepsilon_X \lambda_1$. Међутим,

$$\sigma G(X) \sum_{i=1}^n \varepsilon_i P_i(X)^2 = \text{Tr } L(X) = (\varepsilon_X)^{\mu_2 + \dots + \mu_k} (\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k},$$

што даје $G(X) = (\varepsilon_X)^s = (\varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2)^s$ за неки цео број $s \geq 0$, те је зато

$$\sigma \sum_{i=1}^n \varepsilon_i P_i(X)^2 = (\varepsilon_X)^d (\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k}, \quad (8.58)$$

где је $d = \mu_2 + \dots + \mu_k - s$.

Иако смо оригинално посматрали само дефинитне X , P_i су хомогени полиноми степена $d \leq \mu_2 + \dots + \mu_k$, те $P_i(X)$ постоји за свако $X \in \mathcal{V}$. То нам омогућава да конструисемо пресликавање $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ са

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{|(\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k}|}} \sum_{i=1}^n P_i(X) E_i.$$

Уколико је X дефинитно, $P(X)$ је дефинитно и ортогонално на X , при чему важи

$$\mathcal{J}_X P(X) = \varepsilon_X \lambda_1 P(X), \quad (8.59)$$

док једнакост (8.58) доноси

$$\varepsilon_{P(X)} = \delta(\varepsilon_X)^d, \quad (8.60)$$

где је $\delta = \sigma \operatorname{sgn}((\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k})$ фиксиран знак.

Нека је R Жордан-Осерманов. Онда је R Јакоби-дуалан (видети коментар после Теореме 8.33), те једнакост (8.59) даје $\mathcal{J}_{P(X)} X = \varepsilon_{P(X)} \lambda_1 X$, а последично по Леми 8.29 за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta P(X)} (\varepsilon_{P(X)} \beta X - \varepsilon_X \alpha P(X)) = \varepsilon_{\alpha X + \beta P(X)} \lambda_1 (\varepsilon_{P(X)} \beta X - \varepsilon_X \alpha P(X)).$$

Одавде, за дефинитно $\alpha X + \beta P(X)$ добијамо $P(\alpha X + \beta P(X)) \propto \varepsilon_{P(X)} \beta X - \varepsilon_X \alpha P(X)$, што значи да постоји коефицијент пропорционалности $0 \neq K_X(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$P(\alpha X + \beta P(X)) = K_X(\alpha, \beta) (\alpha P(X) - \beta (\varepsilon_{P(X)} / \varepsilon_X) X).$$

За фиксирано $X = \sum_i x_i E_i$ имамо фиксирано $P(X) = \sum_i p_i E_i$, те за свако $1 \leq i \leq n$ важи

$$\frac{P_i(\dots, \alpha x_j + \beta p_j, \dots)}{\sqrt{|(\lambda_1 - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{\mu_k}|}} = K_X(\alpha, \beta) (\alpha p_i - \beta \delta(\varepsilon_X)^{d-1} x_i),$$

одакле се види да је $K_X(\alpha, \beta)$ непрекидно, као рационална функција по α и β , где је $\alpha^2 + \beta^2 \delta(\varepsilon_X)^{d-1} \neq 0$, што је еквивалентно са тим да је $\alpha X + \beta P(X)$ дефинитно, односно да је $\alpha P(X) - \beta \delta(\varepsilon_X)^{d-1} X$ дефинитно.

Како је $P_i(-X) = (-1)^d P_i(X)$ за свако $1 \leq i \leq n$, то имамо $P(-X) = (-1)^d P(X)$. Због тога, поред очигледног $K_X(1, 0) = 1$ имамо и $K_X(-1, 0) = (-1)^{d-1}$. Из (8.60) добијамо

$$(K_X(\alpha, \beta))^2 = \frac{\varepsilon_{P(\alpha X + \beta P(X))}}{\varepsilon_{\alpha P(X) - \beta (\varepsilon_{P(X)} / \varepsilon_X) X}} = \frac{\delta(\alpha^2 \varepsilon_X + \beta^2 \varepsilon_{P(X)})^d}{\varepsilon_{P(X)} (\alpha^2 + \beta^2 \varepsilon_{P(X)} / \varepsilon_X)} = \left(\frac{\alpha^2 \varepsilon_X + \beta^2 \varepsilon_{P(X)}}{\varepsilon_X} \right)^{d-1},$$

одакле се види да за парно d увек важи $\alpha^2 + \beta^2 \delta(\varepsilon_X)^{d-1} > 0$, те је домен од K_X повезан скуп $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ чија слика није повезан скуп због $K_X(1, 0) > 0$, $K_X(-1, 0) < 0$ и $K_X(\alpha, \beta) \neq 0$. Због тога је d непарно и важи $P(-X) = -P(X)$.

Додатно имамо $K_X(\alpha, \beta) = S_X(\alpha, \beta) (\alpha^2 + \beta^2 \delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}}$, где је $S_X(\alpha, \beta) \in \{-1, 1\}$. Зато је $S_X(\alpha, \beta) (\alpha^2 + \beta^2 \delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}} (\alpha p_i - \beta \delta(\varepsilon_X)^{d-1} x_i)$ хомоген полином по α и β степена d , а његов коефицијент уз α^d је фиксиран и износи $S_X(\alpha, \beta) p_i$, те избором i за које је $p_i \neq 0$ добијамо да је S_X константно. Зато је $S_X(\alpha, \beta) = S_X(1, 0) = 1$, што нас доводи до формуле

$$P(\alpha X + \beta P(X)) = (\alpha^2 + \beta^2 \delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}} (\alpha P(X) - \beta \delta(\varepsilon_X)^{d-1} X). \quad (8.61)$$

Напоменимо да формула (8.61) такође важи и кад је $\alpha X + \beta P(X)$ изотропно (тада мора бити $\delta = -1$), јер из непрекидности полиномијалног пресликавања имамо $P(\alpha X + \beta P(X)) = 0$. Посебно, формула (8.61) за $\alpha = 0, \beta = 1$ повлачи

$$P(P(X)) = (\delta(\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}} (-\delta(\varepsilon_X)^{d-1} X) = -\delta^{\frac{d+1}{2}} (\varepsilon_X)^{\frac{d-1}{2}} X. \quad (8.62)$$

Лема 8.47. Нека је R k -корена Жордан-Осерманов алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ чији редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има једноставну вредност $\varepsilon_X \lambda_1$, док су μ_i за $2 \leq i \leq k$ вишеструкост нула минималног полинома. Тада постоји хомогено полиномијално пресликавање $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ нејарног степена $d \leq \mu_2 + \cdots + \mu_k$ такво да за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ важи (8.59), (8.60) и (8.61).

Најчешћи случај Леме 8.47 разматра Јакоби-дијагонализабилан R где имамо $\mu_i = 1$ за $1 \leq i \leq k$, док је најважнији случај Римановог R где додатно важи $\varepsilon_j = 1$ за $1 \leq j \leq n$, одакле (8.60) даје $\delta = 1$. Као последицу, добијамо наредну лему сличну оној коју је поставио Николајевски 2003. године [92, Лема 2.1].

Лема 8.48. *Нека је R Риманов k -корена Осерманов алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ чији редуковани Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има једну сопствену вредност $\varepsilon_X \lambda_1$. Тада постоји хомоморфизам полиномијално пресликавање $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ нејарног степена $d \leq k - 1$ такво да за свако ненула $X \in \mathcal{V}$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_X P(X) &= \varepsilon_X \lambda_1 P(X), \quad \varepsilon_{P(X)} = (\varepsilon_X)^d, \\ P(\alpha X + \beta P(X)) &= (\alpha^2 + \beta^2 (\varepsilon_X)^{d-1})^{\frac{d-1}{2}} (\alpha P(X) - \beta (\varepsilon_X)^{d-1} X).\end{aligned}$$

8.10 Риманови Осерманови тензори

Нека је R алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност редукованог Јакобијевог оператора $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за свако $X \in \mathbf{S}^{n-1} = \{X \in \mathcal{V} : \varepsilon_X = 1\} \subset \mathcal{V}$, која има константну вишеструкост r , тада је

$$\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1}_{X^\perp}$$

хомоморфизам тангентног раслојења над $\mathbf{S}^{n-1}$ са идентификацијом $T_X \mathbf{S}^{n-1} \cong X^\perp$. Како он има константан ранг $n - r$, по Теорему 3.3, $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1}_{X^\perp})$ је подраслојење од $T\mathbf{S}^{n-1}$. То нас доводи до наредне корисне леме.

Лема 8.49. *Нека је R Риманов алгебарски тензор кривине димензије n . Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопствена вредност вишеструкости r од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ на $\mathbf{S}^{n-1}$, онда је $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1}_{X^\perp})$ r -димензиона дистрибуција на $\mathbf{S}^{n-1}$.*

На основу Теореме 3.5, $\mathbf{S}^{n-1}$ за $\rho(n) \leq k \leq n - 1 - \rho(n)$ не допушта k -димензиону дистрибуцију, где је ρ Хурвиц–Радон функција дата једначином (3.3). Зато Лема 8.49 редукује могућности за вишеструкост сопствених вредности од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ на $\mathbf{S}^{n-1}$.

Теорема 8.50. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине нејарне димензије има константну секциону кривину.*

Доказ. Осерманов услов повлачи да свака сопствена вредност λ редукованог Јакобијевог оператора $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за $X \in \mathbf{S}^{n-1}$ има константну вишеструкост r , што омогућава да применимо Лему 8.49. Чињеница да $\rho(n) = 1$ важи за непарно n искључује вишеструкости r за које је $1 \leq r \leq n - 2$, што нас оставља са $r = n - 1$, те је $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1}_{X^\perp}) = T\mathbf{S}^{n-1}$. Зато $\tilde{\mathcal{J}}_X = \lambda \mathbb{1}$ важи за свако $X \in \mathbf{S}^{n-1}$, те R има константну секциону кривину λ . $\square$

Посматрајмо наредни једноставан случај, кад је димензија облика $n = 4m + 2$. Лема 8.49 и чињеница $\rho(4m + 2) = 2$ оставља нас са $r \in \{1, n - 2, n - 1\}$. Не постоје две сопствене вредности λ и μ чија је вишеструкост 1, јер тада $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1}) \oplus \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \mu \mathbb{1})$ дефинише дводимензиону дистрибуцију што није могуће. Зато, или имамо константну секциону кривину као раније, или имамо две различите сопствене вредности чије су вишеструкости 1 и $n - 2$.

Теорема 8.51. *Риманов Осерманов алгебарски тензор кривине двоструко нејарне димензије има константну секциону кривину или је Клиффордов ранга 1.*

Доказ. Нека $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две сопствене вредности, просту сопствену вредност $\varepsilon_X \lambda$ и $\varepsilon_X \mu$ чија је вишеструкост $n - 2$. Применом Леме 8.48 конструишемо хомогено полиномијално пресликавање $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ степена $d = 1$ (што значи да је P линеарно) такво да $\tilde{\mathcal{J}}_X P(X) = \varepsilon_X \lambda P(X)$ важи са $\varepsilon_{P(X)} = \varepsilon_X$. Штавише, P је комплексна структура на $\mathcal{V}$ јер из једнакости (8.62) имамо $P^2 = -\mathbb{1}$. Додатно, ако поставимо $Y = \alpha X + \beta P(X) + Z$ за $Z \in \text{Span}\{X, P(X)\}^\perp = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})$, онда је $X \in \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_Z - \varepsilon_Z \mu \mathbb{1}) = \text{Span}\{Z, P(Z)\}^\perp$, што повлачи $X \perp P(Z)$. Одавде је $g(P(X), Y) = \beta \varepsilon_{P(X)} = \beta \varepsilon_X = -g(X, P(\beta P(X))) = -g(X, P(Y))$, те је P косоадјунговано. Како наш ортогонални косоадјунговани ендоморфизам P на $\mathcal{V}$ једнозначно одређује Јакобијеве операторе, он једнозначно одређује и тензор кривине. Зато је једино решење Клифордов $R = \mu R^1 + (\mu - \lambda)/3R^P$. $\square$

Већ смо видели да захваљујући Леми 8.48 лако доказујемо претходну теорему. Међутим, овај случај може се решити и директним рачунима као што је то Чи оригинално урадио 1988. године [37, Секција 2]. Такође је занимљиво решење које су дали Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Лорензо [65, Лема 2.1.4]. У наредном примеру покажемо неке рачуне базиране на њиховим идејама.

Пример 8.3. Нека $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две сопствене вредности, просту сопствену вредност $\varepsilon_X \lambda$ и вредност $\varepsilon_X \mu$ чија је вишеструкост $n - 2$. Глатка једнодимензиона дистрибуција $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \lambda \mathbb{1})$ даје векторско поље $J: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow T\mathbf{S}^{n-1}$ такво да је $X \mapsto JX \in X^\perp$. Нека је $\mathcal{U}_X = \text{Span}\{X\} \oplus \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda \mathbb{1}) = \text{Span}\{X, JX\}$ и $\mathcal{U}_X^\perp = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu \mathbb{1})$. По Теорему 8.17 имамо $Y \in \mathcal{U}_X^\perp$ ако и само ако $X \in \mathcal{U}_Y^\perp$, док Лема 8.29 додатно даје $Y \in \mathcal{U}_X$ ако и само ако $X \in \mathcal{U}_Y$. Зато је $J(X \cos \theta + JX \sin \theta) = \pm(JX \cos \theta - X \sin \theta)$ где је знак одређен из непрекидности и вредности у $\theta = 0$,

$$J(X \cos \theta + JX \sin \theta) = JX \cos \theta - X \sin \theta,$$

те последично добијамо $J(-X) = -JX$ и $J^2 = -\mathbb{1}$.

Користимо скраћенице $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ да израчунамо $J(X \cos \theta + Y \sin \theta)$, где је $Y \in \mathcal{U}_X^\perp$. Из $Y \in \mathcal{U}_X^\perp = \mathcal{U}_{JX}^\perp$ имамо $X, JX \in \mathcal{U}_Y^\perp$, те је $JY \perp \{X, JX, Y\}$. За $Z \in \text{Span}\{X, JX, Y, JY\}^\perp$ имамо $Z \in \mathcal{U}_X^\perp \cap \mathcal{U}_{JX}^\perp$, одакле је $X, Y \in \mathcal{U}_Z^\perp$, те $cX + sY \in \mathcal{U}_Z^\perp$ и зато $Z \in \mathcal{U}_{cX+sY}^\perp = \mathcal{U}_{J(cX+sY)}^\perp$. За свако $Z \in \text{Span}\{X, JX, Y, JY\}^\perp$ имамо $Z \perp J(cX + sY)$, те $J(cX + sY) \in \text{Span}\{X, JX, Y, JY\}$. Са друге стране имамо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{cX+sY}(sX - cY) &= \mathcal{R}(sX - cY, cX + sY)(cX + sY) = \mathcal{R}(X, Y)(cX + sY) \\ &= s\mathcal{J}_Y X - c\mathcal{J}_X Y = \mu(sX - cY), \end{aligned}$$

што додатно даје $J(cX + sY) \perp \text{Span}\{X, Y\}$ и доноси $J(cX + sY) \in \text{Span}\{JX, JY\}$.

Поставимо $J(cX + sY) = \alpha JX + \beta JY$, где је $\alpha = \alpha(\theta)$ и $\beta = \beta(\theta)$ са $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. За $\alpha JX + \beta JY \in \mathcal{U}_{cX+sY}$ имамо $cX + sY \in \mathcal{U}_{\alpha JX + \beta JY}$, што даје $\mathcal{J}_{\alpha JX + \beta JY}(cX + sY) = \lambda(cX + sY)$. Зато је

$$\begin{aligned} \alpha^2 \mathcal{J}_{JX}(cX + sY) + \beta^2 \mathcal{J}_{JY}(cX + sY) + 2\alpha\beta \mathcal{J}(JX, JY)(cX + sY) &= \lambda(cX + sY), \\ \alpha^2(c\lambda X + s\mu Y) + \beta^2(c\mu X + s\lambda Y) + \alpha\beta(\mathcal{R}(cX + sY, JX)JY + \mathcal{R}(cX + sY, JY)JX) &= \lambda(cX + sY), \\ (\mu - \lambda)(\beta^2 cX + \alpha^2 sY) + \alpha\beta(c\mathcal{R}(X, JX)JY + s\mathcal{R}(Y, JX)JY + c\mathcal{R}(X, JY)JX + s\mathcal{R}(Y, JY)JX) &= 0. \end{aligned}$$

Како $X, JX, cX + sY \in \mathcal{U}_{JY}^\perp$ повлачи $JY \in \mathcal{U}_X^\perp \cap \mathcal{U}_{JX}^\perp \cap \mathcal{U}_{cX+sY}^\perp$ имамо $\mathcal{J}(X, JX)JY = 0$, што даје $\mathcal{R}(JY, X)JX + \mathcal{R}(JY, JX)X = 0$. Ако укључимо први Бјанкијев идентитет добијамо једнакост $\mathcal{R}(X, JX)JY = 2\mathcal{R}(X, JY)JX$, те слично и $\mathcal{R}(Y, JY)JX = 2\mathcal{R}(Y, JX)JY$. Одавде извире,

$$(\mu - \lambda)(\beta^2 cX + \alpha^2 sY) + 3\alpha\beta(c\mathcal{R}(X, JY)JX + s\mathcal{R}(Y, JX)JY) = 0.$$

Како је $R(X, JY, JX, X) = 0 = R(Y, JX, JY, Y)$, узимајући скаларни производ са X и Y добијамо

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)\beta^2 c + 3\alpha\beta s R(Y, JX, JY, X) &= 0 \\(\mu - \lambda)\alpha^2 s + 3\alpha\beta c R(X, JY, JX, Y) &= 0\end{aligned}$$

те је зато

$$(\mu - \lambda)\beta^2 c^2 = -3\alpha\beta s c R(X, JY, JX, Y) = (\mu - \lambda)\alpha^2 s^2.$$

Одавде важи $\alpha^2 s^2 = \beta^2 c^2$, што даје $\alpha^2 = \cos^2 \theta$ и $\beta^2 = \sin^2 \theta$. Поново, на основу непрекидности добијамо

$$J(X \cos \theta + Y \sin \theta) = JX \cos \theta + JY \sin \theta,$$

што доказује да је J линеарно. Продужење $J(tX) = tJ(X)$ за $t \in \mathbb{R}$ дефинише ендоморфизам J на $\mathcal{V}$, и тако даље... $\triangle$

8.11 Принцип пропорционалности

Нека је R k -корена Јакоби-дијагонализабилан алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ тако да

$$\tilde{\omega}_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \tilde{\mathcal{J}}_X) = (\lambda - \varepsilon_X \lambda_1(X))^{v_1} \dots (\lambda - \varepsilon_X \lambda_k(X))^{v_k}$$

важи за све дефинитне $X \in \mathcal{V}$ и неке скаларе $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1(X), \dots, \lambda_k(X) \in \mathbb{R}$, који су уређени са $\lambda_1(X) < \dots < \lambda_k(X)$. Другим речима, $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има сопствене вредности $\varepsilon_X \lambda_1(X), \dots, \varepsilon_X \lambda_k(X)$ са вишеструкостима $v_1, \dots, v_k$, тим редом. Дефинишимо v_i -димензионе (уопштене) сопствене просторе

$$\mathcal{V}_i(X) = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \lambda_i(X) \mathbb{1})$$

од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ и $1 \leq i \leq k$. На овај начин, за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ имамо директну ортогоналну декомпозицију

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{V}_i(X), \quad (8.63)$$

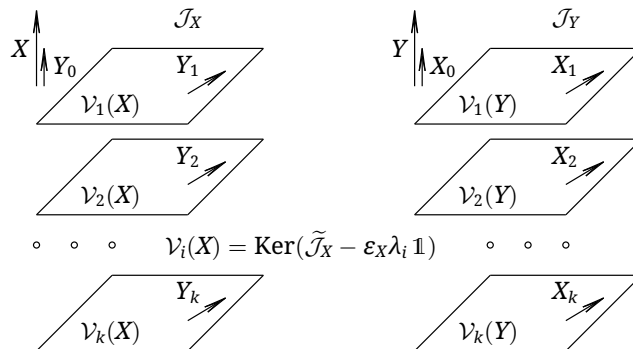
где је $\mathcal{V}_0(X) = \text{Span}\{X\}$.

Кажемо да је k -корена Јакоби-дијагонализабилно R **Јакоби-пропорционално** ако за сваки пар дефинитних вектора $X, Y \in \mathcal{V}$ имамо пропорционалност

$$\varepsilon_X(\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \dots, \varepsilon_{Y_k}) = \varepsilon_Y(\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \dots, \varepsilon_{X_k}),$$

где су $X = \sum_{i=0}^k X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^k Y_j$ растављања таква да $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$.

У Римановом окружењу, важан специјални случај, где $Y \in \mathcal{V}_i(X)$ за неко $1 \leq i \leq k$ повлачи $X \in \mathcal{V}_i(Y)$, повезан је са Јакоби-дуалном импликацијом (8.29). Јасно је да је Риманов Јакоби-пропорционалан R слабо Јакоби-дуалан, по Теореме 8.15 он је Јакоби-дуалан, те је на основу Теореме 8.33 Осерманов, са $\lambda_i(X) = \lambda_i$ за $1 \leq i \leq k$.



Јакоби-пропорционалност за Риманове Осерманове тензоре открио је Андрејић 2022. године [11], док је уопштење на псеудо-Риманов случај изложено у [14]. Основна идеја је била посматрати Јакоби-пропорционалан Осерманов алгебарски тензор R , и искористити $\mathcal{J}_X V = \varepsilon_X \lambda_i V$ да дефинишемо $\mathcal{K}_X V = \varepsilon_X \mu_i V$ за произвољне $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Наравно, неопходно је додати $\mathcal{K}_X X = 0$, што значи $\mu_0 = 0$. На овај начин, добили смо ендоморфизме $\mathcal{K}_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$ задржавајући постојеће сопствене просторе и мењајући им сопствене вредности.

Како (8.63) раставља $Y = \sum_{i=0}^k Y_i$ и $Z = \sum_{i=0}^k Z_i$ са $Y_i, Z_i \in \mathcal{V}_i(X)$ за $0 \leq i \leq k$, имамо

$$g(\mathcal{K}_X Y, Z) = g\left(\sum_{i=0}^k \mathcal{K}_X Y_i, \sum_{j=0}^k Z_j\right) = \varepsilon_X \sum_{i,j=0}^k \mu_i g(Y_i, Z_j) = \varepsilon_X \sum_{j=0}^k \mu_j g(Y, Z_j) = g(Y, \mathcal{K}_X Z),$$

што значи да је свако $\mathcal{K}_X$ самоадјунговано.

Како је R Јакоби-пропорционалан, ако раставимо дефинитне векторе $X, Y \in \mathcal{V}$ са $X = \sum_{i=0}^k X_i$ и $Y = \sum_{j=0}^k Y_j$ тако да важи $X_i \in \mathcal{V}_i(Y)$ и $Y_j \in \mathcal{V}_j(X)$, онда је $\varepsilon_X \varepsilon_{Y_i} = \varepsilon_{Y_j} \varepsilon_{X_i}$ за све $0 \leq i \leq k$. Добијамо

$$\begin{aligned} g(\mathcal{K}_X Y, Y) &= g\left(\sum_{i=0}^k \varepsilon_X \mu_i Y_i, Y\right) = \varepsilon_X \sum_{i=0}^k \mu_i g(Y_i, Y) = \varepsilon_X \sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_{Y_i}, \\ g(\mathcal{K}_Y X, X) &= g\left(\sum_{i=0}^k \varepsilon_Y \mu_i X_i, X\right) = \varepsilon_Y \sum_{i=0}^k \mu_i g(X_i, X) = \varepsilon_Y \sum_{i=0}^k \mu_i \varepsilon_{X_i}, \end{aligned}$$

те компатибилност $g(\mathcal{K}_Y X, X) = g(\mathcal{K}_X Y, Y)$ важи за дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$. Тако смо испунили услове Теореме 6.7, што даје наредну теорему (видети [14, Теорема 2] и [11, Теорема 2]).

Теорема 8.52. *Ако постоји Јакоби-пропорционалан Јакоби-дијајонализуабилан k -корена алгебарски тензор кривине такав да је $\det(\lambda \mathbb{1} - \tilde{\mathcal{J}}_X) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \lambda_i)^{v_i}$, тада за све $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ постоји нови Осерманов алгебарски тензор кривине такав да је $\det(\lambda \mathbb{1} - \tilde{\mathcal{J}}_X) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \mu_i)^{v_i}$.*

Сваки Риманов Јакоби-пропорционалан R је Осерманов, а испоставља се да су сви познати примери Римановог Осермановог R Јакоби-пропорционални. Како $\varepsilon_Y X_0 = g(X, Y)Y$ и $\varepsilon_X Y_0 = g(Y, X)X$ увек важи, добијамо

$$\varepsilon_Y \varepsilon_{X_0} = (g(X, Y))^2 = \varepsilon_X \varepsilon_{Y_0}. \quad (8.64)$$

Свака две-тачке хомогена многострукост неконстантне секционе кривине је два-корена. У том случају $k = 2$, због $\varepsilon_X = \varepsilon_{X_0} + \varepsilon_{X_1} + \varepsilon_{X_2}$ и $\varepsilon_Y = \varepsilon_{Y_0} + \varepsilon_{Y_1} + \varepsilon_{Y_2}$, једнакост (8.64) доноси

$$\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1} = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2}.$$

Са друге стране, $g(\mathcal{J}_X Y, Y) = g(\mathcal{J}_Y X, X)$ даје $\varepsilon_X (\lambda_1 \varepsilon_{Y_1} + \lambda_2 \varepsilon_{Y_2}) = \varepsilon_Y (\lambda_1 \varepsilon_{X_1} + \lambda_2 \varepsilon_{X_2})$, те је зато

$$\lambda_1 (\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1}) = \lambda_2 (\varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2}).$$

Међутим, како је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из претходних једнакости добијамо

$$\varepsilon_X \varepsilon_{Y_1} - \varepsilon_Y \varepsilon_{X_1} = 0 = \varepsilon_Y \varepsilon_{X_2} - \varepsilon_X \varepsilon_{Y_2},$$

што повлачи $\varepsilon_Y (\varepsilon_{X_0}, \varepsilon_{X_1}, \varepsilon_{X_2}) = \varepsilon_X (\varepsilon_{Y_0}, \varepsilon_{Y_1}, \varepsilon_{Y_2})$ и даје следећу теорему.

Теорема 8.53. *Сваки два-корена Јакоби-дијајонализуабилан Осерманов алгебарски тензор кривине је Јакоби-пропорционалан.*

Претходну теорему је дао Андрејић 2022. године [11, Теорема 3], али је суштински у питању лема о слабој дуалности коју је објавио исти аутор 2010. године [6, Лема 5.6] (видети такође [8, Лема 9]), што се може сматрати за претечу принципа пропорционалности за Осерманове многострукости.

Међутим, иако је свака позната Риманова Осерманова многострукост или један-корен или два-корена, то није случај са Римановим Осермановим алгебарским тензорима кривине. Срећом, сваки познати пример Римановог k -корена Осермановог алгебарског тензора кривине за $k > 2$ је Клифордов.

Нека је R полу-Клифордов, те самим тим и Јакоби-дијагонализабилан Осерманов. Ако раставимо $Y = \alpha_0 X + \sum_{i=1}^m \alpha_i J_i X + P$ и $X = \beta_0 Y + \sum_{i=1}^m \beta_i J_i Y + Q$, где је $P \in \text{Span}\{X, J_1 X, \dots, J_m X\}^\perp$ и $Q \in \text{Span}\{Y, J_1 Y, \dots, J_m Y\}^\perp$, онда добијамо

$$-c_i \varepsilon_X \alpha_t = \varepsilon_{J_t X} \alpha_t = g(Y, J_t X) = -g(X, J_t Y) = -\varepsilon_{J_t Y} \beta_t = c_i \varepsilon_Y \beta_t$$

за $1 \leq t \leq m$, што даје $\varepsilon_X^2 \alpha_t^2 = \varepsilon_Y^2 \beta_t^2$, одакле је $\varepsilon_Y \varepsilon_{\beta_{J_t Y}} = -c_i \varepsilon_Y^2 \beta_t^2 = -c_i \varepsilon_X^2 \alpha_t^2 = \varepsilon_X \varepsilon_{\alpha_{J_t X}}$. Већ имамо $\varepsilon_Y^2 \beta_0^2 = \varepsilon_X^2 \alpha_0^2$ из (8.64), те преостaje

$$\varepsilon_Y \varepsilon_Q = \varepsilon_Y \varepsilon_X - \varepsilon_Y^2 \beta_0^2 + \varepsilon_Y^2 \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^2 = \varepsilon_X \varepsilon_Y - \varepsilon_X^2 \alpha_0^2 + \varepsilon_X^2 \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i^2 = \varepsilon_X \varepsilon_P,$$

што је довољно да закључимо да је R Јакоби-пропорционалан (видети [11, Теорема 4]).

Теорема 8.54. *Сваки полу-Клифордов алгебарски тензор кривине је Јакоби-пропорционалан.*

Нека је R Риманов k -корена Осерманов алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n , тако да је $\tilde{\omega}_X(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \lambda_i)^{v_i}$. По Николајевском [92, 93, 94, 95], сваки такав R је Клифордов, осим за $n = 16$, са $v_i = 7$ или $v_i = 8$ за неко $1 \leq i \leq k$.

