

Геометрија 4 - 2014 - Тест (10.05.2014)

Тест се попуњава тако што се у празне кућице уписују реални бројеви, док се попуњене кућице или заокруже или прецртају у зависности од тога шта може бити решење...

Скраћенице које користимо су:

$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ - реална пројективна раван

$\mathbb{Q}\mathbb{P}^2$ - рационална пројективна раван

$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ - комплексна пројективна раван

$\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ - Фаноова раван

$\mathbb{E}\mathbb{P}^2$ - проширена еуклидска раван

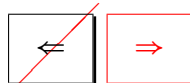
1. **4** У некој пројективној равни постоји тачка која је инцидентна са тачно 4 праве. Ако укупан број тачака те пројективне равни означимо са t , колика је минимална, а колика максимална вредност за t ?

$$\boxed{13} \leq t \leq \boxed{13}$$

Како постоји тачка инцидентна са коначно много правих у питању је коначна пројективна раван. За коначну пројективну раван постоји константа r , таква да је свака права инцидентна са тачно $r + 1$ тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно $r + 1$ правих. Број r зове се ред коначне пројективне равни, а у нашем конкретном задатку је $r = 3$. Број тачака коначне пројективне равни једнак је $r^2 + r + 1 = 13$.

2. **3** У пројективној равни упоредити тврђења.

Основна теорема пројективитета



Обрнута Дезаргова теорема

Теорема о перспективитету

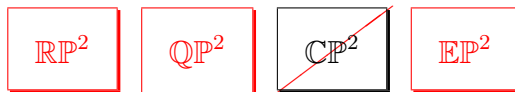
Папосова теорема

Дезаргова теорема

Фаноова аксиома

Основна теорема пројективитета је еквивалентна са Папосовом теоремом која повлачи Дезаргову теорему, а она повлачи Обрнуту Дезаргову теорему. Аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ где је \mathbb{F} тело које није поље јесу Дезаргове, али не и Папосове, а како је Основна теорема пројективитета еквивалентна са Папосовом, а Обрнута Дезаргова теорема са Дезарговом то обрат не важи. Теорема о перспективитету и Папосова теорема су еквивалентне. У Фаноовој равни важи Дезаргова теорема, али не и Фаноова аксиома. У Молтоновој равни важи Фаноова аксиома, али не и Дезаргова теорема.

3. 2 У којим од наведених пројективних равни свака колинеација је пројективна колинеација?



Уколико је идентитет једини аутоморфизам поља \mathbb{F} онда је свака колинеација у $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ пројективна колинеација. За $\mathbb{Q}\mathbb{P}^2$ то је очигледно, док смо захваљујући поретку то проширили и на $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ што је исто што и $\mathbb{E}\mathbb{P}^2$. Конјугат је аутоморфизам $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ који није идентитет!

4. 2 У којим од наведених пројективних равни свака перспективна колинеација је пројективна колинеација?



Ако је рестриција колинеације f пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је f пројективна колинеација. Како свака перспективна колинеација f има осу s , а рестриција $f|_s = \text{Id}$ је пројективитет, то је она пројективна колинеација.

5. 5 У $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ дате су тачке $A(1 : 2 : 3)$ и $B(0 : 2 : 1)$ својим хомогеним координатама. Одредити једначину спојнице $p = A \vee B$. Ако је q права дата једначином $x_1 + 2x_2 = 0$, одредити хомогене координате пресека $C = p \wedge q$. Одредити координате тачке D за коју је $\mathcal{H}(AB; CD)$.

$$p : x_1 + \boxed{\frac{1}{4}} x_2 + \boxed{-\frac{1}{2}} x_3 = 0 \quad C \left(\boxed{-2} : 1 : \boxed{-\frac{7}{2}} \right) \quad D \left(5 : \boxed{\frac{45}{2}} : \boxed{\frac{85}{4}} \right)$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = \vec{A} \times \vec{B} = (1, 2, 3) \times (0, 2, 1) = (-4, -1, 2) \Rightarrow p = [-4 : -1 : 2] = [1 : \frac{1}{4} : -\frac{1}{2}]$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{p \wedge q} = \vec{p} \times \vec{q} = (-4, -1, 2) \times (1, 2, 0) = (-4, 2, -7) \Rightarrow C = (-4 : 2 : -7) = (-2 : 1 : -\frac{7}{2})$$

$$\mathcal{H}(AB; CD) \Rightarrow (ABCD) = -1, \text{ одакле } \vec{C} = -4\vec{A} + 5\vec{B} \Rightarrow \vec{D} = 4\vec{A} + 5\vec{B} = (4, 18, 17).$$

$$D = (4 : 18 : 17) = (5 : \frac{45}{2} : \frac{85}{4})$$

6. 5 Хомологија је задата формулама $\lambda x'_1 = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x'_2 = x_1 + x_3$, $\lambda x'_3 = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Одредити осу s , противосу u и центар S те хомологије.

$$s : x_1 + \boxed{1} x_2 + \boxed{1} x_3 = 0 \quad u : x_1 + \boxed{1} x_2 + \boxed{\frac{2}{3}} x_3 = 0 \quad S(1 : \boxed{-1} : \boxed{-3})$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$(A + 1\text{Id})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow s = [1 : 1 : 1]$$

$$(A - 2\text{Id})X = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1 : x_2 : x_3) = (1 : -1 : -3) = S$$

Противосу представља последња врста од A , те је $u = [3 : 3 : 2] = [1 : 1 : \frac{2}{3}]$

7. 5 У \mathbb{RP}^2 дата је коника једначином $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.
Одредити тангенте из тачке $A(1:1:1)$ на ту конику. Тангенте су

$$x_1 + \boxed{0}x_2 + \boxed{-1}x_3 = 0 \qquad x_1 + \boxed{-1}x_2 + \boxed{0}x_3 = 0$$

$$(x'_1 \ x'_2 \ x'_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{pol}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Полару $x_1 = x_2 + x_3$ мењамо у криву $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и добијамо пресек за који важи $4x_2x_3 = 0$, односно $x_2 = 0$ или $x_3 = 0$, што са $x_1 = x_2 + x_3$ даје додирне тачке $(1:0:1)$ и $(1:1:0)$. Њихове спојнице са $A(1:1:1)$ су тангенте $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$, односно $[1:0:-1]$ и $[1:-1:0]$

8. 1 Ако су a и b различите паралелне праве које нису нормалне на π , које су везе између њихових нормалних пројекција могуће?

$a' \parallel b'$
 $a' \nparallel b'$
 $a' = b'$
 $a' \perp b'$

9. 1 Ако су a и b мимоилазне праве које нису нормалне на π , које су везе између њихових нормалних пројекција могуће?

$a' \parallel b'$
 $a' \nparallel b'$
 $a' = b'$
 $a' \perp b'$

10. 1 Ако су праве a и b трагови равни α и β и важи $a \perp b$, које су везе између равни могуће?

$\alpha \parallel \beta$
 $\alpha \nparallel \beta$
 $\alpha \perp \beta$
 $\alpha \pm \beta$

11. 1 Ако су праве a и b трагови равни α и β и важи $a \parallel b$, које су везе између равни могуће?

$\alpha \parallel \beta$
 $\alpha \nparallel \beta$
 $\alpha \perp \beta$
 $\alpha \pm \beta$