Нека је R Риманов Јакоби-пропорционалан k -корена за $k \geq 3$ који није Клифордов, што повлачи $n = 16$. Можемо уредити вишеструкости са $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$, те закључити да је $v_1 = 8$ или $v_1 = 7$. На основу Теореме 8.52, постоји нови Осерманов алгебарски тензор кривине такав да је $\tilde{\omega}_X(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \varepsilon_X \mu_i)^{v_i}$ за произвољне скаларе $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$. Искористимо $\mu_2 = \lambda_1$ са $\mu_i = \lambda_i$ за $i \neq 2$ да бисмо направили R_1 , те $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ са $\mu_i = 0$ за $i \neq 2$ да бисмо направили R_2 . Лако је закључити да важи $R = R_1 + R_2$. Међутим, R_1 је $(k-1)$ -корена Осерманов са $v_{\max} = v_1 + v_2$, те је зато Клифордов, осим у случају

$$v_1 = 7, v_2 = \dots = v_9 = 1, \quad (8.65)$$

док је R_2 2-корена Осерманов са $v_{\max} = n - 1 - v_2$, те Клифордов, осим у случају

$$v_1 = v_2 = 7, v_3 = 1. \quad (8.66)$$

Због тога, ако искључимо случајеве (8.65) и (8.66), $R = R_1 + R_2$ је сума два Клифордова тензора. Међутим, R_1 и R_2 имају компатибилне Јакобијеве операторе, те ако је J_1 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга $v_3 + \dots + v_k$ из R_1 , а J_2 комплексна структура из Клифордове фамилије ранга v_2 из R_2 , тада $J_1 X \perp J_2 X$ важи за свако $X \in \mathcal{V}$. Зато добијамо $g(J_1 J_2 X, X) = 0$, што након поларизације даје $g(J_1 J_2 X, Y) + g(J_1 J_2 Y, X) = 0$ за све $X, Y \in \mathcal{V}$. Одавде имамо $g((J_1 J_2 + J_2 J_1)X, Y) = 0$, те последично $J_1 J_2 + J_2 J_1 = 0$, што значи да је унија наших Клифордових фамилија такође Клифордова фамилија, те је R Клифордов.

Штавише, случај (8.65) је такође Клифордов, јер се на сличан начин као раније може раставити на два Клифордова тензора, R_1 који дефинише $\mu_2 = \mu_3 = \lambda_1$ са $\mu_i = \lambda_i$ за $i \neq 2, 3$ и R_2 који дефинише $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1$ са $\mu_i = 0$ за $i \neq 2, 3$. Тада је R_1 7-корена Осерманов са $v_{\max} = 9$, док је R_2 3-корена Осерманов са $v_{\max} = 13$, те су зато оба Клифордова.

Са друге стране, преостали случај $v_1 = 8, v_2 = 7$ је напоменуо Николајевски [95, Теорема 1.2], који је објавио тврђење да је таква Осерманова многострукост локално изометрична са $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{O}\mathbb{H}^2$ (али треба бити пажљив јер доказ није дат). Напоменимо да су у питању једине познате Осерманове многострукости које нису Клифордове. Остале потенцијалне контрапримере који су Јакоби-пропорционални треба тражити у случају (8.66).

Теорема 8.55. *Ако је R Риманов Јакоби-пропорционалан алгебарски тензор кривине који није Клифордов, онда је R 2-корена са вишеструкостима 8 и 7, или је 3-корена са вишеструкостима 7, 7 и 1.*

Претходну теорему је дао Андрејић 2022. године [11, Теорема 5], а она може бити корисна у решавању Осерманове хипотезе. Тако је кључно питање да ли можемо показати да су Осерманови алгебарски тензори кривине Јакоби-пропорционални.

ОСЕРМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

9.1 Примери Осерманових многострукости

Нека је (M, g) псеудо-Риманова многострукост, а $p \in M$ произвољна тачка. Скуп свих јединичних вектора из $T_p M$,

$$S_p M = \{X \in T_p M : |g_p(X, X)| = 1\},$$

у Римановом окружењу одговара тангентној сфери $S_1(0_p)$. Међутим, уколико је g не-дефинитно, $S_p M$ није ни компактно (хипербола у димензији 2, хиперболоид у димензији 3), те је захвално посматрати просторне и временске векторе засебно (геометријска разлика између једноделног и дводелног хиперболоида). Због тога уводимо псеудо-сфере

$$S_p^- M = \{X \in T_p M : g_p(X, X) = -1\},$$

$$S_p^+ M = \{X \in T_p M : g_p(X, X) = 1\},$$

при чему је $S_p M = S_p^- M \cup S_p^+ M$. Штавише, често на многострукости посматрамо псеудо-сферна раслојења $\{X \in TM : g_{\pi X}(X, X) = \text{Const}\}$, што су хиперповрши тангентног раслојења TM . Тако уводимо **временско јединично танјенјно раслојење** $S^- M = \bigsqcup_{p \in M} S_p^- M$ и **ипросјорно јединично танјенјно раслојење** $S^+ M = \bigsqcup_{p \in M} S_p^+ M$, као и њихову унију $SM = S^- M \cup S^+ M$.

По Теорему 7.12, класификација две-тачке хомогених повезаних Риманових многострукости укључује: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$, $\mathbb{OP}^2$, $\mathbb{RH}^n$, $\mathbb{CH}^n$, $\mathbb{HH}^n$ и $\mathbb{OH}^2$. Локалне изометрије локалних две-тачке хомогених простора M дејствују транзитивно на сферном раслојењу SM , те зато тамо фиксирају карактеристични полином Јакобијевог оператора. Тако добијамо уопштење локалних две-тачке хомогених Риманових многострукости које зовемо **Риманове Осерманове мнојосјрукосји**, у којима карактеристични полином (или еквивалентно, сопствене вредности и њихове вишеструкости) Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од X из јединичног тангентног раслојења.

Недостатак других примера усмерило је Осермана [101] да размишља о обратном тврђењу. Питање да ли обрат важи (свака Осерманова Риманова многострукост је локално две-тачке хомогена) познато је под именом **Осерманова хийојеза**. Прве резултате о Осермановој хипотези изложио је Чи¹ [37], који је установио позитиван одговор за многострукости димензије која није дељива са четири. Највећи прогрес у решавању хипотезе начинио је Николајевски² [92, 93, 94, 95], који је доказао хипотезу у свим случајевима, изузев многострукости димензије 16 чији редукован Јакобијев оператор има сопствену вредност вишеструкости 7 или 8.

¹Quo-Shin Chi (1955), тајванско-амерички математичар

²Yuri Nikolayevsky, аустралијски математичар

Овај концепт се може проширити на псеудо-Риманове многострукости. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) **Осерманова** или **глобално Осерманова**, уколико карактеристични полином $\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X)$ Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ не зависи од избора $X \in TM$, како на S^-M , тако и на S^+M .

Често је погодно изучавати неке геометријске проблеме у чистом алгебарском окружењу. Редуковањем псеудо-Риманове многострукости (M, g) на тачку $p \in M$ допушта нам да радимо са алгебарским тензором кривине R_p на квадратном векторском простору $(T_p M, g_p)$. Алгебарски приступ доноси мање рестриктиван концепт многострукости у којем је карактеристични полином Јакобијевог оператора константан како на $S_p^- M$, тако и на $S_p^+ M$, за свако $p \in M$, али може варирати од тачке до тачке. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост M **тачка по тачка Осерманова** ако је одговарајући алгебарски тензор кривине R_p Осерманов у свакој тачки $p \in M$. Наравно, глобално Осерманова многострукост је свакако тачка по тачка Осерманова, док обрат не важи (видети [25]).

Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост M **тачка по тачка Жордан-Осерманова** ако је њен одговарајући алгебарски тензор кривине R_p Жордан-Осерманов за сваку тачку $p \in M$, док је **глобално Жордан-Осерманова** ако је Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ константна како на S^-M , тако и на S^+M . Кажемо да је M **Јакоби-дијагонализабилна** ако је R_p Јакоби-дијагонализабилно за свако $p \in M$.

Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) **k-корена** ако је њен тензор кривине k -корена у свакој тачки, односно ако редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно k различитих сопствених вредности за сваки дефинитан $X \in TM$.

Пример 9.1. Као што смо раније нагласили, две-тачке хомогене повезане Риманове многострукости $(\mathbb{R}^n, \mathbf{S}^n, \mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{C}\mathbf{P}^n, \mathbb{H}\mathbf{P}^n, \mathbb{O}\mathbf{P}^2, \mathbb{R}\mathbf{H}^n, \mathbb{C}\mathbf{H}^n, \mathbb{H}\mathbf{H}^n, \mathbb{O}\mathbf{H}^2)$ су глобално Осерманове. $\triangle$

Пример 9.2. Простори константне секционе кривине димензије $n \geq 3$ (из Секције 6.4) имају одговарајући алгебарски тензор кривине облика $R = \kappa R^1$ за неку глобалну константу $\kappa \in \mathbb{R}$. Одавде је $\mathcal{R}(X, Y)Z = \kappa(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$, те за дефинитан X и $Y \in X^\perp$ имамо

$$\mathcal{J}_X Y = \mathcal{R}(Y, X)X = \kappa(g(X, X)Y - g(Y, X)X) = \varepsilon_X \kappa Y.$$

Због тога $\tilde{\mathcal{J}}_X = \varepsilon_X \kappa \mathbb{1}_{X^\perp}$ важи за свако дефинитно X , што показује да редуковани Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има само једну сопствену вредност $\varepsilon_X \kappa$ на псеудо-сферама $\varepsilon_X = \text{Const} \neq 0$. Одавде је $\omega_X(\lambda) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X \kappa)^{n-1}$ карактеристични полином од $\mathcal{J}_X$, што је константно на оба јединична тангентна раслојења. Као последица, простори константне секционе кривине су глобално Осерманови. Посебно, поред већ виђених Риманових простора $(\mathbb{R}^n, \mathbf{S}^n, \mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{R}\mathbf{H}^n)$, имамо псеудо-Риманове модел просторе из Секције 4.6 као што су $\mathbb{R}_\nu^n$, $\mathbf{dS}^n$ и $\mathbf{AdS}^n$. $\triangle$

Наредни конкретни примери дозвољавају нам да на леп начин илуструјемо наше дефиниције. Гарсија-Рио, Купели и Васкез-Лорензо [65] су конструисали фамилију псеудо-Риманових многострукости (M, g) , где је $M = \mathbb{R}^4$, а (x_1, x_2, x_3, x_4) уобичајене координате, помоћу наредне Грамове матрице

$$g = \begin{pmatrix} x_3 f_1 & a & 1 & 0 \\ a & x_4 f_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

која је дата у односу на стандардни глобални покретни репер $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ за M , где су $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ глатке реалне функције које зависе само од x_1 и x_2 , док је $a \in \mathbb{R}$. У питању је специјални случај Вокерове метрике из Примера 4.8, те

је зато (M, g) псеудо-Риманова многострукост индекса два, односно Клајнова многострукост димензије 4. Кристофелови симболи су дати формулом

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right), \quad (5.11 \text{ поновљено})$$

где су g_{ij} улази матрице g из (9.1), док су g^{ij} улази њој инверзне матрице,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -x_3 f_1 & -a \\ 0 & 1 & -a & -x_4 f_2 \end{pmatrix}.$$

Конкретан рачун даје све ненула Кристофелове симболе:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2}f_1, & \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_3 f_1^2, \\ \Gamma_{11}^4 &= -\frac{1}{2}x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}af_1, & \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ \Gamma_{12}^4 &= \Gamma_{21}^4 = \frac{1}{2}x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{2}f_2, \\ \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2}af_2, & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2}x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_4 f_2^2, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}f_1, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2}f_2. \end{aligned}$$

Уз помоћ формуле

$$\mathcal{R}_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_m (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l), \quad (6.3 \text{ поновљено})$$

налазимо све ненула компоненте оператора кривине:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_1 - \frac{1}{2} x_3 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + (x_3 f_2 - 2a) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_4 f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - af_1 f_2 \right) \partial_4, \\ \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_2 + \frac{1}{2} x_4 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_4 - \\ &- \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + x_3 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + (x_4 f_1 - 2a) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - af_1 f_2 \right) \partial_3, \\ \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_3, & \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_4, \\ \mathcal{R}(\partial_1, \partial_3)\partial_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_4, & \mathcal{R}(\partial_1, \partial_3)\partial_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial_3, \\ \mathcal{R}(\partial_2, \partial_4)\partial_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_4, & \mathcal{R}(\partial_2, \partial_4)\partial_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial_3. \end{aligned}$$

Претходни рачуни дају матрицу Јакобијевог оператора $\mathcal{J}_X$ за $X = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \partial_i$ као блок матрицу

$$\mathcal{J}_X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A^\top \end{pmatrix},$$

где је

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1a_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & -\frac{1}{2}a_1^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{1}{2}a_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{1}{2}a_1a_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Како је детерминанта блок троугаоне матрице производ детерминанти њених дијагоналних блокова, карактеристични полином од $\mathcal{J}_X$ не зависи од матрице B ,

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) \det(\lambda \mathbb{1} - A^\top) = (\det(\lambda \mathbb{1} - A))^2.$$

Како је

$$\det(\lambda \mathbb{1} - A) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda a_1a_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right),$$

није тешко закључити да је карактеристични полином $\omega_X(\lambda)$ константан на псеудо-сферама само ако

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad (9.2)$$

важи у свакој тачки из M . Ако претпоставимо (9.2), имамо $\omega_X(\lambda) = \lambda^4$, те је (M, g) глобално Осерманова псеудо-Риманова многострукост.

Посматрајмо Жордан-Осерманове услове за ове многострукости. Захваљујући малој димензији од M , Жорданова нормална форма од $\mathcal{J}_X$ може се описати у терминима његовог минималног полинома μ_X . Уколико рестриктивнији услов

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad (9.3)$$

важи у некој тачки из M , тада су формуле оператора кривине много једноставније и компоненте оператора кривине у тој тачки су нонула само за

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1 &= \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 \right) \partial_4, \\ \mathcal{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_2 &= -\frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 \right) \partial_3. \end{aligned}$$

Одавде је

$$\mathcal{J}_X = \frac{1}{4} \left(2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ a_1a_2 & -a_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{J}_X^2 = 0$. У тачкама које задовољавају (9.3), услов

$$2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 = 0$$

даје $\mu_X(\lambda) = \lambda$. У супротном, $\mathcal{J}_X = 0$ важи само за $a_1 = a_2 = 0$, али свако $X = a_3\partial_3 + a_4\partial_4$ је изотропно, одакле $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ важи за свако дефинитно X . Конкретне Осерманове многострукости могу се задати погодним избором за f_1, f_2 и a .

Пример 9.3. За $f_1(x_1, x_2) = 1, f_2(x_1, x_2) = 1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad 2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 = -1 \neq 0.$$

За дефинитно X , добијамо $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ у свакој тачки из M . Ова многострукост је глобално Жордан-Осерманова, али није Јакоби-дијагонализабилна. $\triangle$

Пример 9.4. За $f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = 1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad 2x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1 f_2 = -x_1.$$

У овом случају, за дефинитно X , имамо $\mu_X(\lambda) = \lambda$ у тачкама са $x_1 = 0$ и $\mu_X(\lambda) = \lambda^2$ у тачкама са $x_1 \neq 0$. Ова многострукост је глобално Осерманова и тачка по тачка Жордан-Осерманова, али није глобално Жордан-Осерманова. $\triangle$

Ради комплетности и неких додатних примера можемо израчунати раније уведену матрицу B . Под условом (9.2) имамо

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где су

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{1}{2} \alpha_2^2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \alpha_2^2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4} a \alpha_2^2 f_1 f_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(2\alpha_1 \alpha_2 x_3 f_1 + \alpha_2^2 x_3 f_2 - \alpha_2^2 x_4 f_1 + 4\alpha_2 \alpha_3 + 2a \alpha_2^2 \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ b_{12} &= \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4} a \alpha_1 \alpha_2 f_1 f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(2\alpha_1^2 x_3 f_1 + \alpha_1 \alpha_2 x_3 f_2 - \alpha_1 \alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_1 \alpha_3 + 2a \alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_2 \alpha_4 \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ b_{21} &= \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4} a \alpha_1 \alpha_2 f_1 f_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\alpha_1 \alpha_2 x_4 f_1 + 2\alpha_2^2 x_4 f_2 - \alpha_1 \alpha_2 x_3 f_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 + 2a \alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_2 \alpha_4 \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ b_{22} &= -\frac{1}{2} \alpha_1^2 x_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \alpha_1^2 x_4 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4} a \alpha_1^2 f_1 f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(2\alpha_1 \alpha_2 x_4 f_2 + \alpha_1^2 x_4 f_1 - \alpha_1^2 x_3 f_2 + 4\alpha_1 \alpha_4 + 2a \alpha_1^2 \right) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Праволинијски рачун даје

$$\mathcal{J}_X^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ BA + A^\top B & (A^\top)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BA + A^\top B & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \varepsilon_X \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1 \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

као и

$$\mathcal{J}_X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (BA + A^\top B)A & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

за свако $X \in TM$. Зато за свако дефинитно X услов

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq 0$$

повлачи $\mu_X(\lambda) = \lambda^3$, што дозвољава нове конкретне примере.

Пример 9.5. За $f_1(x_1, x_2) = x_2, f_2(x_1, x_2) = -x_1$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \neq 0.$$

За дефинитно X имамо $\mu_X(\lambda) = \lambda^3$ у свакој тачки из M , што даје другачији пример глобално Жордан-Осерманове многострукости. $\triangle$

Пример 9.6. За $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2, f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2$ и $a = 1$ важи

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_1, \quad 2x_3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + 2x_4\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - af_1f_2 = -2x_4 + \frac{1}{2}x_1^3x_2.$$

У овом случају $\mu_X(\lambda)$ за дефинитно X варира од тачке до тачке. То може бити λ^3 (за тачке са $x_1 \neq 0$), или λ^2 (за $x_1 = 0, x_4 \neq 0$) или λ (за $x_1 = x_4 = 0$). Конструисана многострукост је глобално Осерманова и тачка по тачка Жордан-Осерманова. $\triangle$

9.2 Шурови проблеми

У овој секцији разматрамо псеудо-Риманове многострукости и истражујемо резултате повезане са Шуровим типом проблема који су базирани на Теорему 6.8. Кажемо да је псеудо-Риманова многострукост (M, g) ***k*-шџајн** ако је њен тензор кривине k -штајн у свакој тачки од M . Другим речима, (M, g) је k -штајн ако постоје глатке функције $C_j \in \mathfrak{F}(M)$ такве да

$$\text{Tr}(\mathcal{J}_X^j) = (\varepsilon_X)^j C_j(p)$$

важи за све $p \in M, X \in T_p M$ и $1 \leq j \leq k$. Желимо да проучимо да ли су функције C_j обавезно константне, те такве проблеме зовемо Шурови проблеми (видети Гилки [57, Секција 1.13]).

Најједноставнији случај разматра функцију C_1 , где је наредна теорема заправо другачије записана Теорема 6.12.

Теорема 9.1. Свака повезана 1-шџајн мноџострукост димензије $n \neq 2$ има константно C_1 .

Кажемо да симетрично $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ има **Шурово својство** ако дато $A = fg$ за неку функцију $f \in \mathfrak{F}(M)$ повлачи да је f константна (видети Карпенер 1980 [35, Глава 2]). На основу Теореме 9.1 Ричијев тензор има Шурово својство осим за $\dim M = 2$.

Дефинишимо занимљив симетричан коваријантни тензор $\Omega \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ тако што у околини неке тачке поставимо

$$\Omega(X, Y) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k R(X, E_i, E_j, E_k) R(Y, E_i, E_j, E_k),$$

где је $(E_1, \dots, E_n)$ ортонормирани локални покретни репер над том околином. Ако је $(F_1, \dots, F_n)$ неки други ортонормирани локални покретни репер, то је веза са старим репером $E_i = \sum_t m_{ti} F_t$, односно $F_p = \sum_t m^{tp} E_t$, при чему важи $\sum_t m_{it} m^{tp} = \delta_{ip}$ (инверзна матрица) и $\varepsilon_p m_{pi} = g(E_i, F_p) = \varepsilon_i m^{ip}$. Како је $\sum_i \varepsilon_i m_{pi} m_{ui} = \sum_i \varepsilon_u m_{pi} m^{iu} = \varepsilon_u \delta_{pu}$, то

имамо

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k R(X, E_i, E_j, E_k) R(Y, E_i, E_j, E_k) \\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \sum_{p,q,r} m_{pi} m_{qj} m_{rk} R(X, F_p, F_q, F_r) \sum_{u,v,w} m_{ui} m_{vj} m_{wk} R(Y, F_u, F_v, F_w) \\
&= \sum_{p,q,r,u,v,w} R(X, F_p, F_q, F_r) R(Y, F_u, F_v, F_w) \sum_i \varepsilon_i m_{pi} m_{ui} \sum_j \varepsilon_j m_{qj} m_{vj} \sum_k \varepsilon_k m_{rk} m_{wk} \\
&= \sum_{p,q,r} \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R(X, F_p, F_q, F_r) R(Y, F_p, F_q, F_r),
\end{aligned}$$

те је Ω добро дефинисано јер не зависи од избора ортонормираног репера.

Ова природна инваријанта је алгебарски најједноставнија после скаларне и Ричијеве кривине, и помиње се код Бесеа из 1978. године [19, стр.164–165]. Уколико уведемо

$$\varepsilon_R = \|R\|^2 = \text{tr}_g \Omega,$$

тада имамо следећу лему.

Лема 9.2. *За Ајнштајнову многострукост важи $\nabla \varepsilon_R = 4 \text{div } \Omega$.*

Доказ. У ортонормираном локалном покретном реперу имамо,

$$\begin{aligned}
(\text{div } \Omega)(E_k) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i \nabla_{E_i} \Omega(E_k, E_i) = \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r \nabla_{E_i} (R_{kpqr} R_{ipqr}) \\
&= \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{ipqr} \nabla_i R_{kpqr} + \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{kpqr} \nabla_i R_{ipqr}.
\end{aligned}$$

За Ајнштајнову многострукост важи $R_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij} C_1$, те је $\nabla R_{ij} = 0$. Зато из (6.9) следи

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i \nabla_i R_{ipqr} &= \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i (-\nabla_r R_{ipiq} - \nabla_q R_{ipri}) = \sum_{1 \leq i,l \leq n} g^{il} \nabla_r R_{ipql} - \sum_{1 \leq i,l \leq n} g^{il} \nabla_q R_{iprl} \\
&= \nabla_{E_r} R_{pq} - \nabla_{E_q} R_{pr} = 0,
\end{aligned}$$

одакле нестаје други члан, $\sum_{1 \leq p,q,r \leq n} \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{kpqr} \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i \nabla_i R_{ipqr} = 0$. Тада је,

$$\begin{aligned}
(\text{div } \Omega)(E_k) &= \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{ipqr} \nabla_i R_{kpqr} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{ipqr} (-\nabla_k R_{piqr} - \nabla_p R_{ikqr} + \nabla_i R_{kpqr}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r R_{ipqr} \nabla_k R_{ipqr} = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,p,q,r \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_r \nabla_{E_k} (R_{ipqr})^2 = \frac{1}{4} \nabla_{E_k} \varepsilon_R.
\end{aligned}$$

□

Греј и Вилмор [66] су Ајнштајнову многострукост (M, g) димензије $n > 4$ назвали **супер-Ајнштајнова** ако задовољава $\Omega = fg$ за неко $f \in \mathfrak{F}(M)$. У том случају, узимајући трагове у односу на g имамо $\varepsilon_R = fn$, те је зато по (6.29),

$$\text{div } \Omega = \text{div } fg = \nabla f = \frac{1}{n} \nabla \varepsilon_R.$$

Из Леме 9.2 следи

$$\frac{1}{4} \nabla \varepsilon_R = \frac{1}{n} \nabla \varepsilon_R,$$

што даје $\nabla \varepsilon_R = 0$, те је зато ε_R константно. Видимо да у Ајнштајновој многострукости Ω има Шурово својство, осим у случају $n = 4$. Додатно, супер-Ајнштајнова многострукост димензије $n = 4$ је дефинисана као Ајнштајнова многострукост са константним ε_R .

Посматрајмо 2-штајн многострукост (M, g) димензије n . У ортонормираном локалном покретном реперу $(E_1, \dots, E_n)$, Теорема 8.6 за $1 \leq x \neq y \leq n$ даје једнакост (8.9),

$$2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj} + R_{iyxj})^2 = 2\varepsilon_x \varepsilon_y C_2.$$

Коришћењем симетрије $\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj})^2 = \sum_{j,i} \varepsilon_j \varepsilon_i (R_{iyxj})^2$, то постаје

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj} R_{iyyj} + R_{ixyj} R_{iyxj} + (R_{ixyj})^2) = \varepsilon_x \varepsilon_y C_2.$$

Помножимо то са ε_y и сумирајмо по индексу y за све $y \neq x$. Додајмо и одузмимо случај $y = x$ на левој страни, док $\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj})^2 = C_2$ важи из (8.7), те имамо

$$-3\varepsilon_x C_2 + \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj} R_{iyyj} + R_{ixyj} R_{iyxj} + (R_{ixyj})^2) = \sum_{1 \leq y \leq n, y \neq x} \varepsilon_x C_2,$$

одакле је

$$\sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixxj} R_{iyyj} + R_{ixyj} R_{iyxj} + (R_{ixyj})^2) = (n+2)\varepsilon_x C_2. \quad (9.4)$$

Продискутујмо понаособ чланове на левој страни. Користимо Ајнштајнове формуле (8.5) и (8.6) за први члан,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} R_{iyyj} &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixxj} \sum_{1 \leq y \leq n} \varepsilon_y R_{iyyj} + \sum_{1 \leq i \leq n} R_{ixxi} \sum_{1 \leq y \leq n} \varepsilon_y R_{iyyi} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} R_{ixxi} \cdot \varepsilon_i C_1 = \varepsilon_x C_1^2. \end{aligned}$$

За други члан у (9.4) користимо симетрије и први Бјанкијев идентитет,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j R_{ixyj} R_{iyxj} &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{xijy} R_{xjiy} + R_{xiyj} R_{xyji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{xijy} (-R_{xijy} - R_{xyji}) + R_{xijy} R_{xyji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j R_{xijy} R_{xijy} = \frac{1}{2} \Omega(E_x, E_x). \end{aligned}$$

Последњи члан је једноставан,

$$\sum_{1 \leq y, i, j \leq n} \varepsilon_y \varepsilon_i \varepsilon_j (R_{ixyj})^2 = \Omega(E_x, E_x).$$

Након замене у (9.4) имамо

$$\varepsilon_x C_1^2 + \frac{1}{2} \Omega(E_x, E_x) + \Omega(E_x, E_x) = (n+2)\varepsilon_x C_2,$$

одакле је

$$\Omega(E_x, E_x) = \frac{2}{3} \varepsilon_x ((n+2)C_2 - C_1^2).$$

После поларизације то доноси

$$\Omega = \frac{2}{3}((n+2)C_2 - C_1^2)g,$$

те је зато

$$\varepsilon_R = \frac{2}{3}n((n+2)C_2 - C_1^2).$$

Наши рачуни показују да је 2-штајн многострукост димензије $n > 4$ супер-Ајнштајнова, што повлачи да је ε_R константно, те је константно и C_2 . Додатно, на основу Примера 6.13, R у димензији $n = 3$ има константну секциону кривину. Међутим, постоје проблеми у преосталим димензијама јер C_1 не мора бити константно за $n = 2$ и ε_R не мора бити константно за $n = 4$.

Неке варијације наредног резултата, углавном рестриковане на Риманово окружење, могу се наћи у Бесе [19, стр.164–165], Гилки, Сван³, Ванхеке⁴ [61, Теорема 2.4], Гилки [57, Секција 1.13, стр.75–78], Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Лорензо [65, стр.10–15].

Теорема 9.3. *Ако је (M, g) повезана 2-штајн многострукости димензије $n \notin \{2, 4\}$, онда је C_2 константно.*

9.3 Један-корен многострукости

Нека је R k -корена алгебарски тензор кривине на квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$. Посматрајмо Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ за ненула вектор $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$. Елементи његове (реалне) матрице у односу на неку ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ су хомогене полиномијалне функције степена два у коефицијентима $x_1, \dots, x_n$,

$$(\mathcal{J}_X)_{ab} = \varepsilon_a g(\mathcal{J}_X(E_b), E_a) = \varepsilon_a \sum_{i,j=1}^n R_{bija} x_i x_j.$$

Како услов k -корена повлачи да се сопствене вредности не пресецају, вишеструкости сопствених вредности се не мењају док X варира. На основу Теореме А.28, то нам омогућава да означимо сопствене вредности тако да зависе аналитички од координата од $X(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Најједноставнији случај $k = 1$ је везан за **један-корен многострукости** што је разматрао Андрејић 2018. године [9, Секција 5]. Нека је R алгебарски тензор кривине на $(\mathcal{V}, g)$ такав да редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има само једну сопствену вредност $\varepsilon_X \mu_X$ за свако дефинитно $X \in \mathcal{V}$. Напоменимо да је у овом случају та једина сопствена вредност обавезно реална.

У Римановом окружењу добијамо $X^\perp = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$. Зато за међусобно ортогоналне дефинитне $X, Y \in \mathcal{V}$ имамо $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \mu_X Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \mu_Y X$, те је

$$\varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_X = g(\mathcal{J}_X Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \kappa(X, Y) = g(\mathcal{J}_Y X, X) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_Y,$$

што повлачи константну секциону кривину $\mu_X = \mu_Y = \kappa(X, Y)$. Исти доказ пролази и за Јакоби-дијагонализабилно R (видети [65, р.102]). Коначно, примена Шурове теореме (Теорема 6.8) повлачи наредну теорему.

Теорема 9.4. *Повезана један-корен Јакоби-дијагонализабилна многострукости димензије $n \geq 3$ је простор константне секционе кривине. Посебно, повезана Риманова један-корен многострукости димензије $n \geq 3$ је простор константне секционе кривине.*

³Andrew Francis Swann, дански математичар

⁴Lieven Vanhecke, белгијски математичар

Посматрајмо исти проблем у Лоренцовом окружењу. У овом случају можемо користити чињеницу да је $\mathcal{J}_T$ дијагонализабилно за свако временско T . За просторно X ортогонално на временско T можемо применити $\mathcal{J}_{X+tT} = \mathcal{J}_X + 2t\mathcal{J}(X, T) + t^2\mathcal{J}_T$ на произвољно $A \in \text{Span}\{X, T\}^\perp$. Тада је $\mathcal{J}_{X+tT}(A) = \varepsilon_{X+tT}\mu_{X+tT}A$ за $\varepsilon_{X+tT} < 0$, док је $\mathcal{J}_X(A) = \alpha A + B$, $\mathcal{J}(X, T)A = \beta A + C$ и $\mathcal{J}_T(A) = \varepsilon_T\mu_TA$, где $B, C \in A^\perp$. Тако важи $B + 2tC = 0$ за све $|t| > \sqrt{-\varepsilon_X/\varepsilon_T}$ што повлачи $B = C = 0$, те је A сопствени вектор од $\mathcal{J}_X$. Зато је $\mathcal{J}_X$ дијагонализабилно за свако просторно X и као раније мора бити константне секционе кривине. То доказује наредну теорему коју је поставио Андрејић 2018. године [9, Теорема 5.1].

Теорема 9.5. *Сваки Лоренцов један-корен алгебарски тензор кривине има константну секциону кривину. Повезана Лоренцова један-корен многострукост димензије $n \geq 3$ је простор константне секционе кривине.*

Проблем један-корен алгебарског тензора кривине у вишим сигнатурама је много компликованији. На пример, у Секцији 9.1 видели смо неке глобално Осерманове један-корен многострукости које нису Јакоби-дијагонализабилне.

Додатно, претпоставимо да је један-корен многострукост тачка по тачка Осерманова, са једном сопственом вредности $\varepsilon_X\mu(p) \in \mathbb{R}$ од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за $X \in T_pM$. Како је сваки Осерманов R Ајнштајнов имамо $\varepsilon_X C_1(p) = \text{Tr}(\mathcal{J}_X) = \varepsilon_X(n-1)\mu(p)$. По Теорему 9.1, повезана 1-штајн M димензије $n \neq 2$ има константно C_1 , те је зато μ константно на M и због тога је M глобално Осерманова.

Теорема 9.6. *Повезана један-корен тачка по тачка Осерманова многострукост димензије $n \geq 3$ је глобално Осерманова.*

9.4 Два-корена Осерманове многострукости

Посматрајмо наредни случај, $k = 2$. Нека је (M, g) повезана тачка по тачка Осерманова многострукост димензије n таква да у свакој тачки $p \in M$ за $X \in T_pM$ одговарајући редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ има тачно две различите сопствене вредности $\varepsilon_X\lambda(p)$ и $\varepsilon_X\mu(p)$ чије су вишеструкости редом $\sigma(p)$ и $\tau(p)$.

На основу Теореме 8.3, Осерманов алгебарски тензор кривине за $n \geq 3$ је n -штајн. Због тога постоје глатке функције $C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{F}(M)$ такве да

$$(\varepsilon_X)^j C_j(p) = \text{Tr}(\mathcal{J}_X^j) = (\varepsilon_X)^j (\sigma(p)(\lambda(p))^j + \tau(p)(\mu(p))^j).$$

важи за свако $1 \leq j \leq n$.

Већ знамо да је C_1 константно за $n \neq 2$ (Теорема 9.1), као и да је C_2 константно за $n \notin \{2, 4\}$ (Теорема 9.3). Због тога услов $n \geq 5$ искључује нежељене случајеве, те имамо константне C_1 и C_2 . Поставимо $C_0 = n - 1$ и посматрајмо систем једначина за $j \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \sigma(p) + \tau(p) &= C_0, \\ \sigma(p)\lambda(p) + \tau(p)\mu(p) &= C_1, \\ \sigma(p)\lambda(p)^2 + \tau(p)\mu(p)^2 &= C_2. \end{aligned}$$

Из прве две једначине имамо

$$\sigma = \frac{C_1 - C_0\mu}{\lambda - \mu}, \quad \tau = \frac{C_1 - C_0\lambda}{\mu - \lambda},$$

те након замене у трећу једначину следи

$$C_1(\lambda + \mu) - C_0\lambda\mu = C_2.$$

Како је $\tau \geq 1$ имамо $C_1 - C_0\lambda \neq 0$, те претходна једначина даје

$$\mu = \frac{C_2 - C_1\lambda}{C_1 - C_0\lambda}.$$

Преостале функције могу се изразити преко λ на следећи начин

$$\sigma = \frac{C_0C_2 - C_1^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}, \quad \tau = \frac{(C_1 - C_0\lambda)^2}{C_0\lambda^2 - 2C_1\lambda + C_2}.$$

Одавде конкретно σ даје највише две вредности за λ , што су решења одговарајуће квадратне једначине. Како су вредности за σ цели бројеви $1 \leq \sigma \leq n-2$, то следи да λ може узети највише $2(n-2)$ конкретних вредности. Из $C_j(p) = \sigma(p)\lambda(p)^j + \tau(p)\mu(p)^j$ можемо видети да $C_j(p)$ за $j > 2$ може узети највише $2(n-2)$ конкретних вредности. Функција $C_j(p)$ је глатка, те и непрекидна, те зато може узети само једну вредност. Зато је C_j константно као што је случај и са свим осталим функцијама (σ , τ , λ и μ), што доказује да је M глобално Осерманова.

Овај резултат важи и у случају комплексних сопствених вредности. Постојање комплексне сопствене вредности $\alpha(p) + i\beta(p)$ од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ повлачи да је $\alpha(p) - i\beta(p)$ као конјугат такође корен карактеристичног полинома са истом вишеструкости $(n-1)/2$. Тада имамо $C_1 = (n-1)\alpha(p)$ и $C_2 = (n-1)(\alpha(p)^2 - \beta(p)^2)$, што повлачи да су $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ такође константе. Константе α и β дају константне сопствене вредности и зато имамо глобално Осерманову многострукост.

Теорема 9.7. *Свака повезана два-корена шачка по шачка Осерманова многострукости димензије $n \geq 5$ је глобално Осерманова.*

Постоји варијанта Теореме 9.7 која захтева константне вишеструкости $\sigma(p)$ и $\tau(p)$ (видети Гарсија-Рио, Купели, Васкез-Лорензо [65, стр.10–16]), али већ смо видели да овај захтев није неопходан јер је σ цео број по дефиницији као што је Андрејић показао 2013. године [7, Теорема 2.1].

9.5 Два-корена Риманови тензори

Нека је R два-корена алгебарски тензор кривине на позитивно дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$ димензије n . Тада, редукован Јакобијев оператор $\tilde{\mathcal{J}}_X$ за нунула $X \in \mathcal{V}$ има тачно две сопствене вредности $\varepsilon_X\mu_X$ и $\varepsilon_X\nu_X$ са константним вишеструкостима, те карактеристични полином Јакобијевог оператора гласи

$$\omega_X(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - \tilde{\mathcal{J}}_X) = \lambda(\lambda - \varepsilon_X\mu_X)^p(\lambda - \varepsilon_X\nu_X)^q$$

за фиксирани природне бројеве $p \geq q \geq 1$ са $p + q = n - 1$.

Фокусирајмо се на јединичну сферу $\mathcal{S} = \mathbf{S}^{n-1} = \{X \in \mathcal{V} : \varepsilon_X = 1\} \subset \mathcal{V}$. Посматрајмо $\tilde{\mathcal{J}}_X - \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp}$ као глатки хомоморфизам тангентног раслојења над $\mathcal{S}$ са идентификацијом $T_X\mathcal{S} \cong X^\perp$. Како је он константног ранга q , $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$ је подраслојење од $T\mathcal{S}$ (видети Теорему 3.3), односно p -димензиона дистрибуција на $\mathcal{S}$. На сличан начин, $\text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \nu_X \mathbb{1}_{X^\perp})$ је q -димензиона дистрибуција на $\mathcal{S}$. За $\rho(n) \leq k \leq n - 1 - \rho(n)$, $\mathcal{S}$ по Теорему 3.5 не допушта k -димензиону дистрибуцију, што нас оставља са

$$q < \rho(n), \tag{9.5}$$

где је ρ Хурвиц–Радон функција из (3.3).

Неједнакост (9.5) значајно редукује могућности за вишеструкости p и q . На пример, одмах уклања непарно n због $\rho(n) = 1$, те n мора бити парно, што је приметио Андрејић 2022. године [10, Теорема 3]).

Теорема 9.8. *Не постоји нејарнодимензиони Риманов два-корена алгебарски тензор кривине. Посебно, не постоји два корена Риманова мнојострукост нејарне димензије.*

Не умањујући општост можемо претпоставити $\mu_X < \nu_X$, јер у супротном посматрамо $-R$ као нови алгебарски тензор кривине. За сваки ненула $X \in \mathcal{V}$ дефинишемо сопствене просторе,

$$\mathcal{M}(X) = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \mu_X \mathbb{1}_{X^\perp}), \quad \mathcal{N}(X) = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{J}}_X - \varepsilon_X \nu_X \mathbb{1}_{X^\perp}),$$

где је $\dim \mathcal{M}(X) = p$ и $\dim \mathcal{N}(X) = q$, што допушта ортонормирану декомпозицију

$$X^\perp = \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{N}(X).$$

За ненула $X, Y \in \mathcal{V}$ који задовољавају $Y \in \mathcal{M}(X)$, можемо раставити $X = M + N$ тако да је $M \in \mathcal{M}(Y)$ и $N \in \mathcal{N}(Y)$. Због

$$\begin{aligned} g(\mathcal{J}_X(Y), Y) &= g(\varepsilon_X \mu_X Y, Y) = \varepsilon_X \varepsilon_Y \mu_X, \\ g(\mathcal{J}_Y(X), X) &= g(\varepsilon_Y \mu_Y M + \varepsilon_Y \nu_Y N, M + N) = \varepsilon_Y \varepsilon_M \mu_Y + \varepsilon_Y \varepsilon_N \nu_Y, \end{aligned}$$

имамо $\varepsilon_X \mu_X = \varepsilon_M \mu_Y + (\varepsilon_X - \varepsilon_M) \nu_Y$, те је последично

$$\varepsilon_M = \varepsilon_X \frac{\nu_Y - \mu_X}{\nu_Y - \mu_Y}, \quad (9.6)$$

што даје

$$0 \leq \frac{\nu_Y - \mu_X}{\nu_Y - \mu_Y} \leq 1,$$

те отуда $\mu_Y \leq \mu_X \leq \nu_Y$. У сличном маниру, $Y \in \mathcal{N}(X)$ повлачи

$$\varepsilon_N = \varepsilon_X \frac{\mu_Y - \nu_X}{\mu_Y - \nu_Y} \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{\nu_X - \mu_Y}{\nu_Y - \mu_Y} \leq 1,$$

те је зато $\mu_Y \leq \nu_X \leq \nu_Y$. Одавде имамо

$$\begin{aligned} 0 \neq Y \in \mathcal{M}(X) &\implies \mu_Y \leq \mu_X \leq \nu_Y, \\ 0 \neq Y \in \mathcal{N}(X) &\implies \mu_Y \leq \nu_X \leq \nu_Y. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Рестрикције $\mu|_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\nu|_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ су непрекидне функције на компакту, те су њихове слике затворени интервали. Из $\mathcal{J}_{tX}/\varepsilon_{tX} = \mathcal{J}_X/\varepsilon_X$ важи $\mu(tX) = \mu(X)$ за све $X \neq 0$ и $t \in \mathbb{R}$. Одатле, за ненула $X \in \mathcal{V}$ достижемо $\mu_X \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ и $\nu_X \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, што омогућава да дефинишемо

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}(\mu_{\min}) \cup \{0\}, \quad \mathcal{W} = \nu^{-1}(\nu_{\max}) \cup \{0\}.$$

Ако $0 \neq Y \in \mathcal{M}(X)$ важи за $0 \neq X \in \mathcal{U}$, онда (9.7) даје $Y \in \mathcal{U}$, док (9.6) повлачи $\varepsilon_M = \varepsilon_X$, односно $X = M \in \mathcal{M}(Y)$. На сличан начин то можемо поновити за $Y \in \mathcal{N}(X)$ и $X \in \mathcal{W}$. Тако добијамо неку врсту Ракићевог принципа дуалности где су сопствене вредности екстремне,

$$\begin{aligned} 0 \neq Y \in \mathcal{M}(X) \wedge 0 \neq X \in \mathcal{U} &\iff 0 \neq X \in \mathcal{M}(Y) \wedge 0 \neq Y \in \mathcal{U}, \\ 0 \neq Y \in \mathcal{N}(X) \wedge 0 \neq X \in \mathcal{W} &\iff 0 \neq X \in \mathcal{N}(Y) \wedge 0 \neq Y \in \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Уколико имамо и $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \lambda Y$ и $\mathcal{J}_Y(X) = \varepsilon_Y \lambda X$ за ненула међусобно ортогоналне $X, Y \in \mathcal{V}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тада за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, по Леми 8.29 имамо

$$\mathcal{J}_{\alpha X + \beta Y}(\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y) = \varepsilon_{\alpha X + \beta Y} \lambda (\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y). \quad (9.9)$$

На основу формуле (9.8), $Y \in \mathcal{M}(X)$ са $X \in \mathcal{U}$ повлачи $X \in \mathcal{M}(Y)$ са $Y \in \mathcal{U}$, те (9.9) доноси $\varepsilon_Y \beta X - \varepsilon_X \alpha Y \in \mathcal{M}(\alpha X + \beta Y)$ са $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{U}$. Зато $0 \neq U \in \mathcal{U}$ повлачи $\text{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U) \subseteq \mathcal{U}$, или последично $\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{N}(U)$, као и одговарајући аналог за $\mathcal{W}$,

$$\begin{aligned} 0 \neq U \in \mathcal{U} &\implies \text{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U) \subseteq \mathcal{U}, \\ 0 \neq W \in \mathcal{W} &\implies \text{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W) \subseteq \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Како је $\dim(\text{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U)) = p + 1$, $\dim(\text{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W)) = q + 1$ и притом важи $\dim \mathcal{V} = p + q + 1 > (p + 1) + (q + 1)$, Грасманова формула даје нетривијалан пресек,

$$0 \neq (\text{Span}\{U\} \oplus \mathcal{M}(U)) \cap (\text{Span}\{W\} \oplus \mathcal{N}(W)) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{W}. \quad (9.11)$$

Формула (9.11) допушта да као почетни корак узмемо $0 \neq A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, те искористимо његова лепа својства $\mu_A = \mu_{\min}$ и $\nu_A = \nu_{\max}$.

Због Теореме 9.8, n мора бити парно, те разматрамо наредни по једноставности случај где је димензија n два пута непар. У том случају је $\rho(n) = 2$, те неједнакост (9.5) даје $q = 1$, што значи прост корен.

Претпоставимо да је једна сопствена вредност проста, односно да важи $q = 1$. Ако додамо још $p > n/2$ (што искључује само $n = 4$), тада из Грасманове формуле свака два $\mathcal{M}$ простора имају нетривијалан пресек. Зато за ненула векторе $X, Y \in \mathcal{U}$ постоји $0 \neq S \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y)$, те (9.8) доноси $X, Y \in \mathcal{M}(S)$ са $S \in \mathcal{U}$, те (9.10) даје $\text{Span}\{X, Y\} \subset \mathcal{U}$, што доказује да је $\mathcal{U}$ потпростор од $\mathcal{V}$.

Желимо да покажемо да је μ константа, или еквивалентно да је $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Претпоставимо ли супротно, $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, како је $\mathcal{U}$ потпростор, то применом (9.10) имамо $\dim \mathcal{U} = n - 1$, одакле је

$$0 \neq X \in \mathcal{U} \implies \mathcal{U} = \text{Span}\{X\} \oplus \mathcal{M}(X) \quad \wedge \quad \mathcal{U}^\perp = \mathcal{N}(X). \quad (9.12)$$

Започнимо са $0 \neq A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ из (9.11). За $0 \neq Z \in \mathcal{N}(A) = \mathcal{U}^\perp$, из (9.8) имамо $A \in \mathcal{N}(Z)$ са $Z \in \mathcal{W}$, те је $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(Z) = \text{Span}\{A, Z\}^\perp$. За $0 \neq B \in \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(Z)$ имамо $B \in \mathcal{U}$, те је по (9.12), $Z \in \mathcal{U}^\perp = \mathcal{N}(B)$. Тада $g(\mathcal{J}_B(Z), Z) = g(\mathcal{J}_Z(B), B)$ даје $\nu_B = \mu_Z = c$. Међутим, ако су B и Z јединични, онда из (9.9) важи

$$\mathcal{J}_{Z \cos t + B \sin t}(B \cos t - Z \sin t) = c(B \cos t - Z \sin t),$$

што повлачи $\bar{\mu}(t) = \mu(Z \cos t + B \sin t) = c$ или $\bar{\nu}(t) = \nu(Z \cos t + B \sin t) = c$, за свако $t \in \mathbb{R}$. Функције $\bar{\mu}, \bar{\nu}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ су непрекидне са $\bar{\mu} < \bar{\nu}$ и $\bar{\mu}(0) = \bar{\nu}(\pi/2) = c$, одакле је $\mathbb{R} = \bar{\mu}^{-1}(c) \sqcup \bar{\nu}^{-1}(c)$ дисјунктна унија непразних затворених скупова, што није могуће.

То доказује да $\mu_X = \mu$ мора бити константа за $q = 1$, осим ако је $n = 4$. Ово нам омогућава да уведемо нови алгебарски тензор кривине $R' = R - \mu R^1$, где је $R^1 \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$ тензор константне секционе кривине један, дат са (6.13). Овај трик помера сопствене вредности, те карактеристични полином новог Јакобијевог оператора постаје $\det(\lambda \mathbb{1} - \mathcal{J}_X') = \lambda^{n-1}(\lambda - \varepsilon_X(\nu_X - \mu))$.

Да не компликујемо ствари превише, задржаћемо претходну нотацију и претпоставити да $\mathcal{J}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X \nu_X > 0$, док су све остале сопствене вредности једнаке нули. То суштински значи да оригинални редуковани Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ има просту сопствену вредност $\varepsilon_X(\nu_X + \mu)$, док други корен $\varepsilon_X \mu$ има вишеструкост $n - 2$.

Проста сопствена вредност мотивише нас да модификујемо идеје из Секције 8.9. Изаберимо произвољну ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ у $\mathcal{V}$. Тада за свако ненула $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i \in \mathcal{V}$, Јакобијев оператор $\mathcal{J}_X$ је ранга један, такав да су елементи његове матрице $\mathcal{J}_{ij}(X)$ квадратне форме у n променљивих $x_1, \dots, x_n$. Свака подматрица реда два у симетричној матрици ранга један је сингуларна што даје

$$\mathcal{J}_{ii}(X) \mathcal{J}_{jj}(X) = \mathcal{J}_{ij}(X)^2 \quad (9.13)$$

за све $1 \leq i, j \leq n$. Ако фиксирамо неки мономијални поредак онда постоји јединствен монични $G(X)$ који је највећи заједнички делилац за све $\mathcal{J}_{ij}(X)$. Пермутујући базу можемо подесити

$$\mathcal{J}_{ii}(X) = \sigma_i G(X) Q_i(X) P_i(X)^2,$$

где су $P_i(X)$ и $Q_i(X)$ ненула полиноми за $1 \leq i \leq m$ са додатним $\mathcal{J}_{ii}(X) = 0$ за $m < i \leq n$, док је $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. Међутим, такво растављање је јединствено до на знак од $P_i(X)$ уколико поставимо да је $Q_i(X)$ моничан бесквадратан. Тада

$$\sigma_i \sigma_j G(X)^2 Q_i(X) Q_j(X) P_i(X)^2 P_j(X)^2 = \mathcal{J}_{ij}(X)^2$$

повлачи да важи $Q_i(X) = Q_j(X) = Q(X) = 1$ и $\sigma_i = \sigma_j = \sigma$ за $1 \leq i \leq m$, одакле добијамо $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma_{ij} G(X) P_i(X) P_j(X)$, где је $\sigma_{ij} \in \{-1, 1\}$. Додатно, из (9.13) је $\mathcal{J}_{ij}(X) = 0$ кадгод важи $m < i \leq n$ или $m < j \leq n$, што се може третирати као $P_i(X) = 0$ за $m < i \leq n$ и продужава индексе на $m = n$.

Друга подматрица реда 2 даје $\mathcal{J}_{1i}(X) \mathcal{J}_{ij}(X) = \mathcal{J}_{1j}(X) \mathcal{J}_{ii}(X)$, те $\sigma_{1i} \sigma_{ij} = \sigma_{1j} \sigma_{ii}$. Како важи $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sigma$, то је $\sigma_{ij} = \sigma \sigma_{1i} \sigma_{1j}$, одакле следи $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma G(X) \sigma_{1i} P_i(X) \sigma_{1j} P_j(X)$. Како су полиноми $P_i(X)$ јединствени до на знак, можемо користити $\sigma_{1i} P_i(X)$ уместо $P_i(X)$ да бисмо добили $\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma G(X) P_i(X) P_j(X)$ за свако $1 \leq i, j \leq n$.

Штавише, упоредимо ли степене у полиному $\mathcal{J}_{ij}(X)$ закључујемо да сви P_i имају исти степен, који је нула или један. Степен нула доноси константне полиноме P_i , те је $\mathcal{J}_X = G(X)M$ за неку константну матрицу M . У том случају, ако је $\mathcal{J}_X(Y) = \varepsilon_X \nu_X Y$ онда је $\mathcal{J}_X(Z) = 0$ за свако $Z \in Y^\perp$, што даје $MZ = 0$. Међутим, тада је $\mathcal{J}_Y(Z) = G(Y)MZ = 0$, што даје контрадикцију $\mathcal{J}_Y = 0$. Зато сви P_i имају степен један, док $G(X)$ има степен нула одакле следи $G(X) = 1$.

Сумирајући претходна запажања, једнакост

$$\mathcal{J}_{ij}(X) = \sigma P_i(X) P_j(X)$$

важи за све $1 \leq i, j \leq n$, где су P_i линеарни хомогени полиноми. Уколико поставимо

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P_i(X) E_i,$$

тада следи

$$\mathcal{J}_X(P(X)) = \sum_{i=1}^n P_i(X) \sum_{j=1}^n \mathcal{J}_{ji}(X) E_j = \sigma \sum_{i=1}^n P_i(X)^2 (P(X)).$$

Тако је $P(X)$ сопствени вектор од $\tilde{\mathcal{J}}_X$ који одговара простој сопственој вредности

$$\sigma \varepsilon_{P(X)} = \sigma \sum_{i=1}^n P_i(X)^2 = \text{Tr } \mathcal{J}_X = \varepsilon_X \nu_X,$$

али како смо поставили $\nu_X > 0$, мора бити $\sigma = 1$. На овај начин конструисали смо линеарно пресликавање $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ такво да је $\mathcal{N}(X) = \text{Span}\{P(X)\}$ и

$$\nu_X = \frac{\varepsilon_{P(X)}}{\varepsilon_X}$$

са $\nu_{P(X)} \geq \nu_X$ (због (9.7)) за свако ненула $X \in \mathcal{V}$.

Почнимо са $0 \neq A \in \mathcal{W}$ где $P(A) \in \mathcal{N}(A)$ због (9.8), даје $A \in \mathcal{N}(P(A))$ са $P(A) \in \mathcal{W}$. Због тога, по (9.9), важи

$$\mathcal{J}_{\alpha A + \beta P(A)}(\varepsilon_{P(A)} \beta A - \varepsilon_A \alpha P(A)) = \varepsilon_{\alpha A + \beta P(A)} \nu_{\max}(\varepsilon_{P(A)} \beta A - \varepsilon_A \alpha P(A)),$$

што даје $v(\alpha A + \beta P(A)) = v_{\max}$ и $P(\alpha A + \beta P(A)) \propto \varepsilon_{P(A)}\beta A - \varepsilon_A\alpha P(A)$. Коришћењем линеарности од P и чињеницу да је $P(A) \perp \text{Span}\{A, P^2(A)\}$, добијамо коефицијент пропорционалности једнак $-1/\varepsilon_A$, те одатле важи $P^2(A) = -v_A A$ са $\text{Span}\{A, P(A)\} \subseteq \mathcal{W}$.

Можемо наставити у сличном маниру, употребом $A_1 = A$ и $v_1 = v_{\max}$ као базе индукције. Претпоставимо да већ имамо међусобно ортогоналне ненула векторе $A_1, P(A_1), \dots, A_k, P(A_k)$ такве да

$$\text{Span}\{A_i, P(A_i)\} \setminus \{0\} \subseteq v^{-1}(v_i) \quad \text{и} \quad P^2(A_i) = -v_i A_i \quad (9.14)$$

важи за све $1 \leq i \leq k$ са $0 < v_k \leq \dots \leq v_1$. Дефинишемо

$$v_{k+1} = \max\{v_X : X \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}(A_1) \cdots \cap \mathcal{M}(A_k)\} \leq v_k$$

и узмимо произвољно $0 \neq A_{k+1} \in v^{-1}(v_{k+1})$. Захвално је приметити да како је μ константа, дуалност (9.8) увек омогућава $Y \in \mathcal{M}(X) \iff X \in \mathcal{M}(Y)$. Као последица тога, $A_{k+1} \in \mathcal{M}(A_i) = \mathcal{M}(P(A_i)) = \text{Span}\{A_i, P(A_i)\}^\perp$ повлачи $A_i, P(A_i) \in \mathcal{M}(A_{k+1}) \perp \mathcal{N}(A_{k+1})$, те $P(A_{k+1}) \in \text{Span}\{A_i, P(A_i)\}^\perp = \mathcal{M}(A_i)$. Зато је $v_{P(A_{k+1})} \leq v_{k+1}$, те из формуле (9.7) имамо $v_{P(A_{k+1})} = v_{k+1}$, док једнакост (9.9) даје $\text{Span}\{A_{k+1}, P(A_{k+1})\} \setminus \{0\} \subseteq v^{-1}(v_{k+1})$ и $P^2(A_{k+1}) = -v_{k+1}A_{k+1}$.

Овај поступак користи константе $0 < v_{n/2} \leq \dots \leq v_1$ са својствима (9.14) за исцрпљивање простора

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{n/2} \text{Span}\{A_i, P(A_i)\}. \quad (9.15)$$

Имајући ово на уму, лако је увидети да је P косоадјунгован. Наиме, уколико поставимо векторе $X = \sum_{i=1}^{n/2} (x_i A_i + \bar{x}_i P(A_i))$ и $Y = \sum_{i=1}^{n/2} (y_i A_i + \bar{y}_i P(A_i))$, онда је

$$g(P(X), Y) = \sum_{i=1}^{n/2} g(x_i P(A_i) - \bar{x}_i v_i A_i, y_i A_i + \bar{y}_i P(A_i)) = \sum_{i=1}^{n/2} v_i \varepsilon_{A_i} (x_i \bar{y}_i - \bar{x}_i y_i) = -g(P(Y), X).$$

Кључна идеја је да сваки косоадјунгован ендоморфизам P на $\mathcal{V}$, на основу Примера 8.1 генерише алгебарски тензор кривине $R^P \in \mathfrak{T}_4^0(\mathcal{V})$, где имамо

$$\mathcal{J}_X^P = \begin{cases} -3\varepsilon_X v_X \mathbb{1} & \text{on } \text{Span}\{P(X)\} \\ 0 & \text{on } \text{Span}\{P(X)\}^\perp \end{cases}.$$

Зато, узимајући у обзир померање сопствених вредности за $\varepsilon_X \mu$, и могући избор од $v_X < \mu_X$ са почетка дискусије, алгебарски тензор кривине мора бити облика

$$R = \pm \left(-\frac{1}{3} R^P + \mu R^1 \right). \quad (9.16)$$

Овај резултат је боље изразити у ортонормираној бази $(E_1, F_1, \dots, E_{n/2}, F_{n/2})$ која је добијена из (9.15) рескалирањем $E_i = A_i / \sqrt{\varepsilon_{A_i}}$ и $F_i = P(A_i) / \sqrt{\varepsilon_{P(A_i)}}$. Обратно, лако је видети да за произвољну ортонормирану базу $(E_1, F_1, \dots, E_{n/2}, F_{n/2})$ у $\mathcal{V}$, константе $0 < v_{n/2} \leq \dots \leq v_1$ генеришу косоадјунговани ендоморфизам P на $\mathcal{V}$ са

$$P(E_i) = \sqrt{v_i} F_i, \quad P(F_i) = -\sqrt{v_i} E_i, \quad (9.17)$$

за свако $1 \leq i \leq n/2$. Тако смо добили наредну теорему коју је поставио Андрејић 2023. године [10, Теорема 4].

Теорема 9.9. *Сваки Риманов два-корена алгебарски тензор кривине димензије $n > 4$ са једним кореном је облика (9.16), за $\mu \in \mathbb{R}$ и неки косоадјунговани ендоморфизам P дефинисан са (9.17) користећи позитивне константе $v_1, \dots, v_{n/2} \in \mathbb{R}$.*

9.6 Два-корена Риманове многострукости

Теорема 9.9 и формула (9.16) карактеришу све могуће два-корена алгебарске тензоре кривине димензије двапут непар. Наредни корак је заснован на употреби другог Бјанкијевог идентитета са идејом да се види који од тих алгебарских тензора кривине може бити реализован као тензор кривине Риманове многострукости.

Посматрајмо Риманову многострукост M локално у околини $U \subset M$ неке тачке. Тамо можемо поставити локални ортонормирани покретни репер и глатко продужити елементе наше конструкције. Глаткоћа тензора кривине $R \in \mathfrak{T}_4^0(U)$ даје глаткоћу $\mu \in \mathfrak{F}(U)$, док је ν глатко на тангентном раслојењу TU без нула секције. Тада, начин на који смо конструисали P даје глаткоћу од $P_i(X) \in \mathfrak{F}(U)$, што доноси косоадјунговани оператор $P \in \mathfrak{T}_1^1(U)$. Коначно, $\nu \in \mathfrak{F}(TU \setminus (M \times \{0\}))$ повлачи $\nu_1, \dots, \nu_{n/2} \in \mathfrak{F}(U)$, те можемо продужити нашу ортонормирану базу из конструкције на локални ортонормирани покретни репер $(E_1, F_1, \dots, E_{n/2}, F_{n/2})$ у $\mathfrak{X}(U)$ који се уклапа у формулу (9.17). Згодно је користити овај покретни репер у наредном тексту.

Овакво продужење допушта нам да применимо коваријантне изводе на наше тензоре. Важно је напоменути да је $\nabla_V P \in \mathfrak{T}_1^1(U)$ такође косоадјунгован, јер $PX \perp X$ повлачи

$$0 = \nabla_V(g(PX, X)) = g(\nabla_V(PX), X) + g(PX, \nabla_V X) = g(\nabla_V(PX), X) - g(P\nabla_V X, X) = g((\nabla_V P)X, X),$$

што након поларизације даје

$$g((\nabla_V P)X, Y) = -g((\nabla_V P)Y, X),$$

за све $X, Y, V \in \mathfrak{X}(U)$.

Како је $\nabla R^1 = 0$, коваријантни извод дуж векторског поља $V \in \mathfrak{X}(U)$ нашег тензора кривине R из формуле (9.16) може се изразити са

$$\nabla_V R = \mp \frac{1}{3} \nabla_V R^P \pm (\nabla_V \mu) R^1.$$

За све $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(U)$ можемо израчунати

$$\begin{aligned} (\nabla_V R^P)(X, Y, Z, W) = & g(g(PX, Z)(\nabla_V P)Y - g(PY, Z)(\nabla_V P)X + 2g(PX, Y)(\nabla_V P)Z, W) \\ & + g(g((\nabla_V P)X, Z)PY - g((\nabla_V P)Y, Z)PX + 2g((\nabla_V P)X, Y)PZ, W), \end{aligned} \quad (9.18)$$

и

$$\begin{aligned} & (\nabla_V R^P)(X, Y, Y, X) + (\nabla_X R^P)(Y, V, Y, X) + (\nabla_Y R^P)(V, X, Y, X) \\ & = 3g(PX, Y)(2g((\nabla_V P)Y, X) - g((\nabla_X P)Y, V) + g((\nabla_Y P)X, V)) \\ & \quad - 3g(g((\nabla_X P)X, Y)PY + g((\nabla_Y P)Y, X)PX, V). \end{aligned}$$

Зато примена другог Бјанкијевог идентитета доноси

$$\begin{aligned} 0 = & (\nabla_V R)(X, Y, Y, X) + (\nabla_X R)(Y, V, Y, X) + (\nabla_Y R)(V, X, Y, X) \\ = & \mp g(PX, Y)(2g((\nabla_V P)Y, X) - g((\nabla_X P)Y, V) + g((\nabla_Y P)X, V)) \\ & \pm g(g((\nabla_X P)X, Y)PY + g((\nabla_Y P)Y, X)PX, V) \\ & \pm (\nabla_V \mu)(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X, Y)^2) \pm (\nabla_X \mu)(g(X, Y)g(Y, V) - \varepsilon_Y g(X, V)) \\ & \pm (\nabla_Y \mu)(g(X, Y)g(X, V) - \varepsilon_X g(Y, V)). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Претпостављајући $Y \perp PX$ у (9.19) добијамо

$$\begin{aligned} 0 = & g(g((\nabla_X P)X, Y)PY + g((\nabla_Y P)Y, X)PX, V) \\ & + (\nabla_X \mu)g(g(X, Y)Y - \varepsilon_Y X, V) + (\nabla_Y \mu)g(g(X, Y)X - \varepsilon_X Y, V) + (\nabla_V \mu)(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X, Y)^2), \end{aligned}$$

те је зато

$$(\varepsilon_X \varepsilon_Y - g(X, Y)^2)(\nabla \mu)^\sharp = -g((\nabla_X P)X, Y)PY - g((\nabla_Y P)Y, X)PX \\ + (X(\mu)\varepsilon_Y - Y(\mu)g(X, Y))X + (Y(\mu)\varepsilon_X - X(\mu)g(X, Y))Y.$$

За свуда ненула $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ такве да $Y \in \text{Span}\{X, PX\}^\perp$ имамо $(\nabla \mu)^\sharp \in \text{Span}\{X, PX, Y, PY\}$. Међутим, употреба нашег покретног репера са (9.17) даје

$$(\nabla \mu)^\sharp \in \bigcap_{1 \leq i < j \leq n/2} \text{Span}\{E_i, F_i, E_j, F_j\} = 0,$$

што доноси $\nabla \mu = 0$. Зато μ мора бити константа, док формула (9.19) доноси

$$g(PX, Y)(2g((\nabla_V P)Y, X) - g((\nabla_X P)Y, V) + g((\nabla_Y P)X, V)) \\ - g(g((\nabla_X P)X, Y)PY + g((\nabla_Y P)Y, X)PX, V) = 0. \quad (9.20)$$

Поново, $Y \perp PX$ даје $g((\nabla_X P)X, Y)PY + g((\nabla_Y P)Y, X)PX = 0$, док додатно $Y \perp X$ омогућава линеарну независност за PX и PY (јер су X и Y линеарно независни као ортогонални), те је зато $g((\nabla_X P)X, Y) = 0$ за $Y \in \text{Span}\{X, PX\}^\perp$. Међутим, ми знамо да је $g((\nabla_X P)X, X) = 0$, што повлачи $(\nabla_X P)X \propto PX$.

Дефинишимо $\lambda_X: U \rightarrow \mathbb{R}$ за свако $X \in \mathfrak{X}(U)$ са $\lambda_X = g((\nabla_X P)X, PX)/g(PX, PX)$ на $(\varepsilon_{PX})^{-1}(\mathbb{R}_+) = (\varepsilon_X)^{-1}(\mathbb{R}_+) \subseteq U$ и $\lambda_X = 0$ на $(\varepsilon_X)^{-1}(\{0\})$, где претходно доказана пропорционалност доноси

$$(\nabla_X P)X = \lambda_X PX. \quad (9.21)$$

Лако је проверити да $\lambda_{fX} = f\lambda_X$ важи за $f \in \mathfrak{F}(U)$. Са друге стране, из (9.21) за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ имамо

$$(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = (\lambda_{X+Y} - \lambda_X)PX + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)PY,$$

што након узимања скаларног производа са X даје

$$(\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)g(PY, X) = g((\nabla_X P)Y, X) = -g((\nabla_X P)X, Y) = -\lambda_X g(PX, Y),$$

те је зато $(\lambda_{X+Y} - \lambda_Y - \lambda_X)g(PX, Y) = 0$. Због тога, адитивност

$$\lambda_{X+Y} = \lambda_X + \lambda_Y$$

важи кадгод је $g(Y, PX)$ свуда ненула. За свако $p \in U$, услов $Y_p \perp PX_p$ се може искључити захваљујући непрекидности од $\lambda(p): T_p U \rightarrow \mathbb{R}$ датог са $\lambda(p)(X_p) = \lambda_X(p)$. Зато адитивност важи за све $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, што значи да λ јесте $\mathfrak{F}(U)$ -линеарно. Последишно, како $\lambda_E \in \mathfrak{F}(U)$ за јединично $E \in \mathfrak{X}(U)$, имамо $\lambda_X \in \mathfrak{F}(U)$ за свако $X \in \mathfrak{X}(U)$, те коначно важи $\lambda \in \mathfrak{T}_1^0(U) = \mathfrak{X}^*(U)$.

Са овим на уму, једнакост (9.20) постаје

$$g(PX, Y) \left(2g((\nabla_V P)Y, X) - g((\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V) \right) = 0.$$

Одавде

$$2g((\nabla_V P)Y, X) = g((\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V) \quad (9.22)$$

важи у случају да је $g(PX, Y)$ свуда ненула. Међутим, како је десна страна линеарна по Y и постоји покретан репер који се састоји од векторских поља која нису ортогонална на PX , једнакост (9.22) важи за све $X, Y, V \in \mathfrak{X}(U)$. Двоструком применом (9.22) имамо

$$4g((\nabla_V P)Y, X) = g((\nabla_V P)Y - (\nabla_Y P)V + \lambda_V PY - \lambda_Y PV, X) + 2g(-(\nabla_Y P)X + \lambda_X PY - \lambda_Y PX, V),$$

те је зато

$$2\lambda_X g(PY, V) = g(3(\nabla_V P)Y - (\nabla_Y P)V - \lambda_V PY - \lambda_Y PV, X),$$

што даје

$$2g(PY, X)\lambda^\sharp = 3(\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X - \lambda_X PY - \lambda_Y PX.$$

Са друге стране, из дефиниције за $\lambda \in \mathfrak{X}^*(U)$ имамо $(\nabla_X P)Y + (\nabla_Y P)X = \lambda_Y PX + \lambda_X PY$, те зато добијамо $g(X, PY)\lambda^\sharp = (\nabla_X P)Y - (\nabla_Y P)X$, што се може записати са

$$2(\nabla_X P)Y = g(X, PY)\lambda^\sharp + \lambda_Y PX + \lambda_X PY. \quad (9.23)$$

Сада када знамо ∇P , преостаје да израчунамо $\nabla^2 P$ и употребимо Ричијев идентитет за тензорско поље $P \in \mathfrak{T}_1^1(U)$. Из (9.23) имамо

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X \nabla_Y P)Z &= 2\nabla_X((\nabla_Y P)Z) - 2(\nabla_Y P)(\nabla_X Z) \\ &= \nabla_X(g(Y, PZ)\lambda^\sharp + \lambda_Z PY + \lambda_Y PZ) - (g(Y, P(\nabla_X Z))\lambda^\sharp + \lambda_{\nabla_X Z} PY + \lambda_Y P(\nabla_X Z)) \\ &= (g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, \nabla_X PZ))\lambda^\sharp + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp \\ &\quad + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Z))PY + \lambda_Z \nabla_X PY \\ &\quad + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ + \lambda_Y \nabla_X PZ \\ &\quad - g(Y, P(\nabla_X Z))\lambda^\sharp - \lambda_{\nabla_X Z} PY - \lambda_Y P(\nabla_X Z) \\ &= (g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, (\nabla_X P)Z))\lambda^\sharp + g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z)PY + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ \\ &\quad + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp + \lambda_Z \nabla_X PY + \lambda_Y (\nabla_X P)Z, \end{aligned}$$

те је зато

$$\begin{aligned} 2(\nabla_{X,Y}^2 P - \nabla_{Y,X}^2 P)Z &= 2(\nabla_X \nabla_Y P - \nabla_Y \nabla_X P - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} P)Z \\ &= (g(\nabla_X Y, PZ) + g(Y, (\nabla_X P)Z))\lambda^\sharp + g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z)PY + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) + g(\lambda^\sharp, \nabla_X Y))PZ \\ &\quad + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp + \lambda_Z \nabla_X PY + \lambda_Y (\nabla_X P)Z \\ &\quad - (g(\nabla_Y X, PZ) + g(X, (\nabla_Y P)Z))\lambda^\sharp - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, Z)PX - (g(\nabla_Y \lambda^\sharp, X) + g(\lambda^\sharp, \nabla_Y X))PZ \\ &\quad - g(X, PZ)\nabla_Y \lambda^\sharp - \lambda_Z \nabla_Y PX - \lambda_X (\nabla_Y P)Z \\ &\quad - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, PZ)\lambda^\sharp - \lambda_Z P(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \lambda_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} PZ, \\ &= (g(Y, (\nabla_X P)Z) - g(X, (\nabla_Y P)Z))\lambda^\sharp - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, Z)PX + g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z)PY \\ &\quad + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y \lambda^\sharp \\ &\quad + \lambda_Z (\nabla_X P)Y - \lambda_Z (\nabla_Y P)X + \lambda_Y (\nabla_X P)Z - \lambda_X (\nabla_Y P)Z. \end{aligned}$$

Поновном употребом (9.23) добијамо

$$\begin{aligned} 2(\nabla_{X,Y}^2 P - \nabla_{Y,X}^2 P)Z &= \lambda_Z g(Y, PX)\lambda^\sharp - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, Z)PX + g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z)PY \\ &\quad + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y \lambda^\sharp \\ &\quad + \lambda_Z g(X, PY)\lambda^\sharp + \frac{1}{2}(\lambda_Y g(X, PZ) - \lambda_X g(Y, PZ))\lambda^\sharp + \frac{1}{2}\lambda_Y \lambda_Z PX - \frac{1}{2}\lambda_X \lambda_Z PY \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_Y g(X, PZ) - \lambda_X g(Y, PZ))\lambda^\sharp + (\frac{1}{2}\lambda_Y \lambda_Z - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, Z))PX - (\frac{1}{2}\lambda_X \lambda_Z - g(\nabla_X \lambda^\sharp, Z))PY \\ &\quad + (g(\nabla_X \lambda^\sharp, Y) - g(\nabla_Y \lambda^\sharp, X))PZ + g(Y, PZ)\nabla_X \lambda^\sharp - g(X, PZ)\nabla_Y \lambda^\sharp. \end{aligned}$$

Да бисмо поједноставили нотацију уводимо нови оператор $Q \in \mathfrak{T}_1^1(U)$ дефинисан са $QX = \frac{1}{2}\lambda_X \lambda^\sharp - \nabla_X \lambda^\sharp$, те претходна једнакост постаје

$$\begin{aligned} 2(\nabla_{X,Y}^2 P - \nabla_{Y,X}^2 P)Z &= g(X, PZ)QY - g(Y, PZ)QX \\ &\quad + g(Z, QY)PX - g(Z, QX)PY + (g(QY, X) - g(QX, Y))PZ. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Са друге стране, за оператор кривине $\mathcal{R}$ из (9.16) имамо $\pm 3\mathcal{R} = -\mathcal{R}^P + 3\mu\mathcal{R}^1$, те је

$$\begin{aligned} \pm 3(\mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)) \\ = -\mathcal{R}^P(X, Y)PZ + 3\mu\mathcal{R}^1(X, Y)PZ + P(\mathcal{R}^P(X, Y)Z) - 3\mu P(\mathcal{R}^1(X, Y)Z) \\ = -g(PX, PZ)PY + g(PY, PZ)PX - 2g(PX, Y)P^2Z + 3\mu(g(Y, PZ)X - g(X, PZ)Y) \\ + g(PX, Z)P^2Y - g(PY, Z)P^2X + 2g(PX, Y)P^2Z - 3\mu(g(Y, Z)PX - g(X, Z)PY) \\ = -g(PX, PZ)PY + g(PY, PZ)PX + 3\mu g(Y, PZ)X - 3\mu g(X, PZ)Y \\ + g(PX, Z)P^2Y - g(PY, Z)P^2X - 3\mu g(Y, Z)PX + 3\mu g(X, Z)PY. \end{aligned}$$

Уводимо самоадјунговани оператор $S \in \mathfrak{T}_1^1(U)$ дефинисан са $SX = 3\mu X + P^2X$, те претходна једнакост постаје

$$\pm 3(\mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)) = g(PX, Z)SY - g(PY, Z)SX + g(SX, Z)PY - g(SY, Z)PX.$$

Ричијев идентитет (6.35), $((\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})P)Z = \mathcal{R}(X, Y)PZ - P(\mathcal{R}(X, Y)Z)$, важи за све $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, што употребом (9.24) доноси

$$\begin{aligned} g(X, PZ)QY - g(Y, PZ)QX + g(Z, QY)PX - g(Z, QX)PY + (g(QY, X) - g(QX, Y))PZ \\ = \pm \frac{2}{3} (g(PX, Z)SY - g(PY, Z)SX + g(SX, Z)PY - g(SY, Z)PX). \end{aligned}$$

Захвално је увести још један оператор $K = Q \pm \frac{2}{3}S \in \mathfrak{T}_1^1(U)$, односно такав да

$$KX = \frac{1}{2}\lambda_X\lambda^\sharp - \nabla_X\lambda^\sharp \pm \frac{2}{3}(3\mu X + P^2X)$$

важи за $X \in \mathfrak{X}(U)$, те претходна једнакост постаје

$$g(X, PZ)KY - g(Y, PZ)KX + g(Z, KY)PX - g(Z, KX)PY + (g(KY, X) - g(KX, Y))PZ = 0.$$

Специјални случај $Z = Y$ повлачи

$$g(X, PY)KY + g(Y, KY)PX + (g(KY, X) - 2g(KX, Y))PY = 0, \quad (9.25)$$

што важи за свако $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. За произвољно свуда ненула $Y \in \mathfrak{X}(U)$ можемо изабрати свуда ненула $X \in \text{Span}\{Y, PY\}^\perp$. У овом случају $X \perp PY$ даје

$$g(Y, KY)PX + (g(KY, X) - 2g(KX, Y))PY = 0,$$

али како су X и Y линеарно независни као међусобно ортогонални, то су PX и PY линеарно независни, што повлачи $g(Y, KY) = 0$.

Одавде $KY \perp Y$ важи за све $Y \in \mathfrak{X}(U)$, те поларизација даје $g(KX, Y) + g(KY, X) = 0$ и доказује да је K такође косоадјунгован. Са тим на уму, једнакост (9.25) постаје

$$g(X, PY)KY + 3g(KY, X)PY = 0,$$

и важи за све $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Заменом $X = PY$ за свуда ненула $Y \in \mathfrak{X}(U)$, добијамо $KY \propto PY$, док узимањем унутрашњег производа са PY добијамо $4\varepsilon_{PY}g(KY, PY) = 0$, те је $K = 0$. Одавде извире важна формула

$$\nabla_X\lambda^\sharp = \frac{1}{2}\lambda_X\lambda^\sharp \pm \frac{2}{3}(3\mu X + P^2X). \quad (9.26)$$

За свако $X, Z \in \mathfrak{X}(U)$, користимо (9.23) да израчунамо

$$\begin{aligned} \nabla_X(\varepsilon_{PZ}) &= \nabla_X g(PZ, PZ) = 2g(\nabla_X(PZ), PZ) = 2g((\nabla_X P)Z + P\nabla_X Z, PZ) \\ &= g(X, PZ)\lambda_{PZ} + g(PX, PZ)\lambda_Z + g(PZ, PZ)\lambda_X - 2g(\nabla_X Z, P^2Z). \end{aligned}$$

Са друге стране имамо $\nabla_X(\varepsilon_{PZ}) = \nabla_X(v_Z \varepsilon_Z) = v_Z \nabla_X \varepsilon_Z + \varepsilon_Z \nabla_X v_Z$, што даје

$$v_Z \nabla_X \varepsilon_Z + \varepsilon_Z \nabla_X v_Z = g(X, PZ) \lambda_{PZ} - g(X, P^2 Z) \lambda_Z + \varepsilon_{PZ} \lambda_X - 2g(\nabla_X Z, P^2 Z).$$

Размотримо сопствене просторе од P^2 , дефинисане са

$$\mathcal{P}_j = \text{Ker}(P^2 + v_j \mathbb{1}) = \bigoplus_{v_i=v_j} \text{Span}\{E_i, F_i\}.$$

Ако $Z \in \mathcal{P}_j$ важи за неко $1 \leq j \leq n/2$, тада је $-2g(\nabla_X Z, P^2 Z) = 2v_j g(\nabla_X Z, Z) = v_j \nabla_X \varepsilon_Z$, што повлачи

$$\varepsilon_Z \nabla_X v_j = g(X, PZ) \lambda_{PZ} + v_j g(X, Z) \lambda_Z + v_j \varepsilon_Z \lambda_X.$$

Тако добијамо

$$d(\ln v_j)(X) = \frac{\nabla_X v_j}{v_j} = \begin{cases} 2\lambda_X & \text{for } X \in \text{Span}\{Z, PZ\} \\ \lambda_X & \text{for } X \in \text{Span}\{Z, PZ\}^\perp \end{cases}, \quad (9.27)$$

кадгод је $Z \in \mathcal{P}_j$, те имамо

$$\lambda = \frac{2}{n+2} \sum_{i=1}^{n/2} d(\ln v_i) = \frac{2}{n+2} d(\ln(v_1 v_2 \cdots v_{n/2})). \quad (9.28)$$

Једначина (9.28) показује да λ не може бити било какво ковекторско поље, већ барем оно које је диференцијал глатке функције. Штавише, употребом (9.26) имамо неопходан услов,

$$\nabla_X \text{grad}(\ln(v_1 v_2 \cdots v_{n/2})) = \frac{1}{2} \lambda_X \text{grad}(\ln(v_1 v_2 \cdots v_{n/2})) \pm \frac{n+2}{3} (3\mu X + P^2 X),$$

који важи за све $X \in \mathfrak{X}(U)$. То коначно доказује наредну теорему коју је поставио Андрејић 2023. године [10, Теорема 5].

Теорема 9.10. *Два-корена Риманова многострукости димензије $n \equiv 2 \pmod{4}$ локално има тензор кривине облика (9.16), за константу μ и неки косоајунгован линеарни оператор P дефинисан са (9.17) уз коришћење позитивних линеарних функција $v_1, \dots, v_{n/2}$. Додатно важе једначине (9.23), (9.26), (9.27) и (9.28).*

Најприроднији случај има $\lambda = 0$, где једначина (9.23) повлачи $\nabla P = 0$, те (9.18) даје $\nabla R^P = 0$, и последично $\nabla R = 0$, што значи да је M локално симетричан. Штавише, једначина (9.26) за $\lambda = 0$ повлачи $P^2 = -3\mu \mathbb{1}$, што даје $v = 3\mu$, и последично је M глобално Осерманова, где редукован Јакобијев оператор $\tilde{J}_X$ има просту сопствену вредност $4\varepsilon_X \mu$, док је друга сопствена вредност (вишеструкости $n-2$) четири пута мања. Зато, повезана два-корена Риманова многострукост димензије $n \geq 3$ са $n \equiv 2 \pmod{4}$ која има $\lambda = 0$ јесте глобално Осерманова и одатле две-тачке хомогена.

Напоменимо да ако $\nabla v_j = 0$ важи за неко $1 \leq j \leq n/2$, онда је $\lambda = 0$, и важи претходни закључак. Питање да ли постоји два-корена Риманова многострукост димензије два пута непар која није Осерманова остаје отворено и захтева конструкцију конкретне многострукости са $\lambda \neq 0$. Први покушај може бити $\lambda^\sharp = E_k$ за неко $1 \leq k \leq n/2$, где (9.27) доноси $d(\ln v_k) = 2\lambda = 2d(\ln v_i)$ за све $i \neq k$, те постоје константе C_i такве да је $v_k = C_i v_i^2$.

А.1 Теорија скупова

Да бисмо избегли потенцијалне двосмислености поставимо нотацију за стандардне скупове које користимо кроз ову књигу. Скуп свих природних бројева (без нуле) означавамо са $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, док нам је $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Скуп целих бројева је $\mathbb{Z}$, скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$, скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, а скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$.

Скуп је **пребројив** ако постоји инјективно пресликавање из њега у скуп природних бројева $\mathbb{N}$. Другим речима, сваком елементу скупа може се доделити јединствен природан број, те или је скуп коначан или постоји бијективно пресликавање између њега и $\mathbb{N}$. Уколико желимо да нагласимо да пребројив скуп није коначан, кажемо да је **пребројиво бесконачан**. Напоменимо да постоје аутори који уместо нашег пребројив користе термин највише пребројив, док реч пребројив користе само ако скуп није коначан. У сваком случају, ми сматрамо да коначан скуп јесте пребројив.

Наведимо неке основне чињенице о пребројивим скуповима. Скупови $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ јесу пребројиви, док $\mathbb{R}$ није пребројив. Сваки подскуп пребројивог скупа је пребројив. Производ два пребројива скупа је пребројив. Пребројива унија пребројивих скупова је пребројива.

Наредна лема нам говори како се пресликавање између скупова понаша у односу на скуповне операције.

Лема А.1. *Слика уније подскупова при произвољном пресликавању једнака је унији њихових слика. Слика пресека подскупова при инјективном пресликавању једнака је пресеку њихових слика.*

Доказ. Нека су X и Y произвољни скупови, $A_\alpha \subseteq X$ за свако $\alpha \in \Lambda$, а $f: X \rightarrow Y$ пресликавање. Из $A_\beta \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$ је $f(A_\beta) \subseteq f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те $\bigcup_\alpha f(A_\alpha) \subseteq f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$. Са друге стране, за $x \in f(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ постоји $y \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ тако да је $f(y) = x$, те постоји $\beta \in \Lambda$ тако да је $y \in A_\beta$, одакле је $x = f(y) \in f(A_\beta) \subseteq \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$, што даје $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$ и доказује

$$f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha). \quad (\text{A.1})$$

Из $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_\beta$ је $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subseteq f(A_\beta)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$. Са друге стране, за $x \in \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$ је $x \in f(A_\beta)$ за свако $\beta \in \Lambda$, те уз услов да је f инјективно имамо $f^{-1}(x) \in A_\beta$ за свако $\beta \in \Lambda$ и зато $x \in f(\bigcap_\alpha A_\alpha)$, што даје $\bigcap_\alpha f(A_\alpha) \subseteq f(\bigcap_\alpha A_\alpha)$ и доказује

$$f\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha). \quad (\text{A.2})$$

Напоменимо да формула (A.2) не мора да важи ако f није инјективно, на пример за константно f и дисјунктне A_α . □

А.2 Топологија

Ова књига написана је за читаоце који већ имају солидно разумевање основне топологије, а као подсетник могу послужити Ли [80] и Крајник¹ [40]. У овој секцији дајемо основне идеје из топологије које смо користили кроз ову књигу.

Топологија на скупу X је фамилија $\mathcal{T}$ подскупова од X таква да је $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, док су произвољна унија елемената из $\mathcal{T}$, као и коначан пресек елемената из $\mathcal{T}$ такође у $\mathcal{T}$. Елементи топологије су **отворени подскупови**, док је подскуп $A \subseteq X$ **затворен** ако је његов комплемент $X \setminus A$ отворен. **Тополошки простор** је уређен пар $(X, \mathcal{T})$ који се састоји од скупа X опремљеног топологијом $\mathcal{T}$ на X , али кад се топологија подразумева уобичајено је да за X кажемо да је тополошки простор.

За дато $x \in X$, **околина** од x је сваки отворен подскуп $U \subseteq X$ такав да $x \in U$. Многи аутори користе појам околина у ширем смислу, да означе произвољан подскуп који садржи отворен подскуп око x . За такве подскупове који нису нужно отворени, користимо појам **уошћена околина** од x . Међутим, у овој књизи се околина увек сматра отвореним скупом.

Пример А.1. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subset X$. **Релативна топологија** је топологија $\mathcal{T}_A$ на скупу A задата са $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$. $\triangle$

Пример А.2. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор, а $q: X \rightarrow Y$ сурјективно пресликавање. **Количничка топологија** је топологија $\mathcal{T}_q = \{V \subseteq Y : q^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ задата на скупу Y . Често је сурјекција q природна пројекција која елементе из X шаље у њихове класе еквиваленције за неку релацију еквиваленције на X . $\triangle$

За пресликавање $f: X \rightarrow Y$ између тополошких простора кажемо да је **непрекидно** ако је инверзна слика $f^{-1}(U) \subseteq X$ отворена за сваки отворен $U \subseteq Y$. Бијективно пресликавање $f: X \rightarrow Y$ такво да су и f и f^{-1} непрекидна зовемо **хомеоморфизам**. Уколико постоји хомеоморфизам из X у Y онда кажемо да су X и Y **хомеоморфни**.

Унија свих отворених подскупова који су подскуп скупа A зовемо **унутрашњост** скупа A и обележавамо са $\text{Int } A$. Пресек свих затворених подскупова који су надскуп скупа A зовемо **затворење** скупа A и обележавамо са $\bar{A}$. **Граница** скупа A је скуп $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int } A$. За тачку $x \in A$ кажемо да је **изолована тачка** од A ако x има околинину U такву да је $U \cap A = \{x\}$.

За низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тачака тополошког простора X кажемо да **конвертира** ка $x \in X$ ако за сваку околинину U од x постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да је $x_n \in U$ за свако $n \geq N$, а тада пишемо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

За тополошки простор X кажемо да је **Хаусдорфов простор** ако за сваки пар различитих тачака $p, q \in X$ постоје отворени подскупови $U, V \subseteq X$ са $p \in U$ и $q \in V$ тако да је $U \cap V = \emptyset$. Другим речима, тополошки простор је Хаусдорфов, ако се сваке две различите тачке могу раздвојити њиховим дисјунктним околинама. Тополошки простор X је **регуларан простор** ако се за свако $x \in X$ и сваки затворен подскуп $C \not\ni x$, тачка x и скуп C могу раздвојити дисјунктним околинама. Простор је **нормалан** ако се свака два дисјунктна затворена подскупа од X могу раздвојити дисјунктним околинама.

Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. **База топологије** је фамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ таква да је свако $U \in \mathcal{T}$ унија неких елемената из $\mathcal{B}$. **Локална база** у $x \in X$ је фамилија $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ околина од x таква да свака околина од x садржи барем један елемент из $\mathcal{B}_x$. Неки аутори дозвољавају да елементи локалне базе не буду отворени скупови, те ће **уошћена локална база** у $x \in X$ бити фамилија уопштених околина од x таква да свака околина од x садржи барем један елемент те фамилије. За тополошки

¹Marius Crainic (1974), румунско-холандски математичар

простор кажемо да задовољава **прву аксиому пребројивости** ако свака тачка простора има пребројиву базу, а задовољава **другу аксиому пребројивости** ако има пребројиву базу топологије.

Две најчешће изучаване тополошке особине кроз историју топологије су свакако повезаност и компактност. За тополошки простор кажемо да је **повезан** уколико се не може изразити као унија два дисјунктна непразна отворена подскупа. Тополошки простор је **ујутно повезан** ако су сваке две тачке повезане путем (за свако $x, y \in X$ постоји непрекидно пресликавање $f: [0, 1] \rightarrow X$ такво да је $f(0) = x$ и $f(1) = y$). За подскуп тополошког простора кажемо да је **повезан** или **ујутно повезан** ако има те особине у односу на релативну топологију. Повезаност је инваријанта непрекидног пресликавања, а сваки путно повезан тополошки простор је повезан.

Грубо говорећи, кажемо да је тополошко својство локално задовољено ако свака мала област простора личи на област простора у којем то својство важи. Конкретније, ако је X тополошки простор, а P придев који се може применити на просторе, онда „ X је **локално P** “ често значи да за свако $x \in X$ и сваку околину $U \ni x$ постоји подскуп $A \subseteq U$ који задовољава особину P и садржи околину од x . Другим речима, тополошки простор је локално P ако и само ако свака тачка има уопштену локалну базу која се састоји од скупова са особином P .

Тополошки простор је **локално повезан** ако свака тачка има локалну базу која се састоји од повезаних околних. Како унија локалних база по свим тачкама чини базу топологије, а свака база топологије садржи локалну базу за сваку од тачака, то је тополошки простор локално повезан ако и само ако има базу која се састоји од повезаних скупова. Сасвим слично, тополошки простор је **локално ујутно повезан** ако има базу од путно повезаних скупова.

Компонентна повезаност тополошког простора је његов максималан повезан подскуп. Свака тачка тополошког простора X припада некој његовој компоненти повезаности, а компоненте повезаности су дисјунктне и затворене у X . Ако је тополошки простор локално повезан, онда су све компоненте повезаности отворене, одакле следи да је он простор дисјунктне уније његових компоненти повезаности, што у општем случају није тачно.

Пример А.3. Повезан простор који није локално повезан ни путно повезан може се пронаћи чак и као подскуп еуклидске равни, а класични примери су тополошка синусоида (график функције $\sin(1/x)$ за $x \in (0, 1]$ заједно са дужи $\{0\} \times [-1, 1]$) и бесконачна метла (унија дужи које спајају координатни почетак са тачкама $(1, 1/n)$ за $n \in \mathbb{N}$ заједно са дужи $[1/2, 1] \times \{0\}$). $\triangle$

Покривач неког скупа је фамилија скупова чија унија садржи тај скуп као подскуп, а уколико су сви елементи те фамилије отворени, онда је то **отворен покривач**. **Потпокривач** неког покривача је његова потфамилија која је такође покривач. За тополошки простор или неки његов подскуп кажемо да је **компактан** ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач. За подскуп кажемо да је **релативно компактан** уколико је његово затворење компактно.

Сваки затворен подскуп компактног простора је компактан, док је сваки компактан подскуп Хаусдорфовог простора затворен. Компактност је инваријанта непрекидног пресликавања, а важи и наредна лема.

Лема А.2. Ако је $f: M \rightarrow N$ непрекидно пресликавање између компактних простора M и Хаусдорфове N , онда је f затворено.

Доказ. Сваки затворен подскуп $X \subseteq M$ компактног скупа је компактан, те је $f(X) \subseteq N$ компактан и зато затворен. $\square$

Структура компактных подскупова еуклидског простора је добро схваћена кроз **Хајне²–Борел³ теорему**.

Теорема А.3. *Подскупи од $\mathbb{R}^n$ је компактни ако и само ако је затворен и ограничен.*

Тополошки простор је **локално компактни** ако свака тачка има уопштenu локалну базу која се састоји од компактных скупова. Уколико је простор Хаусдорфов (што је готово увек случај) може се показати да је он локално компактан ако и само ако свака тачка има локалну базу која се састоји од релативно компактных скупова. Међутим, испоставља се да је Хаусдорфов простор локално компактан ако и само ако свака његова тачка има компактну уопштenu околину, што је и најчешће коришћена дефиниција. Наравно, сваки компактан Хаусдорфов простор је локално компактан.

Занимљива је **Теорема о инваријантности домена**, што је дубок резултат који је 1911. поставио Браувер⁴ [28], а дајемо га без доказа.

Теорема А.4. *Ако је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен за неко $n \in \mathbb{N}$ и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрекидно и инјективно, онда је $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен.*

Другим речима, свако непрекидно инјективно пресликавање између еуклидских простора истих димензија је отворено пресликавање. Важна последица инваријантности домена је **Теорема о инваријантности димензије**.

Теорема А.5. *Непразан подскуп од $\mathbb{R}^m$ није хомеоморфан отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$ осим за $m = n$.*

Доказ. Нека је отворен $U \subseteq \mathbb{R}^m$ хомеоморфан са $V \subseteq \mathbb{R}^n$ при хомеоморфизму $f: U \rightarrow V$. Не умањујући општост можемо претпоставити да је $n \leq m$ (иначе посматрамо f^{-1}), те постоји линеарна инклузија $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Пресликавање $\iota \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ је непрекидно и инјективно, те је по Теорему А.4 $\iota(f(U))$ отворен. Међутим, то је немогуће за $n < m$ јер слика инклузије лежи у хиперравни, а свака околина тачке хиперравни садржи тачке које нису у хиперравни, те преостаје $m = n$. $\square$

А.3 Сопствена структура ендоморфизама

У овој секцији понављамо нека знања из линеарне алгебре и дискутујемо алгебарске и аналитичке аспекте који су повезани са сопственом структуром ендоморфизама векторског простора. Основна литература може бити књига коју су написали Фридберг⁵, Инсел⁶ и Спенс⁷ [54].

Нека је V векторски простор димензије $n \in \mathbb{N}$ над пољем $\mathbb{F}$, где нас највише занимају случајеви $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. **Ендоморфизам** векторског простора V је линеарно пресликавање $A: V \rightarrow V$, а скуп свих ендоморфизама од V обележавамо са $\text{End}(V)$.

Сопствени вектор од $A \in \text{End}(V)$ је ненула вектор који не мења правац након што на њега применимо A . Тада ендоморфизам A само скалира X за неко $\lambda \in \mathbb{F}$ које зовемо **сопствена вредност** од A , што можемо записати са $AX = \lambda X$ уз $X \neq 0$. Скуп свих сопствених вектора од A за вредност λ , заједно са нула вектором, зовемо **сопствени простор** $\mathcal{E}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) \leq V$.

²Heinrich Eduard Heine (1821–1881), немачки математичар

³Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), француски математичар и политичар

⁴Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), холандски математичар и филозоф

⁵Stephen Howard Friedberg, амерички математичар

⁶Arnold Joseph Insel (1940), амерички математичар

⁷Lawrence Edward Spence (1946), амерички математичар

У присуству неке базе $e = (E_1, \dots, E_n)$ за $\mathcal{V}$, свако $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ се идентификује са матрицом $[A]_e \in \mathbb{F}^{n \times n}$ за коју важи $A(E_j) = \sum_{i=1}^n ([A]_e)_{ij} E_i$ за свако $1 \leq j \leq n$. Ако је X сопствени вектор од A за сопствену вредност λ , онда важи $(\lambda \mathbb{1} - A)X = 0$, те матрица $[\lambda \mathbb{1} - A]_e = \lambda \mathbb{1} - [A]_e$ не може бити инвертибилна јер би донела јединствено решење $X = 0$, што повлачи $\det(\lambda \mathbb{1} - [A]_e) = 0$. Обратно, ако је $\det(\lambda \mathbb{1} - [A]_e) = 0$ једначина $(\lambda \mathbb{1} - A)X = 0$ има бесконачно много решења (јер је $X = 0$ свакако решење), те постоји сопствени вектор за који је λ сопствена вредност.

Полином $\omega_A(x) = \det(x \mathbb{1} - A) = \det(x \mathbb{1} - [A]_e)$ не зависи од избора базе e , и зовемо га **карактеристични полином** од A , а сопствене вредности ендоморфизма A су тачно корени полинома ω_A . Карактеристични полином је степена n , те број различитих сопствених вредности не може бити већи од димензије простора.

Вишеструкоост (или **алгебарска вишеструкоост**) сопствене вредности λ ендоморфизма $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ је највеће $r \in \mathbb{N}$ за које полином $(x - \lambda)^r$ дели $\omega_A(x)$, док је њена **геометријска вишеструкоост** једнака $s = \dim \mathcal{E}_\lambda$. Ако базу за $\mathcal{E}_\lambda$ продужимо до базе e за $\mathcal{V}$, онда је $[A]_e$ горње троугаона блок матрица, одакле се види да полином $(\lambda - x)^s$ дели $\omega_A(x)$, што значи да геометријска вишеструкоост сопствене вредности није већа од њене алгебарске вишеструкоости, а свакако је барем 1.

За ендоморфизам $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ кажемо да је **дијагонализабилан** ако постоји база e за $\mathcal{V}$ таква да је матрица $[A]_e$ дијагонална. Ако неки сопствени вектори од A чине базу за $\mathcal{V}$, за ту базу кажемо да је **сопствена база**, а A је дијагонализабилан ако и само ако $\mathcal{V}$ има сопствену базу у односу на A . За полином из $\mathbb{F}[x]$ кажемо да је **растављив** (над $\mathbb{F}$) ако се може факторисати на линеарне факторе, односно ако су му сви корени у $\mathbb{F}$. Карактеристични полином дијагонализабилног ендоморфизма је очигледно растављив.

Лема А.6. *Сопствени вектори ендоморфизма векторског простора који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни.*

Доказ. Нека је $r \in \mathbb{N}$ минималан број линеарно зависних вектора који одговарају различитим сопственим вредностима од $A \in \text{End}(\mathcal{V})$, а $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_r X_r = 0$ важи за неке $X_i \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$ са $AX_i = \lambda_i X_i$ за $1 \leq i \leq r$, где су $\lambda_i \in \mathbb{F}$ различити. Тада је $\alpha_1 AX_1 + \dots + \alpha_r AX_r = 0$, те имамо $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1)X_r = 0$. Како је r минимално, $X_2, \dots, X_r$ су линеарно независни, те је $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = \alpha_r(\lambda_r - \lambda_1) = 0$. Одавде добијамо $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$, а затим из $\alpha_1 X_1 = 0$ следи и $\alpha_1 = 0$, те су $X_1, \dots, X_r$ линеарно независни, што је супротно претпоставци и доказује тврђење. $\square$

Као последица претходне леме, може се показати да важи $\mathcal{E}_\mu \cap \sum_{\lambda \neq \mu} \mathcal{E}_\lambda = \{0\}$, што значи да сопствени простори чине директну суму $\bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda \leq \mathcal{V}$. Напоменимо да ознака $\bigoplus_\lambda$ формално представља директну суму по свим скаларима $\lambda \in \mathbb{F}$, али ако λ није сопствена вредност по дефиницији је $\mathcal{E}_\lambda = \{0\}$, те суштински имамо директну суму по сопственим вредностима λ . Једнакост $\bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{V}$ се достиже ако и само ако је A дијагонализабилан, те је у случају дијагонализабилног A геометријска вишеструкоост једнака алгебарској за сваку сопствену вредност од A .

За $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ кажемо да је **A -инваријантан** потпростор од $\mathcal{V}$ за $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ ако важи $A(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$, односно ако $A(X) \in \mathcal{W}$ за свако $X \in \mathcal{W}$. У том случају је $A|_{\mathcal{W}} \in \text{End}(\mathcal{W})$, а ако базу за $\mathcal{W}$ допунимо до базе e за $\mathcal{V}$ онда је $[A]_e$ горње троугаона блок матрица, одакле се види да полином $\omega_{A|_{\mathcal{W}}}(x)$ дели $\omega_A(x)$.

Лема А.7. *Карактеристични полином рескрипције ендоморфизма A коначнодимензионог векторског простора на A -инваријантан потпростор дели карактеристични полином од A .*

Основни пример A -инваријантног потпростора од $\mathcal{V}$ за $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ је **A -циклични** потпростор $\mathcal{C}_X = \text{Span} \bigcup_{r \in \mathbb{N}_0} \{A^r(X)\}$ генерисан ненула вектором $X \in \mathcal{V}$, што је најмањи

A -инваријантан потпростор од $\mathcal{V}$ који садржи X . Ако је $m \in \mathbb{N}$ највеће такво да је скуп $\bigcup_{r=0}^{m-1} \{A^r(X)\}$ линеарно независан ($m \leq n$), онда је $\text{Span} \bigcup_{r=0}^{m-1} \{A^r(X)\}$ A -инваријантан и једнак са $\mathcal{C}_X$. Тада је $e = (X, A(X), \dots, A^{m-1}(X))$ база за $\mathcal{W} = \mathcal{C}_X$ и имамо $\dim \mathcal{C}_X = m$. Ако за $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{F}$ важи

$$\alpha_0 X + \alpha_1 A(X) + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1}(X) + A^m(X) = 0,$$

онда је матрица рестрикованог ендоморфизма A у нашој бази једнака

$$[A|_{\mathcal{W}}]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix},$$

те добијамо карактеристични полином $\omega_{A|_{\mathcal{W}}}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m$.

Одавде је $(\omega_{A|_{\mathcal{W}}}(A))(X) = (\alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} + A^m)(X) = 0$, а како по Леми А.7 полином $\omega_{A|_{\mathcal{W}}}(x)$ дели $\omega_A(x)$, то је и $(\omega_A(A))(X) = 0$ за свако $X \neq 0$. Наравно, $\omega_A(A)$ је линеарно те је $(\omega_A(A))(0) = 0$ и комплетира једнакост $\omega_A(A) = 0$ што је познато као **Кејли–Хамилтон теорема**.

Теорема А.8. *Ендоморфизам коначнодимензионог векторског простора поништава свој карактеристични полином.*

Сваки ендоморфизам $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ поништава свој карактеристични полином, те постоји моничан полином $\mu_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ најмањег природног степена који има то својство, $\mu_A(A) = 0$. Такав полином μ_A је јединствен и зовемо га **минимални полином**, а јасно је да он мора да дели полином ω_A . Ако је $p(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^j \in \mathbb{F}[x]$ такав да је $p(A) = 0$, онда имамо

$$p(x) \mathbb{1} = p(x) \mathbb{1} - p(A) = \sum_{j=0}^m \alpha_j ((x \mathbb{1})^j - A^j) = (x \mathbb{1} - A) \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{k=1}^j x^{j-k} A^{k-1},$$

одакле следи да $\omega_A(x) = \det(x \mathbb{1} - A)$ дели полином $\det(p(x) \mathbb{1}) = (p(x))^n$, где је $n = \dim \mathcal{V}$, што доказује наредну лему која посебно важи и за минимални полином.

Лема А.9. *Ако ендоморфизам поништава неки полином, онда тај полином за факторе има све иредуцибилне факторе карактеристичног полинома.*

Основна идеја је раставити $\mathcal{V}$ на директну суму A -инваријантних потпростора јер се понашање ендоморфизма A на $\mathcal{V}$ може закључити из његовог понашања на појединачним потпросторима. Ако је $\mathcal{V} = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{W}_k$, где су $\mathcal{W}_k \leq \mathcal{V}$ A -инваријантни за $1 \leq k \leq m$, онда од појединачних база можемо направити базу за $\mathcal{V}$ у односу на коју A има блок дијагоналну матрицу, те је карактеристични полином од A једнак производу карактеристичних полинома појединачних рестрикција,

$$\omega_A(x) = \prod_{k=1}^m \omega_{A|_{\mathcal{W}_k}}(x).$$

Нека је A ендоморфизам n -димензионог векторског простора $\mathcal{V}$ над пољем $\mathbb{F}$. Нула вектор $X \in \mathcal{V}$ за који постоји $r \in \mathbb{N}$ такво да је $(A - \lambda \mathbb{1})^r(X) = 0$ зовемо **уопштени сојствени вектор** од A за $\lambda \in \mathbb{F}$. Скуп свих уопштених сопствених вектора од A за вредност λ у пакету са нула вектором обележавамо са $\mathcal{V}_\lambda$ и зовемо **уопштени сојствени простор**, а лако је проверити да је он векторски потпростор од $\mathcal{V}$. Ради једноставнијег записа, за $\lambda \in \mathbb{F}$ дефинишемо $A_\lambda = A - \lambda \mathbb{1} \in \text{End}(\mathcal{V})$.

Ако је $d < n$ вишеструкост сопствене вредности λ , то постоје $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ и $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$ тако да је $\omega_A(x) = (x - \lambda)^d(p(x)(x - \lambda) + \mu)$. По Кејли–Хамилтон теореме (Теорема А.8) имамо $0 = \omega_A(A) = p(A)(A_\lambda)^{d+1} + \mu(A_\lambda)^d$, одакле следи $(A_\lambda)^d = -(1/\mu)p(A)(A_\lambda)^{d+1}$, те ако је $(A_\lambda)^r X = 0$ за $r > d$, онда је и $(A_\lambda)^d X = 0$, што по Теореме А.8 важи и за $d = n$. Зато је $\mathcal{V}_\lambda = \text{Ker}(A_\lambda)^d$, а како је $d \leq n$ увек можемо написати $\mathcal{V}_\lambda = \text{Ker}(A_\lambda)^n$.

За полиноме $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ важи $p(A)q(A) = q(A)p(A)$, а примена за $q(A) = (A_\lambda)^d$ доноси $p(A)(\mathcal{V}_\lambda) \subseteq \mathcal{V}_\lambda$, што значи да сваки уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ јесте $p(A)$ -инваријантан, те и A -инваријантан. Штавише, ако полином $p(x)$ није дељив са $x - \lambda$, онда је рестрикција од $p(A)$ на $\mathcal{V}_\lambda$ инјективна. Претпоставка $X \in \mathcal{V}_\lambda \cap \text{Ker } p(A)$ даје минимално $0 \leq r \leq d$ такво да је $(A_\lambda)^r X = 0$ као и $0 = p(A)(X) = q(A)A_\lambda X + \mu X$ за неко $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ и $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$, одакле за $r \geq 1$ важи $q(A)(A_\lambda)^r X + \mu(A_\lambda)^{r-1} X = 0$, те r није минимално због $(A_\lambda)^{r-1} X = 0$ и преостаје $r = 0$, односно $X = 0$. Зато је $p(A)|_{\mathcal{V}_\lambda}$ аутоморфизам потпростора $\mathcal{V}_\lambda$ кад $p(x)$ није дељив са $x - \lambda$, што посебно важи за A_μ у случају $\mu \neq \lambda$.

Лема А.10. Нека је A ендоморфизам коначнодимензионој векторској простору $\mathcal{V}$ над пољем $\mathbb{F}$, λ његова сопствена вредност, а $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ произвољан полином. Уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ је $p(A)$ -инваријантан, а ако полином $x - \lambda$ не дели $p(x)$ онда је рестрикција од $p(A)|_{\mathcal{V}_\lambda}$ аутоморфизам потпростора $\mathcal{V}_\lambda$.

По Теореме о рангу и дефекту за $(A_\lambda)^d \in \text{End}(\mathcal{V})$, A -инваријантни потпростори $\text{Ker}(A_\lambda)^d = \mathcal{V}_\lambda$ и $\text{Im}(A_\lambda)^d = (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$ су комплементарни, те је $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\lambda \oplus (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$. За $X = (A_\lambda)^d(Y)$ из $A_\lambda(X) = 0$ следи $Y \in \mathcal{V}_\lambda$ и $X = 0$, те не постоји $X \in (A_\lambda)^d(\mathcal{V})$ које је сопствени вектор од A за λ , што значи да λ није сопствена вредност рестрикције од A на $(A_\lambda)^d(\mathcal{V})$. Како $A|_{\mathcal{V}_\lambda}$ поништава полином $(x - \lambda)^d$, његов карактеристични полином по Лему А.9 нема других иредуцибилних фактора осим $x - \lambda$, те мора бити баш $(x - \lambda)^d$.

Лема А.11. Ако је d вишеструкост сопствене вредности λ за ендоморфизам A коначнодимензионој векторској простору $\mathcal{V}$, онда је $\dim \mathcal{V}_\lambda = d$ и $(x - \lambda)^d$ је карактеристични полином рестрикције $A|_{\mathcal{V}_\lambda}$.

Ако је $X \in \mathcal{V}_\lambda \cap \sum_{\mu \neq \lambda} \mathcal{V}_\mu$, то је $(A_\lambda)^n(X) = 0$, а како је A_λ по Лему А.10 аутоморфизам на $\mathcal{V}_\mu$ за $\mu \neq \lambda$ то је $(A_\lambda)^n$ аутоморфизам на $\sum_{\mu \neq \lambda} \mathcal{V}_\mu \ni X$, одакле следи $X = 0$. Зато уопштени сопствени простори чине директну суму $\bigoplus_\lambda \mathcal{V}_\lambda \leq \mathcal{V}$, што уопштава Лему А.6. Ако је карактеристични полином ω_A растављив, онда је збир вишеструкости сопствених вредности једнак n и добијамо $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \mathcal{V}_\lambda$.

Теорема А.12. Ако ендоморфизам A коначнодимензионој векторској простору $\mathcal{V}$ има растављив карактеристични полином, онда се $\mathcal{V}$ раставља на директну суму уопштених сопствених простора у односу на A .

Размотримо како се ендоморфизам A понаша на уопштеном сопственом простору $\mathcal{V}_\lambda$. За фиксирану сопствену вредност λ поставимо $\mathcal{W} = \mathcal{V}_\lambda$ и $B = A_\lambda|_{\mathcal{W}} \in \text{End}(\mathcal{W})$. Из Леме А.11 је $B^d = 0$ за $d = \dim \mathcal{W}$, одакле следи да за свако $0 \neq Y \in \mathcal{W}$ постоји најмање $r(Y) \in \mathbb{N}$ такво да је $B^{r(Y)}Y = 0$, те са $f(Y) = B^{r(Y)-1}Y \neq 0$ и $f(0) = 0$ дефинишемо пресликавање $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda = \text{Ker } B$ које сваком уопштеном сопственом вектору за сопствену вредност λ додељује сопствени вектор за λ .

За свако ненула $X \in \mathcal{E}_\lambda$ уводимо непразан скуп $\mathcal{U}_X = \{Y \in \mathcal{W} : B^{r(Y)-1}Y = X\}$, одакле произвољно ненула $Y \in \mathcal{U}_X$ за које је $s = r(Y)$ даје B -циклични потпростор $\mathcal{C}_Y = \text{Span} \bigcup_{k=0}^{s-1} \{B^k(Y)\} \leq \mathcal{W}$ са особином $f(\mathcal{C}_Y) = \text{Span}\{X\}$. Циклус $(B^{s-1}Y, \dots, B^2Y, BY, Y)$ је канонска база за $\mathcal{C}_Y$, а у односу на њу матрица ендоморфизма $A|_{\mathcal{C}_Y} = A_\lambda|_{\mathcal{C}_Y} + \lambda \mathbb{1}_{\mathcal{C}_Y} =$

$B|_{C_Y} + \lambda 1_{C_Y}$ има облик

$$\mathcal{J}_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{s \times s}, \quad (\text{A.3})$$

за који кажемо да је (стандардни) **Жорданов блок** или **Жорданова матрица** реда s за вредност $\lambda \in \mathbb{F}$.

Нека је $(E_1, \dots, E_m)$ произвољна база сопственог простора $\mathcal{E}_\lambda$, а $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$ за $1 \leq i \leq m$ произвољан избор вектора. Математичком индукцијом по m доказујемо да важи $\sum_{k=1}^m C_{Y_k} = \bigoplus_{k=1}^m C_{Y_k}$, што је очигледно за $m = 1$. За корак индукције имамо да важи $\sum_k C_{Y_k} = C_{Y_j} + \sum_{k \neq j} C_{Y_k} = C_{Y_j} + \bigoplus_{k \neq j} C_{Y_k}$, а како је $C_{Y_j} \cap \bigoplus_{k \neq j} C_{Y_k} = \{0\}$ због $f(C_{Y_j}) = \text{Span}\{E_j\}$ и $f(\bigoplus_{k \neq j} C_{Y_k}) \subseteq \text{Span} \bigcup_{k \neq j} \{E_k\}$, то добијамо директну суму $\bigoplus_{k=1}^m C_{Y_k} \leq \mathcal{W}$.

Ако избор $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$ за $1 \leq i \leq m$ начинимо тако да је $r(Y_i)$ максимално за $Y_i \in \mathcal{U}_{E_i}$, можемо доказати да је $\mathcal{W} = \bigoplus_{k=1}^m C_{Y_k}$. Доказ изводимо математичком индукцијом по $d = \dim \mathcal{W}$, што очигледно важи за $d = 1$. За корак индукције посматрамо потпростор $B(\mathcal{W}) \leq \mathcal{W}$ и рестрикцију $B|_{B(\mathcal{W})}$, где имамо $\text{Ker } B = \mathcal{E}_\lambda$, одакле је $\dim B(\mathcal{W}) = d - m < d$. По индукцијској хипотези важи $B(\mathcal{W}) = \bigoplus_{k=1}^m C_{BY_k}$, где је по конвенцији $C_0 = \{0\}$, што имамо у случају $Y_k = E_k$. Како је $\dim \bigoplus_{k=1}^m C_{Y_k} = m + \dim \bigoplus_{k=1}^m C_{BY_k} = d$, то је $\mathcal{W} = \bigoplus_{k=1}^m C_{Y_k}$.

Лема А.13. Уошћени сојствени простор ендоморфизма A распада се на директну суму A -циклических простора.

Као последицу Теореме А.12 добијамо наредну теорему.

Теорема А.14. Ако ендоморфизам A коначнодимензионог векторског простора $\mathcal{V}$ има распадаљив карактеристични полином, онда се $\mathcal{V}$ распада на директну суму A -циклических простора и постоји база која се састоји од дисјунктних циклуса уошћених сојствених вектора у којој је матрица од A блок-дијагонална са Жордановим матрицама на дијагонали.

Размотримо за нас најважнији случај $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, кад је $\mathcal{V}$ коначнодимензиони реални векторски простор. Карактеристични полином ω_A за $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ има реалне коефицијенте, али његови корени не морају нужно бити реални. Тако је могуће да ендоморфизам A има нерастављив карактеристични полином, те да самим тим не буде дијагонализабилан. Комплексни бројеви чине алгебарски затворено поље, а **основна теорема алгебре** каже да сваки неконстантан полином из $\mathbb{C}[x]$ има барем један комплексни корен, те у случају $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ сваки ендоморфизам има растављив карактеристични полином.

То нас мотивише да реални векторски простор $\mathcal{V}$ природно продужимо на комплексни векторски простор $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \{(X, Y) : X, Y \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V} \times \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus i\mathcal{V} = \{X + iY : X, Y \in \mathcal{V}\}$ за који кажемо да је **комплексификација** од $\mathcal{V}$. Произвољна база за $\mathcal{V}$ је такође база за комплексификације $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. Наравно, ако је $(E_1, \dots, E_n)$ база за $\mathcal{V}$, а $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ посматрамо као реални векторски простор, онда је његова природна база $(E_1, iE_1, \dots, E_n, iE_n)$.

За $A \in \text{End}(\mathcal{V})$, **комплексификација** од A је ендоморфизам $A_{\mathbb{C}} \in \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$ дефинисан са $A_{\mathbb{C}}(X + iY) = A(X) + iA(Y)$ за свако $X, Y \in \mathcal{V}$. Уобичајено је да идентификујемо сопствене вредности и векторе од A са сопственим вредностима и векторима од $A_{\mathbb{C}}$, те можемо рећи да су сопствене вредности од A корени од ω_A . Ако је $\lambda \notin \mathbb{R}$ сопствена вредност од $A_{\mathbb{C}}$, онда кажемо да је $\lambda \in \mathbb{C}$ **комплексна сојствена вредност** од A . Комплексне сопствене вредности морају да иду у пару са својим конјугатом, што видимо у наредној леми.

Лема А.15. Нека је A ендоморфизам реалној векторској простора $\mathcal{V}$. Ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност од $A_{\mathbb{C}}$ за сопствени вектор $Z \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, онда је $\bar{\lambda}$ сопствена вредност од $A_{\mathbb{C}}$ за сопствени вектор $\bar{Z} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$.

Доказ. Ако је $\lambda = \alpha + i\beta$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $Z = X + iY$ за $X, Y \in \mathcal{V}$, то из услова леме имамо

$$A(X) + iA(Y) = A_{\mathbb{C}}(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY) = (\alpha X - \beta Y) + i(\alpha Y + \beta X),$$

одакле следи $A(X) = \alpha X - \beta Y$ и $A(Y) = \beta X + \alpha Y$, те добијамо

$$A_{\mathbb{C}}(X - iY) = A(X) - iA(Y) = (\alpha X - \beta Y) - i(\alpha Y + \beta X) = (\alpha - i\beta)(X - iY),$$

што доказује $A_{\mathbb{C}}(\bar{Z}) = \bar{\lambda}\bar{Z}$, док је $\bar{Z} \neq 0$ јер је $Z \neq 0$. □

Ако карактеристични полином од A није растављив можемо искористити комплексификацију да од $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ добијемо $A_{\mathbb{C}} \in \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$. Карактеристични полином од $A_{\mathbb{C}}$ је растављив те из Теореме А.12 добијамо $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda} (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$. Како по Леми А.15 комплексне сопствене вредности иду у паровима са својим конјугатом, поред постојећих $A_{\lambda} = A - \lambda \mathbb{1}$ за $\lambda \in \mathbb{R}$, дефинишемо

$$A_{\lambda} = (A - \lambda \mathbb{1})(A - \bar{\lambda} \mathbb{1}) = A^2 - 2\Re(\lambda)A + |\lambda|^2 \mathbb{1}$$

за комплексну сопствену вредност $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, што даје додатне **уопштене сопствене просторе** облика

$$\mathcal{V}_{\lambda} = \text{Ker}(A_{\lambda})^n = \Re \left(\text{Ker} \left((A_{\mathbb{C}} - \lambda \mathbb{1})(A_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \mathbb{1}) \right)^n \right) = \Re \left((\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda} \oplus (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\bar{\lambda}} \right)$$

и омогућава декомпозицију

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda, \Im(\lambda) \geq 0} \mathcal{V}_{\lambda}.$$

За $Z = X + iY \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ и $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ можемо за свако $r \in \mathbb{N}$ израчунати

$$\begin{aligned} (A_{\mathbb{C}} - (\alpha \pm i\beta) \mathbb{1})^r (X \pm iY) &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\alpha \pm i\beta)^k (A_{\mathbb{C}})^{r-k} (X \pm iY) \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j (\pm i)^j (A^{r-k} X \pm i A^{r-k} Y), \end{aligned}$$

док су вектори $(i)^j (A^{r-k} X + i A^{r-k} Y)$ и $(-i)^j (A^{r-k} X - i A^{r-k} Y)$ међусобно конјуговани (што се лако провери како за парне тако и за непарне j), одакле добијамо

$$\overline{(A_{\mathbb{C}} - \lambda \mathbb{1})^r Z} = (A_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \mathbb{1})^r \bar{Z}. \quad (\text{A.4})$$

Зато је $(A_{\mathbb{C}} - \lambda \mathbb{1})^s Z = 0$ ако и само ако је $(A_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \mathbb{1})^s \bar{Z} = 0$, те сваки $(A_{\mathbb{C}} - \lambda \mathbb{1})$ -циклични потпростор $\mathcal{C}_Z$ од $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ генерисан вектором Z и димензије s има одговарајући конјуговани $(A_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \mathbb{1})$ -циклични потпростор $\mathcal{C}_{\bar{Z}}$ од $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\bar{\lambda}}$ генерисан вектором $\bar{Z}$ димензије s , што нам омогућава да објединимо та два потпростора и добијемо потпростор $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}} \leq (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda} \oplus (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\bar{\lambda}}$. Ако уведемо $E_j = (A_{\mathbb{C}} - \lambda \mathbb{1})^{s-j} Z$ и $F_j = (A_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \mathbb{1})^{s-j} \bar{Z}$ за $1 \leq j \leq s$, онда је $e = (E_1, \dots, E_s, F_1, \dots, F_s)$ природна база за $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}}$ док ендоморфизам $A_{\mathbb{C}}$ у тој

бази има облик,

$$\left[A_{\mathbb{C}}|_{\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}}} \right]_e = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_s(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_s(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2s \times 2s}.$$

Како су E_j и F_j по формули (А.4) међусобно конјуговани, то можемо преуредити базне векторе са

$$G_j = \Re(E_j) = \frac{E_j + F_j}{2} \in \mathcal{V}, \quad H_j = \Im(E_j) = \frac{E_j - F_j}{2i} \in \mathcal{V},$$

и поставити нову базу $e' = (G_1, H_1, \dots, G_s, H_s)$. Како за $2 \leq j \leq s$ имамо $A_{\mathbb{C}}E_j = \lambda E_j + E_{j-1}$ и $A_{\mathbb{C}}F_j = \bar{\lambda}F_j + F_{j-1}$, то за $\lambda = \alpha + i\beta$ добијамо

$$\begin{aligned} AG_j &= \Re(\lambda E_j) + \Re(E_{j-1}) = \alpha G_j - \beta H_j + G_{j-1}, \\ AH_j &= \Im(\lambda E_j) + \Im(E_{j-1}) = \alpha H_j + \beta G_j + H_{j-1}, \end{aligned}$$

уз додатне релације $AG_1 = \alpha G_1 - \beta H_1$ и $AH_1 = \alpha H_1 + \beta G_1$. У новој бази рестрикција од $A_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}}$, а самим тим и рестрикција од A на $\Re(\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}}) \leq \mathcal{V}_{\lambda}$, има облик

$$\mathcal{J}_s(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s},$$

што је **реални Жорданов блок** или **реална Жорданова матрица** реда $2s$ која одговара пару конјугованих вредности $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Последица Теореме А.14 је наредна теорема која нам омогућава да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ канонски раставимо $\mathcal{V}$ на директну суму где сваком сабирку одговара Жорданов блок.

Теорема А.16. *Ако је A ендоморфизам коначнодимензионој реалној векторској простора $\mathcal{V}$, онда постоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијагонална са (стандардним или реалним) Жордановим матрицама на дијагонали.*

Неуређена фамилија Жорданових блокова из претходне теореме зове се **Жорданова нормална форма** ендоморфизма.

Коефицијенти карактеристичног полинома ω_A ендоморфизма A се полиномијално изражавају преко елемената матрице од A . Посебно, препознајемо траг и детерминанту као коефицијенте у једначини

$$\omega_A(x) = x^n - \text{Tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A),$$

а додатне инваријанте су трагови степенова, што видимо у наредној леми.

Лема А.17. Ако је A ендоморфизам векторског простора који има карактеристични полином $\omega_A(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n$, онда

$$m\sigma_m + \sigma_{m-1}\text{Tr}(A) + \sigma_{m-2}\text{Tr}(A^2) + \dots + \sigma_1\text{Tr}(A^{m-1}) + \text{Tr}(A^m) = 0 \quad (\text{A.5})$$

важи за свако $1 \leq m \leq n$.

Доказ. Нека је $\omega(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ (уколико постоје комплексне сопствене вредности можемо посматрати $A_{\mathbb{C}}$ уместо A). Коефицијенти σ_m за $1 \leq m \leq n$ се изражавају преко Вијетових⁸ формула,

$$\sigma_m = (-1)^m \sum_{i_1 < \dots < i_m} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m}.$$

Рачун за $1 \leq j \leq m-1$ даје

$$\sigma_{m-j}\text{Tr}(A^j) = (-1)^{m-j}(\lambda_1^j + \lambda_2^j + \dots + \lambda_n^j) \sum_{i_1 < \dots < i_{m-j}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{m-j}},$$

што након смене

$$S_q^p = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^p \cdot \sum_{j_1 < \dots < j_q, j_l \neq i} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_q} \right),$$

постаје $\sigma_{m-j}\text{Tr}(A^j) = (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^j)$, одакле је

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\text{Tr}(A^j) = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j}(S_{m-j-1}^{j+1} + S_{m-j}^j) = -S_0^m + (-1)^{m-1}S_{m-1}^1.$$

Очигледно важи $S_0^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m = \text{Tr}(A^m)$, док имамо

$$S_{m-1}^1 = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \cdot \sum_{j_1 < \dots < j_{m-1}, j_l \neq i} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_{m-1}} \right).$$

Сваки члан из

$$(-1)^m \sigma_m = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m},$$

на пример $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$, појављује се тачно m пута у S_{m-1}^1 , што даје $S_{m-1}^1 = m(-1)^m \sigma_m$. Коначно, имамо

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sigma_{m-j}\text{Tr}(A^j) = -\text{Tr}(A^m) - m\sigma_m,$$

што доказује једначину (A.5). □

Карактеристични и минимални полином имају исте корене, те ако су $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ различите сопствене вредности, онда је $\omega_A(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$, док су α_j за $1 \leq j \leq k$ (алгебарске) вишеструкости сопствених вредности. Минимални полином мора бити облика $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{\beta_1} (x - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (x - \lambda_k)^{\beta_k}$, а за његове вишеструкости важи $1 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. Имајући у виду Теорему А.14 и Теорему А.16, можемо приметити да је β_j највећи ред (стандардног) Жордановог блока у оквиру потпростора $\mathcal{V}_{\lambda_j}$.

⁸François Viète (1540–1603), француски математичар

А.4 Самоадјунговани ендоморфизми

Ова секција је природан наставак претходне у којој смо изучавали сопствену структуру ендоморфизама. Ако у игру укључимо скаларни производ са којим се ендоморфизам лепо слаже, можемо финије подесити ствари везане за сопствену структуру и остварити одређене бенефите. Као литературу препоручујемо Маљцева⁹ [85].

Уобичајено посматрамо самоадјунговани ендоморфизам квадратног векторског простора, али је корисно имати одговарајуће продужење за комплексни векторски простор.

Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор коначне димензије над пољем $\mathbb{C}$. **Комплексни скаларни производ** g на $\mathcal{V}$ уобичајено је недегенерисана симетрична билинеарна форма $g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$, што је уопштење скаларног производа. **Комплексни квадрантни векторски простор** је комплексни векторски простор опремљен комплексним скаларним производом.

Сесквилинеарна форма на $\mathcal{V}$ је функција $g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ која је $\mathbb{C}$ -линеарна по првом аргументу, а конјуговано-линеарна по другом аргументу, односно таква да $g(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha g(X, Z) + \beta g(Y, Z)$ и $g(X, \alpha Y + \beta Z) = \bar{\alpha} g(X, Y) + \bar{\beta} g(X, Z)$ важи за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. **Ермитска форма** на $\mathcal{V}$ је сесквилинеарна форма g на $\mathcal{V}$ таква да за свако $X, Y \in \mathcal{V}$ важи $g(Y, X) = \overline{g(X, Y)}$. **Ермитски скаларни производ** је недегенерисана ермитска форма, док је **ермитски квадрантни векторски простор** комплексни векторски простор опремљен ермитским скаларним производом.

Пример А.4. Ермитски квадратни векторски простор који је позитивно дефинитан назива се **унитаран простор**. Стандардни пример унитарног простора је $\mathbb{C}^n$ са ермитском формом g која је дефинисана са

$$g((X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)) = X_1 \bar{Y}_1 + X_2 \bar{Y}_2 + \dots + X_n \bar{Y}_n,$$

за све $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{C}$. △

По узору на реални случај, **квадрантна форма** од g је функција $\varepsilon: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана са $\varepsilon_X = g(X, X)$. Сесквилинеарна форма g је свакако $\mathbb{R}$ -билинеарна, а за $X, Y \in \mathcal{V}$ имамо поларизационе идентитете

$$4g(X, Y) = \varepsilon_{X+Y} - \varepsilon_{X-Y} + i\varepsilon_{X+iY} - i\varepsilon_{X-iY}, \quad 2g(X, Y) = (1+i)\varepsilon_X + (1-i)\varepsilon_Y - \varepsilon_{X-Y} - i\varepsilon_{X-iY}.$$

За ермитску форму g , свако $X, Y \in \mathcal{V}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ важи једнакост

$$g(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = |\alpha|^2 \varepsilon_X + 2\Re(\alpha \bar{\beta} g(X, Y)) + |\beta|^2 \varepsilon_Y,$$

одакле следи да је $\varepsilon_X \in \mathbb{R}$ за свако $X \in \mathcal{V}$.

Нека је $(\mathcal{V}, g)$ (реални) квадратни векторски простор. Комплексификација доноси комплексни векторски простор $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, а комплексификацију скаларног производа g можемо извести на два природна начина. За свако $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}$ формуле

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(X + iY, Z + iW) &= (g(X, Z) - g(Y, W)) + i(g(Y, Z) + g(X, W)), \\ g_{\mathbb{C}}^H(X + iY, Z + iW) &= (g(X, Z) + g(Y, W)) + i(g(Y, Z) - g(X, W)), \end{aligned}$$

дефинишу комплексни скаларни производ $g_{\mathbb{C}}: \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ и ермитски скаларни производ $g_{\mathbb{C}}^H: \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Ако за свако $Z \in \mathcal{V}$ важи $g_{\mathbb{C}}(X + iY, Z) = 0$ или $g_{\mathbb{C}}^H(X + iY, Z) = 0$, онда добијамо $g(X, Z) = 0$ и $g(Y, Z) = 0$, те је $X + iY = 0$, што доказује да су обе форме недегенерисане. Штавише у ермитском квадратном векторском простору важи

⁹Анатолий Иванович Маљцев, руски математичар

Силвестеров закон инерције и ермитско продужење чува сигнатуру оригиналног простора. У сваком случају $(\mathcal{V}, g)$ индукује како комплексни квадратни векторски простор $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ тако и ермитски квадратни векторски простор $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}^H)$.

Ако је A самоадјунговани ендоморфизам од $\mathcal{V}$, онда у комплексном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ имамо

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}(X + iY), Z + iW) &= (g(AX, Z) - g(AY, W)) + i(g(AY, Z) + g(AX, W)) \\ &= (g(X, AZ) - g(Y, AW)) + i(g(Y, AZ) + g(X, AW)) = g_{\mathbb{C}}(X + iY, A_{\mathbb{C}}(Z + iW)), \end{aligned}$$

док у ермитском квадратном векторском простору $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}^H)$ имамо

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}^H(A_{\mathbb{C}}(X + iY), Z + iW) &= (g(AX, Z) + g(AY, W)) + i(g(AY, Z) - g(AX, W)) \\ &= (g(X, AZ) + g(Y, AW)) + i(g(Y, AZ) - g(X, AW)) = g_{\mathbb{C}}^H(X + iY, A_{\mathbb{C}}(Z + iW)), \end{aligned}$$

што значи да је комплексификација $A_{\mathbb{C}} \in \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$ такође самоадјунгована у оба случаја.

Важно је приметити да ако је A самоадјунговани ендоморфизам комплексног квадратног векторског простора, онда је то и $A - \lambda \mathbb{1}$ за $\lambda \in \mathbb{C}$, као и $p(A)$ где је $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ произвољни полином. Међутим, то не важи у ермитском квадратном векторском простору, где имамо $g((A - \lambda \mathbb{1})X, Y) = g(AX, Y) - \lambda g(X, Y) = g(X, (A - \bar{\lambda} \mathbb{1})Y)$.

Из доказа Теореме А.12 знамо да уопштени сопствени простори имају тривијалан пресек и зато дају директну суму. У случају да је A самоадјунговани ендоморфизам, та директна сума је ортогонална.

Лема А.18. *Уопштени сопствени простори самоадјунгованог ендоморфизма реалног или комплексног квадратног простора су међусобно ортогонални.*

Доказ. Нека је $A \in \text{End}(\mathcal{V})$, а $X \in \mathcal{V}_{\lambda}$ и $Y \in \mathcal{V}_{\mu}$ произвољни за $\lambda \neq \mu$. По Леми А.10 рестрикција од A_{λ} је аутоморфизам од $\mathcal{V}_{\mu}$, те постоји $Z \in \mathcal{V}_{\mu}$ такво да је $(A_{\lambda})^n Z = Y$. Ако је A самоадјунгован, то је такав и $(A_{\lambda})^n$, те имамо $g(X, Y) = g(X, (A_{\lambda})^n Z) = g((A_{\lambda})^n X, Z) = 0$, што доказује $\mathcal{V}_{\lambda} \perp \mathcal{V}_{\mu}$. $\square$

Лема А.19. *Уопштени сопствени простори самоадјунгованог ермитског квадратног простора који одговарају међусобно неконјугованим сопственим вредностима су међусобно ортогонални. Посебно, уопштени сопствени простори који одговарају сопственим вредностима које нису реалне су поједино изопрости.*

Доказ. Сасвим слично доказу Леме А.18, за $\bar{\lambda} \neq \mu$ постоји $Z \in \mathcal{V}_{\mu}$ такво да је $(A_{\bar{\lambda}})^n Z = Y$, те како је A самоадјунгован добијамо $g(X, Y) = g(X, (A_{\bar{\lambda}})^n Z) = g((A_{\lambda})^n X, Z) = 0$. $\square$

Додатне погодности пружају се уколико је (реални) скаларни производ (позитивно) дефинитан, јер тада су све сопствене вредности реалне.

Лема А.20. *Сопствене вредности самоадјунгованог ендоморфизма на дефинитном квадратном векторском простору су реалне.*

Доказ. Ако је $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ комплексна сопствена вредност самоадјунгованог ендоморфизма A на дефинитном квадратном векторском простору $(\mathcal{V}, g)$, онда постоји ненула $Z = X + iY \in \mathcal{V}_{\lambda}$ такво да је $A_{\mathbb{C}}Z = \lambda Z$, одакле је $AX = \alpha X - \beta Y$ и $AY = \beta X + \alpha Y$. Како је A самоадјунгован то је $g(\alpha X - \beta Y, Y) = g(X, \beta X + \alpha Y)$ одакле следи $\beta(\varepsilon_X + \varepsilon_Y) = 0$, а како је $\mathcal{V}$ дефинитан то је $\varepsilon_X + \varepsilon_Y \neq 0$, те добијамо $\beta = 0$, што даје $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

За $0 \neq X \in \mathcal{V}$ постоји најмање $r \in \mathbb{N}$ такво да је $(A_{\lambda})^r X \neq 0$, одакле дефинитан скаларни производ даје $g((A_{\lambda})^{2r} X, X) = g((A_{\lambda})^r X, (A_{\lambda})^r X) \neq 0$, али $(A_{\lambda})^{2r} X = 0$ за $2r > r$, што повлачи $r = 0$, одакле је $A_{\lambda} X = 0$ и важи $\mathcal{V}_{\lambda} = \mathcal{E}_{\lambda}$. По Леми А.20 карактеристични

полином ω_A је растављив, а по Теореме А.12 се $\mathcal{V}$ раставља на директну суму сопствених простора $\mathcal{V}_\lambda$, која је због Леме А.18 ортогонална. Зато је A дијагонализабилан и дозвољава спектралну декомпозицију $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \mathcal{E}_\lambda$, што је тврђење које зовемо **спектрална теорема**.

Лема А.21. Самоадјунговани ендоморфизам A дефинитној квадрантној векторској простору $\mathcal{V}$ је дијагонализабилан и важи $\mathcal{V} = \bigoplus_\lambda \text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})$.

Спектрална декомпозиција није увек могућа кад је g недефинитно, пре свега јер ω_A не мора бити растављив. Карактеристични полином од $A_{\mathbb{C}}$ је растављив те из Теореме А.12 уз Лему А.18 добијамо $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_\lambda (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_\lambda$, што последично омогућава декомпозицију $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda, \Im(\lambda) \geq 0} \mathcal{V}_\lambda$. Како је директна сума ортогонална, уопштени сопствени простори $\mathcal{V}_\lambda$ су недегенерисани.

Лема А.22. Уопшћени сопствени простори самоадјунгованог ендоморфизма квадрантној векторској простору су недегенерисани, а сам простор је једнак њиховој ортогоналној суми.

Уопштени сопствени простор $\mathcal{V}_\lambda$ за $A \in \text{End}(\mathcal{V})$ се по Лему А.13 раставља на директну суму A -циклических потпростора. Посматрајмо $\mathcal{C}_Y = \text{Span} \bigcup_{k=0}^{s-1} \{B^k Y\}$, где је $B = (A - \lambda \mathbb{1})|_{\mathcal{V}_\lambda}$, а $s = r(Y)$ ($B^{s-1}Y$ је сопствени вектор).

У присуству реалног или комплексног скаларног производа g можемо конструисати низ скалара $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{F}$ тако што рекурентно дефинишемо $\alpha_0 = 1$ и

$$\alpha_{s-1-m} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{s-2-m} \sum_{k=0}^{\min(s-1-m-j, s-2-m)} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j+k} Y, Y)$$

за $s-2 \geq m \geq 0$ да бисмо увели $Z = \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j B^j Y \in \mathcal{C}_Y$ и добили

$$\begin{aligned} g(B^m Z, Z) &= g \left(B^m \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_j B^j Y, \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k B^k Y \right) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j} Y, B^k Y) \\ &= \sum_{j=0}^{s-1-m} \sum_{k=0}^{s-1-m-j} \alpha_j \alpha_k g(B^{m+j+k} Y, Y) = 0. \end{aligned}$$

Низ вектора $E_j = B^{s-j} Z$ за $1 \leq j \leq s$ чини базу $e = (E_1, \dots, E_s)$ за $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_Z$. У односу на ту базу ендоморфизам има Жорданову матрицу $[A|_{\mathcal{C}_Y}]_e = \mathcal{J}_s(\lambda)$, док је Грамова матрица $[g|_{\mathcal{C}_Y}]_e = \nu N_s$, где је $\nu = g(B^{s-1} Z, Z)$ и

$$N_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{s \times s}. \quad (\text{A.6})$$

Уколико је $\nu = 0$ не можемо превише да урадимо јер је $\mathcal{C}_Y$ потпуно изотропан потпростор. Међутим, ако је $\nu \neq 0$, у самој конструкцији вектор Z можемо заменити вектором μZ за произвољно $0 \neq \mu \in \mathbb{F}$, одакле добијамо $g(B^{s-1} \mu Z, \mu Z) = \mu^2 g(B^{s-1} Z, Z)$, што нам омогућава да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ изаберемо $\mu = 1/\sqrt{|g(B^{s-1} Z, Z)|}$ и тако нормирамо $\nu = \pm 1$, док у случају $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ избор $\mu = (g(B^{s-1} Z, Z))^{-1/2}$ омогућава $\nu = 1$.

Од постојеће базе можемо направити нову базу са

$$G_j = E_j + \text{sgn}(2j - s - 1) E_{s+1-j},$$

за $1 \leq j \leq s$, одакле добијамо

$$\begin{aligned} g(G_j, G_k) &= g(E_j + \operatorname{sgn}(2j - s - 1)E_{s+1-j}, E_k + \operatorname{sgn}(2k - s - 1)E_{s+1-k}) \\ &= v\delta_{s+1-k}^j + v\operatorname{sgn}(2k - s - 1)\delta_k^j + v\operatorname{sgn}(2j - s - 1)\delta_k^j \\ &\quad + v\operatorname{sgn}((2j - s - 1)(2k - s - 1))\delta_{s+1-k}^j \\ &= 2v\delta_k^j \operatorname{sgn}(2j - s - 1) + v\delta_{s+1-k}^j (1 - \operatorname{sgn}(2j - s - 1)^2) \\ &= v\delta_k^j (2\operatorname{sgn}(2j - s - 1) + \delta_{s+1}^{2j}), \end{aligned}$$

ШТО ДОНОСИ

$$g(G_j, G_k) = \begin{cases} 2v\delta_{jk} & \text{за } 2j > s + 1 \\ v\delta_{jk} & \text{за } 2j = s + 1 \\ -2v\delta_{jk} & \text{за } 2j < s + 1 \end{cases}$$

и доказује да је наша база ортогонална.

Основна идеја је да свако $\mathcal{V}_\lambda$ раставимо на ортогоналну суму недегенерисаних потпростора облика $\mathcal{C}_Y$. Ако изаберемо произвољан дефинитни вектор $D \in \mathcal{V}_\lambda$ имамо $X = f(D) \in \mathcal{E}_\lambda$, а како $\mathcal{C}_Y \ni D$ није потпуно изотропан следи $v \neq 0$. Сада се ортогонална база коју смо имали лако претвара у ортонормирану, те је $\mathcal{C}_Y$ недегенерисан потпростор индекса $s/2$ за парно s , односно $(s - \operatorname{sgn} v)/2$ за непарно s . Ову процедуру можемо наставити на недегенерисаном потпростору $\mathcal{V}_\lambda \cap (\mathcal{C}_Y)^\perp$, те ћемо тако у $\dim \mathcal{E}_\lambda$ корака раставити читаво $\mathcal{V}_\lambda$.

Теорема A.23. *Ако је A самоадјунговани ендоморфизам комплексној квадрантној векторској простора $\mathcal{V}$, онда се $\mathcal{V}$ раставља на ортогоналну суму недегенерисаних A -циклических простора, и постоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијагонална са Жордановим матрицама, а Грамова матрица блок-дијагонална са блоковима облика (A.6).*

Преостаје да у случају $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ размотримо $\mathcal{V}_\lambda$ за комплексну сопствену вредност λ . У доказу Теореме A.16 смо раставили $\mathcal{V}_\lambda$ на директну суму потпростора који су облика $\mathcal{C}_Z \oplus \mathcal{C}_{\bar{Z}} \leq (\mathcal{V}_\mathbb{C})_\lambda \oplus (\mathcal{V}_\mathbb{C})_{\bar{\lambda}}$. Ту смо имали канонску базу $(E_1, \dots, E_s, F_1, \dots, F_s)$ у којој ендоморфизам има блок дијагоналну матрицу са $\mathcal{J}_s(\lambda)$ и $\mathcal{J}_s(\bar{\lambda})$ на дијагонали. Нова база $(G_1, H_1, \dots, G_s, H_s)$, где су $G_j = \Re(E_j)$ и $H_j = \Im(E_j)$ довела нас је до матрице $\mathcal{J}_s(\alpha, \beta)$, где је $\lambda = \alpha + i\beta$, те преостаје да видимо како изгледа Грамова матрица у тој бази.

Ако продужимо g на комплексни скаларни производ $g_\mathbb{C}$, по Леми A.18 имамо $g_\mathbb{C}(E_j, F_k) = 0$, док је $g_\mathbb{C}(F_j, F_k) = g_\mathbb{C}(\bar{E}_j, \bar{E}_k) = \overline{g_\mathbb{C}(E_j, E_k)}$. Сада можемо израчунати,

$$\begin{aligned} g(G_j, G_k) &= g_\mathbb{C}(\Re(E_j), \Re(E_k)) = \frac{1}{2} \Re(g_\mathbb{C}(E_j, E_k)), \\ g(G_j, H_k) &= g_\mathbb{C}(\Re(E_j), \Im(E_k)) = 0, \\ g(H_j, H_k) &= g_\mathbb{C}(\Im(E_j), \Im(E_k)) = -\frac{1}{2} \Re(g_\mathbb{C}(E_j, E_k)), \end{aligned}$$

те како је $g_\mathbb{C}(E_j, E_k) = \delta_{s+1-k}^j v$, уколико је $v \neq 0$, погодним избором вектора μZ уместо Z можемо нормирати $v = 2$ да бисмо добили $g(G_j, G_k) = 1$ и $g(H_j, H_k) = -1$ само за $j + k = s + 1$, док су остале компоненте једнаке нули, Тако долазимо до базе у којој

ендоморфизам има матрицу $\mathcal{J}_s(\alpha, \beta)$, док је Грамова матрица облика

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}, \quad (\text{A.7})$$

што је индекса s , односно неутралне сигнатуре.

Као и у случају $\lambda \in \mathbb{R}$, бирамо произвољни дефинитни вектор $D \in (\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$, да бисмо обезбедили да $C_Y \ni D$ није потпуно изотропан (иако је по Лемми А.19 у ермитском случају $(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ потпуно изотропан, али наш случај је комплексни), те исцрпљивањем растављамо читаво $\mathcal{V}_{\lambda}$ као и раније.

Теорема А.24. *Ако је A самоадјунговани ендоморфизам реалној квадратној векторској простору $\mathcal{V}$, онда се $\mathcal{V}$ раставља на ортојоналну суму недејенерисаних подпростора, и постоји база за $\mathcal{V}$ у којој је матрица од A блок-дијагонална са (стандардним или реалним) Жордановим матрицама, а Грамова матрица блок-дијагонална са блоковима облика (А.6) и (А.7).*

А.5 Теорија пертурбација

Разумевање о томе како спектрална декомпозиција ендоморфизма на квадратном простору зависи од параметара је природан и значајан проблем. Добро је познато да n корена реалног или комплексног полинома степена n зависе непрекидно од коефицијената полинома. Последице, сопствене вредности ендоморфизма варирају непрекидно са елементима његове матрице. Важно је нагласити да ту корене посматрамо као неуређену n -торку скалара. Како не постоји канонски начин да се корени уреде, то није увек могуће означити сопствене вредности тако да појединачно чине непрекидне функције.

Међутим, ми смо пре свега заинтересовани за питање глаткоће или аналитичности сопствене структуре. Историја теорије пертурбација почиње 1937. године са Релихом¹⁰ и његовим првим радом у серији [108], што је коначно довело до његове књиге [109]. Теорија је кулминирала класичном монографијом коју је написао Като¹¹ [74]. За модерну перспективу теорије, препоручујемо прегледни рад који су написали Парусињски¹² и Рајнер¹³ [103].

Нека $P_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ означава монични полином степена n са реалним коефицијентима $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. За монични полином P_A кажемо да је **хиперболички** ако су сви његови корени $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (бројимо их са вишеструкостима) реални.

За отворен интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ који садржи нулу, посматрамо једнопараметарску фамилију хиперболичких моничних полинома $P_{A(t)}$ степена n за $t \in I$, где је $A = (a_1, \dots, a_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ аналитичка. Применом **Чирнхаусове трансформације**¹⁴

$$P_B(x) = P_A\left(x - \frac{a_1}{n}\right) = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} x^k \left(\frac{-a_1}{n}\right)^{n-j-k} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} x^k,$$

¹⁰Franz Rellich (1906–1955), аустријско-немачки математичар

¹¹Tosio Kato (1917–1999), јапански математичар

¹²Adam Parusiński, пољски математичар

¹³Armin Rainer, аустријски математичар

¹⁴Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708), немачки математичар, физичар и филозоф

добиамо $B = (b_1, \dots, b_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $a_0 = 1$ и

$$b_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-j}{k} \left(\frac{-1}{n}\right)^{n-j-k} a_j a_1^{n-j-k},$$

за $0 \leq k \leq n$. На овај начин добили смо фамилију полинома $P_{B(t)}$ који остају монични ($b_0 = 1$) и имају коефицијент од x^{n-1} једнак нули ($b_1 = 0$). За такав полином P_B кажемо да је у **Чирнхаусовој форми**. Његови корени су $\mu_j = \lambda_j + a_1/n$ за $1 \leq j \leq n$, те је P_B такође хиперболички, док $B: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ остаје аналитичка.

Како је $\sum_j \mu_j^2 = \sum_{j,k} \mu_j \mu_k - 2 \sum_{j < k} \mu_j \mu_k = (-b_1)^2 - 2b_2$, услов $b_1 = 0$ повлачи идентитет $-2b_2 = \mu_1^2 + \dots + \mu_n^2$, и последично $b_2 \leq 0$. Случај $b_2 = 0$ је праволинијски, јер онда важи $\mu_j = 0$ за $1 \leq j \leq n$, што повлачи да су оригинални корени $\lambda_j = -a_1/n$ аналитички. У супротном, можемо смањити интервал тако да је $-b_2(t) = t^{2m}u(t)$, где је $u(0) > 0$ за неко $m \in \mathbb{N}_0$ (приметимо да ако је $b_2(0) \neq 0$ имамо $m = 0$) и $t \in I'$, са $0 \in I' \subseteq I$.

Простор параметара је једнодимензион, те можемо изабрати $\theta(t) = \pm t^m u^{1/2}(t)$ као један од два аналитичка квадратна корена од $-b_2(t)$ и дефинисати

$$P_C(x) = \theta^{-n} P_B(\theta x) = x^n - x^{n-2} + \sum_{j=3}^n \theta^{-j} b_j x^{n-j}.$$

Овако добијамо аналитичку функцију $C = (c_1, \dots, c_n): I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ тако да је $c_1 = 0$ и $c_2 = -1$. Зато је $\xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ и $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 2$, где су $\xi_j = \theta^{-1} \mu_j$ за $1 \leq j \leq n$ корени од P_C . Ово нам омогућава да факторишемо $P_{C(0)} = P_D P_E$, где су P_D и P_E монични реални полиноми позитивног степена без заједничких корена.

Размотримо пресликавање $\psi: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ дефинисано са $\psi(Y, Z) = W$, где важи $P_W = P_Y P_Z$. Другим речима, за $Y = (y_1, \dots, y_p)$ и $Z = (z_1, \dots, z_q)$, добијамо $W = (w_1, \dots, w_{p+q})$ тако да важи $w_k = \sum_{j=0}^k y_{k-j} z_j$ за све $1 \leq k \leq p+q$, где је $y_0 = z_0 = 1$. Јакобијева матрица овог полиномијалног пресликавања ψ је тачно Силвестерова матрица у односу на P_Y и P_Z . Штавише, резултанта од P_Y и P_Z је, до на знак, једнака детерминанти Силвестерове матрице. Зато P_Y и P_Z немају заједничке (комплексне) корене ако и само ако је ψ инвертибилно.

Како P_D и P_E немају заједничке корене, ψ је инвертибилно у (D, E) , те по Теорему о инверзној функцији (Теорема А.30), остаје инвертибилно у околини од (D, E) . Зато постоји околина $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ од $C(0) = \psi(D, E)$ таква да се за свако $W \in \mathcal{U}$ одговарајући полином јединствено раставља са $P_W = P_Y P_Z$. Штавише, инверзно пресликавање ψ^{-1} је аналитичко на $\mathcal{U}$, те су композиције $\pi_1 \circ \psi^{-1}: W \mapsto Y$ и $\pi_2 \circ \psi^{-1}: W \mapsto Z$ такође аналитичке, са $\pi_1 \circ \psi^{-1}(C(0)) = D$ и $\pi_2 \circ \psi^{-1}(C(0)) = E$.

Овако добијамо идентитет $P_{Y(t)} P_{Z(t)} = P_{C(t)}$ за свако $t \in I''$, где је $0 \in I'' \subseteq I' \subseteq I$, док су пресликавања $Y: I'' \rightarrow \mathbb{R}^p$ и $Z: I'' \rightarrow \mathbb{R}^q$ аналитичка. Како је $p = \deg D < n$ и $q = \deg E < n$, можемо применити индукцијску хипотезу на $\deg A = n$ и добити аналитичке функције $\lambda_j: I'' \rightarrow \mathbb{R}$ за $1 \leq j \leq n$ које параметризују корене од $P_{A(t)}$.

Овај локални резултат може се схватити као реформулација Релихове теореме [108, Лема 2] која је инспирисана приступом обрађеним у [103]. Међутим, због јединствености аналитичког продужења, без умањења општости можемо претпоставити да је $I \subseteq \mathbb{R}$ произвољан отворен интервал, као и да важи $I'' = I$. Последично добијамо наредну глобалну верзију теореме.

Теорема А.25. Нека је $P_{A(t)}(x) = x^n + a_1(t)x^{n-1} + \dots + a_n(t)$ за $t \in I$ једнопараметарска фамилија хиперболичких моничних полинома степена n са реалним аналитичким коефицијентима $a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ за $1 \leq j \leq n$, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Тада постоје аналитичке функције $\lambda_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ за $1 \leq j \leq n$ такве да $P_{A(t)}(x) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j(t))$ важи за све $t \in I$.

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал који садржи 0, те размотримо једнопараметарску фамилију ендоморфизама $A(t)$ на векторском простору $\mathcal{V}$ димензије $n \in \mathbb{N}$. Ако фиксирамо базу $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$, онда су елементи матрице од $A(t)$ у тој бази дати са $A(t)(E_j) = \sum_k A_{kj}(t)E_k$ за $1 \leq j, k \leq n$, те претпоставимо да су све функције $A_{jk}: I \rightarrow \mathbb{R}$ аналитичке. Важно је приметити да се аналитичност елемената A_{jk} чува приликом промене базе, све док матрица преласка зависи аналитички по t .

Ако је карактеристични полином од $A(t)$ хиперболички за све $t \in I$, онда можемо применити Теорему А.25. То доноси аналитичке сопствене вредности $\lambda_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ за $1 \leq j \leq n$, тако да

$$\det(x \mathbb{1} - A(t)) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j(t))$$

важи за све $t \in I$.

Нека је $V(t) = \sum_j v_j(t)E_j$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda(t)$. Означимо $M(t) = A(t) - \lambda(t)\mathbb{1}$. Тада сопствена једначина $M(t)V(t) = 0$ доноси систем $\sum_{k=1}^n M_{jk}(t)v_k(t) = 0$ за $1 \leq j \leq n$, где су $M_{jk}(t) = A_{jk}(t) - \lambda(t)\delta_{jk}$ аналитичке функције.

Ако је $M(0) \neq 0$, онда због $\det M(0) = 0$ постоји број $r \in \mathbb{N}$ такав да су сви минори реда $r+1$ једнаки нули, док постоји минор реда $r = |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ за који важи $\det((M_{jk}(0))_{j \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{B}}) \neq 0$. Нека $N_{jk}(t)$ означава кофактор елемента $M_{jk}(t)$ у $(r+1) \times (r+1)$ матрици $(M_{jk}(t))_{j \in \mathcal{A}', k \in \mathcal{B}'}$, где имамо $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \sqcup \{a\}$ и $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \sqcup \{b\}$. Ако дефинишемо $v_k(t) = N_{ak}(t)$ за $k \in \mathcal{B}'$ и $v_k(t) = 0$ за $k \notin \mathcal{B}'$, тада ће вектор $V(t) = \sum_k v_k(t)E_k$ задовољити

$$\sum_{k=1}^n M_{ak}(t)v_k(t) = \sum_{k \in \mathcal{B}'} M_{ak}(t)N_{ak}(t) = \begin{vmatrix} M_{p_1 q_1}(t) & M_{p_1 q_2}(t) & \cdots & M_{p_1 q_r}(t) & M_{p_1 b}(t) \\ M_{p_2 q_1}(t) & M_{p_2 q_2}(t) & \cdots & M_{p_2 q_r}(t) & M_{p_2 b}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{p_r q_1}(t) & M_{p_r q_2}(t) & \cdots & M_{p_r q_r}(t) & M_{p_r b}(t) \\ M_{a q_1}(t) & M_{a q_2}(t) & \cdots & M_{a q_r}(t) & M_{ab}(t) \end{vmatrix} = 0,$$

за све $1 \leq a \leq n$, где је $\mathcal{A} = \{p_1, \dots, p_r\}$ и $\mathcal{B} = \{q_1, \dots, q_r\}$. Из непрекидности следи да можемо смањити интервал тако да важи

$$D(t) = \det(((M_{jk}(t)))_{j \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{B}}) \neq 0,$$

за све $t \in I'$, где је $0 \in I' \subseteq I$. Зато је, $v_b(t) = N_{ab}(t) = D(t) \neq 0$, те је $V(t)$ сопствени вектор од $A(t)$ који одговара сопственој вредности $\lambda(t)$ за свако $t \in I'$.

Ако је $M(0) = 0$, онда је случај $M(t) = 0$ за све $t \in I$ тривијалан. У супротном, како су све функције $M_{jk}: I \rightarrow \mathbb{R}$ аналитичке и задовољавају $M_{jk}(0) = 0$, постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је $M(t) = t^m M^o(t)$, где је $M^o(0) \neq 0$. У овом случају, можемо решити систем $\sum_{k=1}^n M_{jk}^o(t)v_k(t) = 0$ као раније и добити сопствени вектор $V(t)$.

Претпоставимо да $A(0)X = \mu X$ важи за неки ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ и $\mu \in \mathbb{R}$. Постоји база $(E_1, \dots, E_n)$ од $\mathcal{V}$ у којој је матрица од $A(0)$ блок дијагонална са Жордановим матрицама на дијагонали тако да је $E_1 = X$ (видети Теорему А.14). Ако искористимо $\lambda(0) = \mu$, постојаће индекси $1 \leq a, b \leq n$ такви да је $M_{ak}(0) = 0$ и $M_{kb}(0) = 0$ за све $1 \leq k \leq n$ (наравно, имамо $b = 1$), те зато $a \notin \mathcal{A}$ и $b \notin \mathcal{B}$. Применом претходних резултата добијамо сопствени вектор $V(t) = \sum_k v_k(t)E_k$ за $\lambda(t)$, где је $v_k(0) = 0$ за све $k \neq b = 1$, што даје $V(0) = v_1(0)E_1$, те зато $W(t) = V(t)/D(t)$ генерише аналитички сопствени вектор који одговара $\lambda(t)$ тако да је $W(0) = X$ и $\lambda(0) = \mu$. Као и раније, јединственост аналитичког проширења обезбеђује да се конструкција може проширити са локалног интервала $I' \subseteq I$ на цео интервал I .

Теорема А.26. Нека је $A(t)$, за $t \in I$, једнопараметарска фамилија ендоморфизама на коначнодимензионом векторском простору $\mathcal{V}$ са хиперболичким карактеристичним полиномом, иако да су елементи одговарајуће матрице реалне аналитичке

функције на отвореном интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$ који садржи 0. Ако $A(0)X = \mu X$ важи за неки ненула вектор $X \in \mathcal{V}$ и $\mu \in \mathbb{R}$, онда постоји аналитичка функција $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ и аналитичко пресликавање $V: I \rightarrow \mathcal{V} \setminus \{0\}$ тако да $A(t)V(t) = \lambda(t)V(t)$ важи за све $t \in I$, где је $V(0) = X$ и $\lambda(0) = \mu$.

Уколико имамо квадратни векторски простор $(\mathcal{V}, g)$, онда је природно претпоставити да су сви $A(t)$ самоадјунговани. Такође претпостављамо да је свако $A(t)$ дијагонализабилно (са хиперболичким карактеристичним полиномом). Овај услов је геометријски природан и аутоматски испуњен кад је $\mathcal{V}$ дефинитан (видети Лему А.20 и Лему А.21).

Нека је μ сопствена вредност за $A(0)$ која има вишеструкост r , те нека је $(F_1, \dots, F_r)$ ортонормирана база сопственог простора $\text{Ker}(A(0) - \mu \mathbb{1})$. Теорема А.25 одмах доноси аналитичку сопствену вредност $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ са $\lambda(0) = \mu$. Математичком индукцијом по r показујемо да постоје ортонормирана аналитичка пресликавања $V_i: I \rightarrow \mathcal{V}$ таква да је $AV_i = \lambda V_i$ за све $1 \leq i \leq r$ са $V_i(0) = F_i$.

Теорема А.26 доноси аналитичко пресликавање $V: I \rightarrow \mathcal{V}$ такво да је $AV = \lambda V$ са $V(0) = F_1$. Додатно, могуће након смањивања интервала, пресликавање V се може нормализовати тако да се добије јединично аналитичко пресликавање $V_1 = V/\|V\|$. Као и раније, ова локална конструкција у околини сваког $t \in I$, повлачи глобално тврђење на отвореном интервалу I , доносећи $V_1: I \rightarrow \mathcal{V}$ преко аналитичког продужења. На овај начин, решили смо случај $r = 1$.

За $r > 1$, дефинишемо ендоморфизам $P(t): \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, који зовемо **оператор пројекције**, са $P(t)U = g(V_1(t), U)V_1(t)$. Елементи матрице $P(t)$ у односу на фиксирану ортонормирану базу $(E_1, \dots, E_n)$ су дати са $p_{jk}(t) = \varepsilon_k v_j(t) v_k(t)$, где је $V_1(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) E_i$. Зато је $P(t)$ самоадјунгован и аналитички, те разматрамо нову фамилију самоадјунгованих ендоморфизама која је дефинисана са $B(t) = A(t) - P(t)$. Лако је приметити да $B(t)$ и $A(t)$ имају заједничке сопствене вредности и сопствене векторе на $V_1(t)^\perp$, док $V_1(t)$ сада одговара сопственој вредности $\lambda(t) - \varepsilon_{F_1}$. Вишеструкост сопствене вредности μ за $B(0)$ постаје $r - 1$ и примењујемо индукцијску хипотезу да бисмо конструисали ортонормирана пресликавања $V_i: I \rightarrow \mathcal{V}$ тако да је $AV_i = \lambda V_i$ за $2 \leq i \leq r$, са $V_i(0) = F_i$. Како је $V_i(t) \perp V_1(t)$ за све $i > 1$, ова конструкција доноси тражених r ортонормираних аналитичких пресликавања V_i која одговарају сопственој вредности λ .

Примењујући исти аргумент за сваку сопствену вредност од $A(0)$ добијамо класичан Релихов резултат да сопствене вредности и одговарајући сопствени вектори од $A(t)$ могу бити изабрани тако да зависе аналитички по t . Овај резултат је оригинално доказан локално у околини од 0 (видети [108, Пропозиција 1], [109, Теорема 1], [103]).

Теорема А.27. Нека је $A(t)$, за $t \in I$, једнопараметарска фамилија дијагонализабилних самоадјунгованих ендоморфизама на квадратном простору $\mathcal{V}$ димензије n , тако да су елементи одговарајуће матрице реалне аналитичке функције на отвореном интервалу $I \subseteq \mathbb{R}$. Тада постоје аналитичке функције $\lambda_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ и аналитичка пресликавања $V_j: I \rightarrow \mathcal{V}$, за $1 \leq j \leq n$, тако да је $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ ортонормирана база од $\mathcal{V}$ за све $t \in I$, и $A(t)V_j(t) = \lambda_j(t)V_j(t)$.

Ако елементи одговарајуће матрице нису аналитички, већ само глатки, сопствени вектори могу да не дозволе чак ни непрекидан избор, као што видимо у наредном примеру преузетом из [108].

Пример А.5. Размотримо једнопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама дефинисаних матрицама

$$A(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{t} & \sin \frac{1}{t} \\ \sin \frac{1}{t} & -\cos \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

за $t \neq 0$ и поставимо $A(0) = 0$. Ова фамилија је глатка за $t \in \mathbb{R}$, укључујући и $t = 0$, али није аналитичка у $t = 0$ (видети Пример А.7). Како имамо да је $\text{Tr} A(t) = 0$ и $\det A(t) = -e^{-2/t^2}$, сопствене вредности од $A(t)$ су $\lambda(t) = \pm e^{-1/t^2}$. На пример, вектор $V(t) = (\cos(1/2t), \sin(1/2t))$ је сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda(t) = e^{-1/t^2}$. Међутим, овај сопствени вектор се не може продужити у свуда ненула непрекидно пресликавање у $t = 0$, јер пресликавање $t \mapsto V(t)$ јако осцилује и нема лимес кад $t \rightarrow 0$. $\triangle$

Међутим, ни Теорема А.25 ни Теорема А.27 не могу се продужити на вишепараметарски случај, што демонстрира наредни пример из [108].

Пример А.6. Размотримо двопараметарску фамилију самоадјунгованих ендоморфизама дефинисаних преко матрица

$$A(t, s) = \begin{pmatrix} 1 + 2t & t + s \\ t + s & 1 + 2s \end{pmatrix}$$

за $t, s \in \mathbb{R}$. Сопствене вредности од $A(t, s)$ су дате са $\lambda(t, s) = 1 + t + s \pm \sqrt{2(t^2 + s^2)}$, што није аналитичка функција ни у једној околини координатног почетка. $\triangle$

Неке вишепараметарске верзије теореме су предложили Курдика¹⁵ и Паунеску¹⁶ [78], али за наше потребе довољно је посматрати само једноставније случајеве. Кад радимо са вишепараметарским фамилијама самоадјунгованих ендоморфизама, аналитичка зависност сопствених вредности и сопствених вектора се губи у општем случају, као што смо демонстрирали у Примеру А.6.

Ако размотримо вишепараметарску фамилију хиперболичких моничних полинома $P_{A(T)}$ степена n , где је $T \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ отворен скуп са $m > 1$, онда се доказ Теореме А.25 не може директно продужити, јер више нисмо у могућности да изаберемо аналитички квадратни корен од $-b_2(T)$. На пример, узимање $A(t, s) = (0, -t^2 - s^2)$ доноси фамилију $P_{A(t,s)}(x) = x^2 - t^2 - s^2$, чији корени $\pm\sqrt{t^2 + s^2}$ нису аналитички у координатном почетку.

Међутим, ако вишеструкости сопствених вредности остају константне у околини дате тачке, тада можемо успоставити делимичну регуларност. Кад се вишеструкости не мењају док T варира, немамо преплитање сопствених вредности, те се полином $P_{B(T)}$ у Чирнхаусовој форми симултано раставља. Како $b_2(T) = 0$ представља само једну сопствену вредност максималне вишеструкости, то услов $b_2(0) = 0$ повлачи $b_2 = 0$, што је тривијалан случај. Преостали случај је $-b_2 > 0$, при чему се корени из $-b_2$ могу аналитички дефинисати под условом да је домен U просто повезан, чиме се обезбеђује да су аналитичке гране сопствених вредности глобално добро дефинисане на U .

Теорема А.28. Нека је $P_{A(T)}(x) = x^n + a_1(T)x^{n-1} + \dots + a_n(T)$ за $T \in U$ вишепараметарска фамилија хиперболичких моничних полинома степена n са реалним аналитичким коефицијентима $a_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ за $1 \leq j \leq n$, где је $U \subseteq \mathbb{R}^m$ просто повезан отворен скуп и $m > 1$. Ако вишеструкости корена остају константне кроз U , онда постоје аналитичке функције $\lambda_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ са $1 \leq j \leq n$ тако да је $P_{A(T)}(x) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j(T))$ за све $T \in U$.

А.6 Анализа

У овој секцији налазе се неки резултати из реалне анализе који су нам потребни у књизи.

¹⁵Krzysztof Kurdyka (1957), пољски математичар

¹⁶Laurențiu Păunescu (1952), румунско-аустралијски математичар

Пример А.7. Посматрајмо функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која је дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x \leq 0 \end{cases}.$$

За $x < 0$ очигледно имамо $f^{(n)}(x) = 0$, док за $x > 0$ индукцијом по n доказујемо да n -ти извод функције f има облик

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} f(x), \quad (\text{A.8})$$

где је $P_{n-1}(x)$ неки полином степена $n - 1$. База индукције је испуњена јер за $n = 1$ имамо $f'(x) = f(x)/x^2$, што се реализује за $P_0(x) = 1$. Корак индукције проверавамо кроз рачун

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{P'_{n-1}(x)}{x^{2n}} - 2n \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}} \right) f(x) \\ &= \frac{x^2 P'_{n-1}(x) - (2nx - 1) P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}} f(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2(n+1)}} f(x), \end{aligned}$$

где је $P_n(x)$ полином степена n добијен рекурзијом $P_n(x) = x^2 P'_{n-1}(x) - (2nx - 1) P_{n-1}(x)$. Иако је довољно рећи да је $P_n(x)$ полином степена не већег од n , из рекурентне везе видимо да је водећи коефицијент од $P_n(x)$ добијен од водећег коефицијента од $P_{n-1}(x)$ множењем са $-(n+1)$, односно да износи $(-1)^n (n+1)! \neq 0$.

Преостаје да докажемо да је десни извод функције f у тачки $x = 0$ једнак нули. Експоненцијална функција свакако доминира над степенима на позитивним x . На пример, за свако $m \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\frac{1}{x^m} = x \left(\frac{1}{x} \right)^{m+1} \leq (m+1)! x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{x} \right)^i = (m+1)! x e^{\frac{1}{x}},$$

и отуда

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} \leq (m+1)! \lim_{x \searrow 0} x = 0. \quad (\text{A.9})$$

Добијена формула (А.9) за $m = 1$ даје

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0,$$

те отуда $f'(0) = 0$. Како је (А.8) установљено за $x > 0$, формула (А.9) за $m = 2n + 1$ уз претпоставку да је $f^{(n)}(0) = 0$ повлачи

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n+1}} e^{-\frac{1}{x}} = P_{n-1}(0) \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+1}} = 0,$$

што индукцијом по n доказује да је $f^{(n)}(0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно да је f свуда глатка.

Функција f није аналитичка (у нули) јер како је $f^{(n)}(0) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ то Ма-клоренов¹⁷ ред од f конвергира ка нула функцији и не може бити једнак $f(x)$ за $x > 0$. Тако смо добили пример глатке функције која није аналитичка. $\triangle$

Лема А.29 (Адамарова лема). Ако је $U \ni a$ отворена конвексна околина у $\mathbb{R}^n$, онда за $f \in \mathfrak{F}(U)$ постоје функције $l_i \in \mathfrak{F}(U)$ за $1 \leq i \leq n$ иако да за свако $x \in U$ важи

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) l_i(x),$$

при чему је $l_i(a) = (\partial f / \partial \pi_i)(a)$.

¹⁷Colin Maclaurin (1698–1746), шкотски математичар

Доказ. Дефинишимо $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ са $h(t) = f(a + t(x - a))$, те како је

$$h'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x - a))(\pi_i(x) - \pi_i(a)),$$

имамо

$$f(x) - f(a) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = \sum_{i=1}^n (\pi_i(x) - \pi_i(a)) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x - a)) dt,$$

где је

$$l_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \pi_i}(a + t(x - a)) dt,$$

те је функција l_i глатка и важи $l_i(a) = (\partial f / \partial \pi_i)(a)$. $\square$

Ако је $f: U \rightarrow V$ глатка функција, где су $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$ отворени подскупови еуклидских простора, онда је (потпуни) **извод** од f у $p \in U$ линеарно пресликавање $f'(p): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ такво да за $v \in \mathbb{R}^m$ важи

$$(f'(p))(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv).$$

Теорема А.30 (Теорема о инверзној функцији). Нека је $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ глатка функција за отворен $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако је $f'(p)$ инвертибилно за $p \in U$, тада постоји околина $V \subseteq U$ од p таква да је $f|_V: V \rightarrow f(V)$ дифеоморфизам.

Доказ. На пример, видети Ли [81, Теорема С.34]. $\square$

А.7 Алгебра

Претпоставимо да скуп $\mathcal{V}$ има две бинарне операције $+$ и $\times$, те нека је 0 неутрални елемент за $+$. **Јакобијев идентитет** је једнакост дата са

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0, \quad (\text{А.10})$$

за све $x, y, z \in \mathcal{V}$. Стандардни векторски производ $x \times y$ задовољава Јакобијев идентитет, као и комутатор операција $[x, y] = x \times y - y \times x$. У општем случају имамо наредну лему.

Лема А.31. У подмодулу алгебре над прстеном који је затворен за комутијор, Јакобијев идентитет (А.10) важи за комутијор.

Доказ. Јакобијев идентитет $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ може се једноставно проверити, јер директан рачун по дефиницији даје дванаест чланова који се поништавају по паровима, $xyz - xzy - yzx + zyx + yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$. $\square$

Занимљиво је размотрити билинеарно пресликавање $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. У општем случају, слика $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}^n$ није векторски потпростор. Међутим, ако јесте, онда на располагању имамо наредне неједнакости које су дате у теорему коју је поставио Хауард¹⁸ 1980. године [72] (такође видети [102] за једноставнији доказ).

Теорема А.32. Ако је $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ билинеарно и сурјективно, онда је $n \leq 2m - 1$. Додатно, ако је f кососиметрично, онда је $n \leq 2m - 3$.

¹⁸Ralph Elwood Howard (1950), амерички математичар

A.8 Теорија бројева

Лема А.33 (Дирихлеова теорема о апроксимацији). *За свако $c \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$, постоје $m, n \in \mathbb{N}_0$ са $n \leq N$ и тако да је $|nc - m| \leq 1/N$.*

Доказ. Размотримо бројеве $pc - \lfloor pc \rfloor \in [0, 1)$ за целе бројеве $0 \leq p \leq N$. Ако изделимо интервал $[0, 1)$ на N подинтервала једнаких дужина, на основу Дирихлеовог принципа, два таква броја $0 \leq p < q \leq N$ морају бити у истом подинтервалу одакле добијамо $|(qc - \lfloor qc \rfloor) - (pc - \lfloor pc \rfloor)| < 1/N$. Коначно, постављамо $n = q - p$ и $m = \lfloor qc \rfloor - \lfloor pc \rfloor$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Annals of Math. **75** (1962), 603–632.
- [2] М. Антић, *Диференцијална геометрија мнојострукости*, Математички факултет, Београд, 2015.
- [3] В. Андрејић, *Прилој теорији псеудо-Риманових Осерманових мнојострукости*, Универзитет у Београду, магистарска теза, 2006.
- [4] V. Andrejić, *On certain classes of algebraic curvature tensors*, SFIN XXII A1 (2009), 43–50.
- [5] V. Andrejić, *Strong duality principle for four-dimensional Osserman manifolds*, Kragujevac J. Math. **33** (2010), 17–28.
- [6] В. Андрејић, *Принцип дуалности за Осерманове мнојострукости*, Универзитет у Београду, докторска теза, 2010.
- [7] V. Andrejić, *Duality principle and special Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 197–204.
- [8] V. Andrejić, *Quasi-special Osserman manifolds*, Filomat **28** (2014), 623–633.
- [9] V. Andrejić, *On Lorentzian spaces of constant sectional curvature*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **103** (2018), 7–15.
- [10] V. Andrejić, *Two-root Riemannian manifolds*, Mediterr. J. Math. **20** (2023), 100.
- [11] V. Andrejić, *The proportionality principle for Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **176** (2022), 104516.
- [12] V. Andrejić, *Equivalence between Jacobi-orthogonality and Osserman condition in dimension four*, J. Geom. Phys. **216** (2025), 105599.
- [13] V. Andrejić, K. Lukić, *On quasi-Clifford Osserman curvature tensors*, Filomat **33** (2019), 1241–1247.
- [14] V. Andrejić, K. Lukić, *On the existence of a curvature tensor for given Jacobi operators*, Filomat **37** (2023), 8465–8471.
- [15] V. Andrejić, K. Lukić, *The Orthogonality Principle for Osserman Manifolds*, Acta Math. Hungar. **173** (2024), 246–252.
- [16] V. Andrejić, Z. Rakić, *On the duality principle in pseudo-Riemannian Osserman manifolds*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2158–2166.
- [17] V. Andrejić, Z. Rakić, *On some aspects of duality principle*, Kyoto J. Math. **55** (2015), 567–577.

- [18] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Springer, 1971.
- [19] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, Vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [20] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [21] G. Birkhoff, *Metric foundations of geometry. I*, Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), 465–492.
- [22] R. L. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.
- [23] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey, *A Note on Osserman Lorentzian manifolds*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 227–230.
- [24] N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić, *Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2)*, J. Austral. Math. Soc. **71** (2001), 367–395.
- [25] N. Blažić, S. Vukmirović, *Examples of self-dual, Einstein metrics of (2,2)-signature*, Math. Scand. **94** (2004), 63–74.
- [26] A. Bonome, P. Castro, E. García-Río, L. Hervella, R. Vázquez-Lorenzo, *Pseudo-Riemannian manifolds with simple Jacobi operators*, J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 847–875.
- [27] R. Bott, J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Am. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.
- [28] L. E. J. Brouwer, *Beweis der invarianz des n -dimensionalen gebiets*, Math. Ann. **71** (1911), 305–313.
- [29] M. Brozos-Vázquez, E. Merino, *Equivalence between the Osserman condition and the Rakić duality principle in dimension 4*, J. Geom. Phys. **62** (2012), 2346–2352.
- [30] E. García-Río, P. Gilkey, M. E. Vázquez-Abal R. Vázquez-Lorenzo, *Four-dimensional Osserman metrics of neutral signature*, Pac. J. Math. **244** (2010), 21–36.
- [31] H. Busemann, *Metric methods of Finsler spaces and in the foundations of geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1942.
- [32] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I*, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 214–264.
- [33] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, II*, Bull. Soc. Math. France **55** (1927), 114–134.
- [34] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Boston, 1992.
- [35] P. Carpenter, *Harmonic Riemannian manifolds*, Durham University, PhD thesis, 1980.
- [36] P. Carpenter, A. Gray, T. Willmore, *The Curvature of Einstein Symmetric Spaces*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **33** (1982), 45–64.
- [37] Q. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 187–202.
- [38] Q. Chi, *Curvature characterization and classification of rank-one symmetric spaces*, Pac. J. Math. **150** (1991), 31–42.

- [39] E. A. de Costa, *Codimension two submanifolds with 2-nonnegative curvature operator*, Arch. Math. **90** (2008), 82–86.
- [40] M. Crainic, *Inleiding Topologie*, Lecture notes, 2019.
- [41] P. Clark, *Quadratic Forms, Chapter 1: Witt's theory*, Lecture notes, 2013.
- [42] M. Dajczer, K. Nomizu, *On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric*, Bol. Soc. Bras. Mat. **11** (1980), 25–30.
- [43] M. Dajczer, C.-R. Onti, T. Vlachos, *Einstein submanifolds with flat normal bundle in space forms are holonomic*, Proc. Am. Math. Soc. **146** (2018), 4035–4038.
- [44] M. Dajczer, R. Tojeiro *Submanifold theory, Beyond an introduction*, Universitext, Springer, 2019.
- [45] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl. **23** (1944), 65–76.
- [46] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differ. Geom. **18** (1983), 279–315.
- [47] B. Eckmann, *Gruppentheoretischer beweis des satzes von Hurwitz-Radon über die komposition quadratischer formen*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 358–366.
- [48] Y. Euh, J. Kim, Y. Nikolayevsky, J. Park, *On 2-stein submanifolds in space forms*, Result. Math. **77**, 84 (2022).
- [49] A. Fialkow, *Hypersurfaces of a space of constant curvature*, Annals of Math. **39** (1938), 762–785.
- [50] B. Fiedler, *Determination of the structure of algebraic curvature tensors by means of Young symmetrizers*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **48** (2003), Article B48d.
- [51] M. M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Matem. Palermo **22** (1906), 1–72.
- [52] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differ. Geom. **17** (1982), 357–453.
- [53] G. Freitas: *Submanifolds with homothetic Gauss map in codimension two*, Geom. Dedicata **180** (2016), 151–170.
- [54] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Pearson, 4th Edition, 2002.
- [55] P.M. Gadea, A. Montesinos, *Spaces of constant para-holomorphic sectional curvature*, Pacific J. Math. **136** (1989), 85–101.
- [56] P. Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal. **4** (1994), 155–158.
- [57] P. Gilkey, *Geometric properties of natural operators defined by the Riemann curvature tensor*, World Scientific, 2001.
- [58] P. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, Imperial College Press, 2007.
- [59] P. Gilkey, R. Ivanova, *The Jordan normal form of Osserman algebraic curvature tensors*, Result. Math. **40** (2001), 192–204.

- [60] P. Gilkey, R. Ivanova, *Spacelike Jordan Osserman algebraic curvature tensors in the higher signature setting*, Differential Geometry, Valencia 2001, World Scientific (2002), 179–186.
- [61] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **46** (1995), 299–320.
- [62] J. Gallier, J. Quaintance, *Differential geometry and Lie groups: A computational perspective*, Springer, 2020.
- [63] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, *On a problem of Osserman in Lorentzian geometry*, Differ. Geom. Appl. **7** (1997), 85–100.
- [64] E. García-Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo, *Affine Osserman connections and their Riemann extensions*, Differ. Geom. Appl. **11** (1999), 145–153.
- [65] E. García-Río, D.N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 2002.
- [66] A. Gray, T. J. Willmore, *Mean-value theorems for Riemannian manifolds*, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A **92** (1982), 343–364.
- [67] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **61** (1991), 9–123.
- [68] G. Gross, E. Meinrenken, *Manifolds, vector fields and differential forms*, Springer, 2023.
- [69] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.
- [70] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [71] H. Hopf, W. Rinow, *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. **3** (1931), 209–225.
- [72] R. Howard, *Dimension inequalities on the range of a multilinear function with vector space range*, Linear Multilinear Algebra **8** (1980), 247–252.
- [73] A. Hurwitz, *Über die komposition der quadratischen formen*, Math. Ann. **88** (1923), 1–25.
- [74] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, corrected printing of the 2nd Edition, Springer, 1995.
- [75] M. Kervaire, *Non-Parallelizability of the n -Sphere for $n > 7$* , Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280–283.
- [76] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 257–270.
- [77] R.S. Kulkarni, *The values of sectional curvature in indefinite metrics*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 173–176.
- [78] K. Kurdyka, L. Păunescu, *Hyperbolic polynomials and multiparameter real-analytic perturbation theory*, Duke Math. J. **141** (2008), 123–149.
- [79] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2009.
- [80] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2011.

- [81] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2013.
- [82] John M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2018.
- [83] L. A. Lichtenfelz, P. Piccione, A. Zeghib, *On the isometry group of Lorentz manifolds*. In: *Recent trends in Lorentzian geometry*, Springer, 2013, 277–293.
- [84] K. Lukić, *The Jacobi-orthogonality in indefinite scalar product spaces*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **115** (2024), 33–44.
- [85] A. I. Mal'cev, *Foundations of linear algebra*, W. H. Freeman and company, 1963.
- [86] Y. Matsuyama: *Minimal Einstein submanifolds with codimension two*, Tensor (N.S.) **52** (1993), 61–68.
- [87] E. Meinrenken, *Clifford Algebras and Lie Theory*, Springer, 2013.
- [88] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Math. **64** (1956), 399–405.
- [89] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer, 1977.
- [90] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.
- [91] S. B. Myers, N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Annals of Math. **40** (1939), 400–416.
- [92] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds and Clifford structures*, Houston J. Math. **29** (2003), 59–75.
- [93] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension 8*, Manuscripta Math. **115** (2004), 31–53.
- [94] Y. Nikolayevsky, *Osserman conjecture in dimension $n \neq 8, 16$* , Math. Ann. **331** (2005), 505–522.
- [95] Y. Nikolayevsky, *On Osserman manifolds of dimension 16*, Contemporary Geometry and Related Topics, Proc. Conference, Belgrade (2006), 379–398.
- [96] Y. Nikolayevsky, *Conformally Osserman manifolds*, Pac. J. Math. **245** (2010), 315–358.
- [97] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *A note on Rakić duality principle for Osserman manifolds*, Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. **94** (2013), 43–45.
- [98] Y. Nikolayevsky, Z. Rakić, *The duality principle for Osserman algebraic curvature tensors*, Linear Algebra Appl. **504** (2016), 574–580.
- [99] Z. Olszak *On the existence of generalized space forms*, Israel. J. Math. **65** (1989), 214–218.
- [100] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [101] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Am. Math. Mon. **97** (1990), 731–756.
- [102] P. Pamflos, *On the dimensions of the image of a multilinear function*, Linear Multilinear Algebra **20** (1987), 333–336.
- [103] A. Parusiński, A. Rainer *Perturbation theory of polynomials and linear operators*. In: *Handbook of Geometry and Topology of Singularities VII*, Springer, 2025, 121–202.

- [104] H. Poincaré, *Analysis Situs*, J. Éc. Polytech., Math. (1895), 1–123.
- [105] J. Radon, *Lineare scharen orthogonaler matrizen*, Abh. Sem. Hamburg I (1923), 1–14.
- [106] Z. Rakić, *Ossermanove mnogostrukosti*, Univerzitet u Beogradu, doktorska teza, 1998.
- [107] Z. Rakić, *On duality principle in Osserman manifolds*, Linear Algebra Appl. **296** (1999), 183–189.
- [108] F. Rellich, *Störungstheorie der Spektralzerlegung. I.*, Math. Ann. **113** (1937), 600–619.
- [109] F. Rellich, *Perturbation theory of eigenvalue problems*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [110] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Mitgetheilt durch R. Dedekind), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen **13** (1868), 133–152.
- [111] B. Riemann, *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry* (translated by W. K. Clifford), Nature **8** (1873), 14–17, 36–37.
- [112] F. Schur, *Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmaasses mit den projectiven Räumen*, Math. Ann. **27** (1886), 537–567.
- [113] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 2, 3rd Edition, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1999.
- [114] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58** (1962), 481–488.
- [115] N. Steenrod, *The topology of fiber bundle*, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [116] C. H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Differ. Geom. **25** (1987), 363–430.
- [117] J. Tits, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. **29** (1955).
- [118] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd Edition, Springer, 2011.
- [119] O. Veblen, J. Whitehead, *A set of axioms for differential geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 551–561.
- [120] O. Veblen, J. Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambridge University Press, 1932.
- [121] A. G. Walker, *Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser. **1** (1950), 69–79.
- [122] H. C. Wang, *Two-point homogeneous spaces*, Annals of Math. **55** (1952), 177–191.
- [123] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [124] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, 6th Edition, AMS Chelsea Publishing, 2011.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

- Berger, Marcel, 85
isomorphism
 musical, 85
Адамар, Жак, 30
Адамс, Џон, 59
Ајнштајн, Алберт, 135
аксиома
 друга пребројивости, 7, 225
 прва пребројивости, 225
алгебра
 Лијева, 45
Александров, Павел, 7
Андрејић, Владица, 127, 161, 162, 165,
 170, 171, 172, 173, 174, 177, 179,
 180, 184, 186, 193, 200, 201, 202,
 211, 212, 213, 217, 222
Антић, Мирослава, iv
атлас, 11, 4
 гладак, 11
 комплетан, 5
 комплетан раслојења, 52
 раслојења, 52
 тополошки, 4
база
 локална топологије, 224
 пребројива, 7
 раслојења, 52
 сопствена, 227
 топологије, 224
 уопштена локална топологије, 224
Берже, Марсел, 85
Бесе, Артур, 135, 209, 211
Биркхоф, Герет, 152
Бјанки, Луиђи, 118
Блажић, Новица, 162
блок
 Жорданов, 230
 реални Жорданов, 232
Бокан, Неда, 162
Бољај, Јанош, 1
Борел, Емил, 226
Бот, Раул, 58
Браувер, Лојцен, 226
брзина, 93
 јединична, 95
 криве, 94
Брозос-Васкез, Мигуел, 184
Бусеман, Херберт, 152
Вајнберг, Стивен, 124
Вајнгартен, Јулијус, 146
Вајтхед, Хенри, 2
Ванг, Хсиен Чунг, 152
Вандермонд, Александар-Теофил, 159
Ванхеке, Ливен, 211
варијација
 кроз геодезијске, 140
Васкез-Абал, Марија Елена, 155
Васкез-Лорензо, Рамон, iv, 155, 198,
 204, 211, 213
Веблен, Освалд, 2
вектор
 брзине, 93
 временски, 73
 дефинитан, 73
 изотропан, 73
 јединичан, 73
 просторан, 73
 сопствени, 226
 тангентни, 29
 уопштени сопствени, 228
вектори
 ортогонални, 73
 ортонормирани, 74
Вијет, Франсоа, 233
Вилмор, Томас Џејмс, 156, 209
Вит, Ернст, 77
Витнијева сума, 54
Витни, Хеслер, 54
вишеструкост, 227
 агеометријска, 227
 алгебарска, 227
 конјугације, 144

- влакно, 52
- Вокер, Артур, 79
- Волф, Џозеф, 151, 152
- вредност
 - комплексна сопствена, 230
 - регуларна, 42
 - сопствена, 226
- Галије, Жан Анри, iv
- Гарсија-Рио, Едуардо, iv, 155, 161, 198, 204, 211, 213
- Гаус, Карл Фридрих, 1
- геодезијска
 - крива, 107
 - максимална, 108
 - радијална, 110
- геометрија
 - псеудо-Риманова, 83
- Гилки, Питер, iv, 153, 156, 162, 171, 172, 175, 208, 211
- градијент, 85
- Грам, Јорген Педерсен, 58
- Грасман, Херман, 74
- график, 8
- Греј, Алфред, 156, 209
- Громов, Михаил, iii
- Грос, Гал, iv
- група
 - изометрија, 83
 - изотропије, 87, 88
 - Лијева, 20
 - линеарна, 12, 20
 - Лоренцова, 93
- гурање
 - векторског поља, 49
 - тангентног вектора, 48
- Дахцер, Маркос, iv, 133
- Дедекинд, Рихард, 1
- дејство
 - глатко, 87
 - групе, 87
 - слободно, 87
 - транзитивно, 87
- дефинитност, 72
 - негативна, 72
 - позитивна, 72
- дивергенција, 133
- димензија
 - атласа, 4
 - карте, 3
 - многострукости, 11
- Дирихле, Лежен, 39
- дистрибуција, 56
- дифеоморфизам, 3
 - између многострукости, 20
 - локални, 35
- диференцијал, 32, 60
- диференцирање, 44
 - у тачки, 29
- Дједоне, Жан, 10
- Доналдсон, Сајмон, 23
- дужина
 - вектора, 73
 - лука, 94
- еквиваленција
 - конформна, 89
- Екман, Бено, 59
- елемент
 - дужински, 79
- ендоморфизам, 226
 - дијагонализабилан, 227
- Еуклид из Александрије, 1
- затворење, 224
- знак
 - хиперповрши, 149
- Иванова, Рајна, 153, 175
- идентитет
 - Бјанкијев, 118
 - други Бјанкијев, 120
 - Јакобијев, 45, 121, 244
 - контракован Бјанкијев, 135
 - први Бјанкијев, 119
 - Ричијев, 138
- извод, 244
 - коваријантни, 99
 - коваријантни дуж криве, 104
 - Лијев, 70
 - парцијални, 30
 - потпун коваријантни, 99
 - тензорског поља, 68
- изометрија, 83
 - линеарна, 75
 - локална, 83
- изоморфизам
 - музички, 85
 - раслојења, 54
 - раслојења над, 54
- имерзија, 35
 - псеудо-Риманова, 83
- индекс
 - Витов, 77
 - квадратног простора, 75
 - псеудо-Риманове многострукости, 78
 - скаларног производа, 75

- Инсел, Арнолд, 226
 исцрпљивање, 11
 Јакобијан, 34
 Јакоби, Карл, 34
 једначина
 Гаусова, 147, 148
 Јакобијева, 140
 Кодаци–Мајнарди, 147
 Кодацијева, 147
 Ричијева, 147
 једначине
 локалне геодезијске, 107
 карактер
 узрочни, 73
 Кармо, Манфредо до, iv
 Карпендер, Пол, 156, 208
 карта
 раслојења, 52
 скупа, 3
 тополошког простора, 8
 центрирана, 3
 Картан, Ели, 150
 карте
 глатко сагласне, 11
 компатибилне, 3
 кришка, 41
 сагласне, 3, 11
 Като, Тосио, 238
 Кејли, Артур, 152
 Кентанс, Жоселин, iv
 Кервер, Мишел, 23, 58
 Клајн, Феликс, 78
 Кларк, Пит, iv
 класа
 функције, 3
 Клифорд, Вилијам Кингдон, 2
 клица, 30
 коектори
 тангентни, 60
 Кодаци, Делфино, 147
 кодимензија, 39
 коиндекс
 подмногострукости, 149
 компактност, 225
 локална, 226
 компатибилност
 Јакобијевих оператора, 124
 комплексификација
 векторског простора, 230
 ендоморфизма, 230
 комплемент
 ортогонални, 73
 комплетност
 геодезијска, 108, 115
 компонента
 повезаности, 225
 тензорског поља, 66
 комутатор, 45
 коначност
 локална, 10
 конвергенција, 224
 конекција, 99
 контракција, 67
 конус
 изотропни, 75
 координате, 3
 нормалне, 111
 хомогене, 15
 Косил, Жан-Луј, 102
 Коши, Огистен Луј, 115
 Крајник, Маријус, 224
 Крамер, Габријел, 20
 крива, 93
 допуштена, 94
 минимизујућа, 113
 регуларна, 94
 кривина
 главна, 149
 секциона, 125
 скаларна, 134
 Кристофел, Елвин, 100
 круг
 велики, 148
 кугла
 геодезијска, 113
 еуклидска, 9
 јединична, 21
 нормална, 113
 тангентна, 113
 Кулкарни, Равиндра, 132
 Купели, Демир Нури, iv, 155, 161, 198, 204, 211, 213
 Курдика, Кшиштоф, 242
 Лајбниц, Готфрид Вилхелм, 29
 Лапласијан, 133
 Лаплас, Пјер-Симон, 133
 Лебег, Анри, 94
 Леви-Чивита, Тулио, 102
 лема
 Адамарова, 30, 243
 Гаусова, 113
 о лепљењу глатких пресликавања, 19
 Урисонова, 26

- Лијева заграда, 45
 Линделоф, Ернст, 108
 Ли, Софус, 20
 Ли, Џефри, iv
 Ли, Џон, iv
 Лобачевски, Николај, 1
 Лоренц, Хендрик, 78
 Лукић, Катарина, 173, 174, 177, 179, 186
 Мајерс, Самнер, 83
 Мајнард, Гаспаре, 147
 Мајнренкен, Екхард, iv
 Маклорен, Колин, 243
 Маљцев, Анатолиј, 234
 матрица
 Грамова, 72
 Жорданова, 230
 Јакобијан, 34
 Јакобијева, 34
 реална Жорданова, 232
 Мерино, Еугенио, 184
 метла
 бесконачна, 225
 метрика, 78
 Вокерова, 79
 еуклидска, 79
 Клајнова, 78
 Лоренцова, 78
 неутрална, 78
 округла, 88
 производ, 83
 Риманова, 78, 82
 метрике
 конформне, 89
 Милнор, Џон, 23, 58
 Минковски, Херман, 79
 многострукост, 11, 7
 Ајнштајнова, 135
 амбијентна, 39
 глатка, 11
 глобално Жордан-Осерманова, 204
 глобално Осерманова, 204
 две-тачке хомогена, 151
 диференцијална, 11
 изотропна, 88
 Јакоби-дијагонализабилна, 204
 један-корен, 211
 Клајнова, 78
 корен, 204
 Лоренцова, 78
 Осерманова, 204
 паралелизабилна, 55
 производ, 14
 псеудо-Риманова, 78
 Риманова, 78
 Риманова Осерманова, 203
 супер-Ајнштајнова, 209
 тачка по тачка
 Жордан-Осерманова, 204
 тачка по тачка Осерманова, 204
 тополошка, 7
 хомогена, 87
 штајн, 208
 многострукости
 дифеоморфне, 20
 изометричне, 83
 хомеоморфне, 20
 модел
 Поенкареов кугла, 90
 Поенкареов полупростор, 91
 Моиз, Едвин, 23
 Морита, Шигејуки, iv
 Николајевски, Јури, 173, 186, 197, 203
 Номицу, Кацуми, 133
 норма
 вектора, 73
 квадратна, 73
 носач, 17
 Ојлер, Леонард, 87
 околина, 224
 координатна, 3
 нормална, 111
 потпуно нормална, 111
 уопштена, 224
 О'Нил, Барет, iv
 оператор
 афини кривине, 123
 Јакобијев, 124
 косоадјунгован, 123
 кососиметричан, 123
 кривине, 118
 облика, 146, 149
 паралелног померања, 106
 поларизован Јакобијев, 124
 редукован Јакобијев, 124
 самоадјунгован, 123
 симетричан, 123
 орбита, 87
 Осерман, Роберт, iii, 203
 особина
 локална, 225
 паракомпактност, 10
 параметри
 конјуговани, 144
 параметризација

- дужином лука, 95
- локална, 3
- уназад, 94
- унапред, 94
- Парусињски, Адам, 238
- Паунеску, Лауренцију, 242
- Пикар, Шарл, 108
- повезаност, 225, 99
 - компатибилна са метриком, 106
 - Леви-Чивита, 102
 - локална, 225
 - локално путна, 225
 - метричка, 101
 - нормална, 146
 - путна, 225
 - симетрична, 101
 - стандардна, 99
- повисилица, 85
- повлачење, 63
 - коваријантног тензора, 68
 - ковекторског поља, 63
- подмногострукост, 39
 - кришка, 40
 - отворена, 12
 - потопљена, 40
 - потпуно геодезијска, 148
 - псеудо-Риманова, 82
 - регуларна, 40
 - Риманова, 82
 - смештена, 40
- подраслојење, 56
- подређеност, 25
- подржано, 17
 - компактно, 17
- подскуп
 - компактан, 225
 - повезан, 225
 - путно повезан, 225
 - релативно компактан, 225
- Поенкаре, Жил Анри, 2
- покретни репер
 - глобални, 55
 - координатни, 55
 - локални, 55
 - локални ортонормирани, 80
- покривач, 225
 - отворен, 225
- полином
 - карактеристични, 227
 - минимални, 228
 - растављив, 227
- поља
 - f -везана векторска, 49
- поље
 - варијационо векторско, 140
 - векторско, 44
 - векторско дуж криве, 104
 - Јакобијево, 140
 - ковекторско, 61
 - координатно векторско, 44
 - нормално векторско, 142
 - нормално Јакобијево, 142
 - паралелно векторско, 105
 - паралелно тензорско, 99
 - продуживо векторско, 104
 - тангентно векторско, 141
 - тензорско, 64
- померање
 - паралелно, 106
- потапање, 35
- потпокривач, 225
- потпростор
 - инваријантан, 227
 - негативно дефинитан, 74
 - недегенерисан, 74
 - нормалан, 73
 - ортогонални, 73
 - позитивно дефинитан, 74
 - потпуно изотропан, 76
 - циклични, 227
- права
 - дугачка, 7
 - са очима, 6
- правац
 - главни, 149
- пресликавање
 - базно, 54
 - глатко, 19
 - глатко између многострукости, 18
 - глатко у тачки, 18, 19
 - глобално тангентно, 48
 - двопараметарско, 112
 - експоненцијално, 110
 - константног ранга, 35
 - конформно, 88
 - непрекидно, 224
 - пуног ранга, 35
 - тангентно, 32
- принцип
 - дуалности, 170
- производ
 - ермитски скаларни, 234
 - комплексни скаларни, 234
 - псеудо-Риманов, 83

- симетричан, 68
- скаларни, 72
- тензорски, 65
- уврнути, 83
- унутрашњи, 72
- пројекција
 - нормална, 145
 - раслојења, 52
 - стереографска, 13
 - тангентна, 145
 - хиперболичка стереографска, 90
- простор
 - анти-де Ситеров, 93
 - де Ситеров, 93
 - ермитски квадратни векторски, 234
 - еуклидски, 12, 79
 - квадратни, 72
 - квадратни векторски, 72
 - количнички, 15
 - компактан, 225
 - комплексни квадратни векторски, 234
 - комплексни пројективни, 16
 - константне кривине, 131
 - котангентни, 60
 - локално еуклидски, 4
 - локално компактан, 226
 - локално повезан, 225
 - локално путно повезан, 225
 - локално симетричан, 150
 - Минковског, 79
 - нормалан, 224
 - нормални, 145
 - повезан, 225
 - псеудо-еуклидски, 79
 - псеудохиперболички, 93
 - путни, 95
 - путно повезан, 225
 - раслојења, 52
 - реални пројективни, 15
 - регуларан, 224
 - са скаларним производом, 72
 - са унутрашњим производом, 72
 - симетричан, 150
 - сопствени, 226
 - тангентни, 29
 - тополошки, 224
 - унитаран, 234
 - уопштени сопствени, 228, 231
 - Хаусдорфов, 6, 224
- простори
 - хомеоморфни, 224
 - профињење, 10
 - псеудосфера, 93
 - раван
 - тангентна, 125
 - радикал, 74
 - Радон, Јохан, 59
 - разбијање
 - интервала, 94
 - јединице, 25
 - Рајнер, Армин, 238
 - Ракић, Зоран, 161, 169, 171, 174, 184, 186
 - ранг
 - константан, 57
 - пресликавања, 34
 - раслојења, 52
 - симетричног простора, 151
 - хомоморфизма раслојења, 57
 - раслојење
 - амбијентно тангентно, 145
 - векторско, 52
 - временско јединично тангентно, 203
 - котангентно, 61
 - нормално, 145
 - производ, 53
 - просторно јединично тангентно, 203
 - рестрикција, 53
 - тангентно, 43, 53
 - тривијално, 54
 - растојање
 - Риманово, 95
 - ред
 - тензора, 64
 - релација
 - Хурвицова, 58
 - Релих, Франц, 238
 - репараметризација
 - допуштене криве, 94
 - криве, 94
 - монотона, 94
 - репрезентација
 - изотропна, 88
 - координатна, 18
 - Риман, Бернхард, 1
 - Ринов, Вили, 116
 - Ричи-Курбастро, Грегорио, 134, 147
 - Сакери, Ђовани, 1
 - Сван, Ендру Франсис, 211
 - својство
 - Шурово, 208

- сегмент
 - део по део регуларни, 94
 - регуларни криве, 94
- сечење
 - векторског раслојења, 55
 - нула, 55
 - тангентног раслојења, 44
- сигнатура, 75
 - потпростора, 77
- Силвестеров закон инерције, 75
- Силвестер, Џејмс, 75
- симбол
 - Кристофелов, 100
- симетрија
 - геодезијска, 150
- симетричан део, 68
- синусоида
 - тополошка, 225
- систем
 - локални координатни, 3
- Ситер, Вилем де, 93
- скуп
 - затворен, 224
 - количнички, 14
 - отворен, 224
 - пребројив, 223
 - пребројиво бесконачан, 223
- скуп нивоа
 - регуларан, 42
- смештање, 38
 - тополошко, 38
- снизивица, 84
- Спивак, Мајкл, 2
- стабилизатор, 87
- Сталингс, Џон, 23
- Стинрод, Норман, 60, 83
- структура
 - глатка, 11
 - стандардна глатка, 12
- субмерзија, 35
- сфера, 13, 9
 - геодезијска, 113
 - нормална, 113
 - тангентна, 113
- Таубс, Клифорд, 23
- тачка
 - изолована, 224
 - критична, 42
 - регуларна, 42
- тачке
 - конјуговане, 144
- Тејлор, Брук, 30
- тензор, 64
 - алгебарски кривине, 122
 - анти-Клифорд, 178
 - антисиметричан, 68
 - временски Жордан-Осерманов, 153
 - временски Осерманов, 153
 - Жордан-Осерманов, 153
 - Јакоби-дијагонализабилан, 153
 - Јакоби-дуалан, 170
 - Јакоби-ортогоналан, 186
 - Јакоби-пропорционалан, 199
 - квази-Клифорд, 173
 - Клифорд, 173
 - коваријантни, 65
 - контраваријантни, 65
 - корен, 153
 - кривине, 119
 - метрички, 78
 - облика, 146
 - Осерманов, 153
 - полу-Клифорд, 177
 - потпуно Јакоби-дуалан, 170
 - просторно Жордан-Осерманов, 153
 - просторно Осерманов, 153
 - Ричијев, 134
 - симетричан, 68
 - слабо Јакоби-дуалан, 170
 - штајн, 156
- теорема
 - Дирихлеова, 39, 245
 - Кејли-Хамилтон, 228
 - о инваријантности димензије, 5, 33, 226
 - о инваријантности домена, 226
 - о инверзној функцији, 35, 244
 - о константном рангу, 36
 - основна алгебре, 230
 - о чешљању јежа, 58
 - спектрална, 236
 - Тејлорова, 30
 - Хајне-Борел, 226
 - Хопф-Ринов, 116
- Титс, Жак, 152
- Тожеиро, Руј, iv
- топологија, 224
 - атласа, 4
 - количничка, 224
 - релативна, 224
- торзија, 101
- торус, 14
- траг

- тензора, 86
 тривијализација, 54
 локална, 54
 Ту, Лоринг, iv
 убрзање, 107
 улагање, 38
 унутрашњост, 224
 Урисон, Павел, 26
 услов
 Хаусдорфов, 6
 фамилија
 Клифордова, 172
 флаша
 Клајнова, 87
 форма
 билинеарна, 72
 друга основна, 146
 ермитска, 234
 Жорданова нормална, 232
 квадратна, 234
 недегенерисана, 72
 сесквилинеарна, 234
 симетрична, 72
 скаларна друга основна, 146
 формула
 Вајнгартенова, 146
 Гаусова, 146
 Косилова, 102
 Фреше, Морис Рене, 2
 Фридберг, Лоренс, 226
 Фридберг, Стивен, 226
 Фридман, Мајкл, 23
 функција
 глатка, 3
 глатка на многострукости, 16
 глатка у тачки многострукости, 16
 диференцијабилна, 3
 дужине лука, 94
 карактеристична, 19
 координатна, 3
 неаналитичка, 24
 преласка, 3
 угаона, 36
 Хурвиц-Радон, 59
 џомбаста, 24
 Хајам, Омар, 1
 Хајне, Хајнрих, 226
 Хауард, Ралф, 244
 Хаусдорф, Феликс, 2
 Хелгасон, Сигурдур, 152
 Хесе, Лудвиг Ото, 100
 Хесијан, 100
 хиперповрш, 40
 псеудо-Риманова, 149
 хипотеза
 Осерманова, 203
 хомеоморфизам, 224, 3
 хомоморфизам
 раслојења, 54
 раслојења над, 54
 Хопф, Хајнц, 116
 Хурвиц, Адолф, 58, 59
 Цермело, Ернст, 7
 Чирнхаус, Еренфрид Валтер фон, 238
 Чи, Ђуо-Шин, 169, 198, 203
 Шмит, Ерхард, 58
 Шур, Фридрих, 130