Владица Андрејић

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Верзија: 29. мај 2018.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
БЕОГРАД 2018.

Глава 1

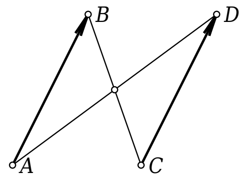
Вектори у геометрији

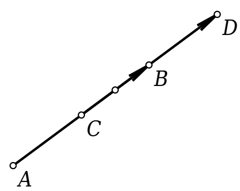
1.1 Увођење вектора

Појам вектора у еуклидској геометрији можемо дефинисати на различите начине. Уобичајено, у питању је класа уређених парова тачака еуклидског простора $\mathbb{E}$ (обично посматрамо просторе димензије 1, 2, или 3, односно праву, раван или простор), при чему описујемо кад два уређена пара тачака припадају истој класи. Можемо рећи да је уређен пар тачака (A, B) у релацији $\sim$ са уређеним паром тачака (C, D) ако постоји транслација простора која тачку A пресликава у тачку C, а тачку B пресликава у тачку D. Заправо основна идеја је да су (A, B) и (C, D) у релацији ако је $ABDC$ паралелограм. Како је уобичајено да код паралелограма подразумевамо да су његова темена различите тачке, као и да се праве одређене његовим страницама не преклапају, то уводимо дефиницију конкретне релације $\sim$ која ће обједините и те дегенерисане случајеве.

Дефиниција 1.1. Уређен пар тачака $(A, B) \in \mathbb{E}^2$ је у релацији $\sim$ са $(C, D) \in \mathbb{E}^2$ уколико дужи AD и BC имају заједничко средиште.

Како је познато да је четвороугао паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове, то Дефиниција 1.1 реализује нашу идеју, при чему лепо покрива и дегенерисане случајеве. Према томе ако је $(A, B) \sim (C, D)$ то разликујемо два случаја, у првом је четвороугао $ABDC$ паралелограм, док у другом све четири тачке леже на истој правој, при чему дужи AD и BC имају заједничко средиште.





У сваком случају суштина вектора је да (A, B) и (C, D) припадају истој класи ако имају једнаке дужине (дуж AB подударна је дужи CD), као и једнак смер (за $A \neq B$ и $C \neq D$, полуправа $[A, B)$ је паралелна полуправој $[C, D)$, детаље ћемо видети касније), што се лако закључује из претходне дефиниције.

***Теорема* 1.1.** *Уведена релација $\sim$ је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност релације $\sim$ је очигледна из Дефиниције 1.1, док је транзитивност последица транзитивности подударности дужи и транзитивности паралелности полуправих у еуклидском простору. $\square$

Релација еквиваленције раставља скуп на којем је дефинисана на дисјунктне подскупове које називамо класама еквиваленције. Свака класа еквиваленције састоји се од елемената скупа који су сви међусобно у релацији. Применом релације еквиваленције $\sim$ на скуп $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уводимо векторе.

Дефиниција 1.2. ***Вектор*** је класа еквиваленције добијена сечењем скупа свих уређених парова тачака $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ по релацији еквиваленције $\sim$ из Дефиниције 1.1.

Вектор (односно класа еквиваленције) коме припада уређен пар тачака (A, B) једноставно обележавамо са

$$\overrightarrow{AB} = [(A, B)] = \{(X, Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} : (X, Y) \sim (A, B)\}$$

и кажемо да је (A, B) један ***вектор представник*** од $\overrightarrow{AB}$. Вектор чији је вектор представник пар (A, A) зовемо ***нула вектор*** и обележавамо га са $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Норма (***дужина***, ***интензитет***) вектора $\overrightarrow{v}$ је ненегативан реални број $\|\overrightarrow{v}\|$ који је једнак дужини дужи XY, при чему је (X, Y) неки представник вектора $\overrightarrow{v}$, односно $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{XY}$. Како вектори представници у оквиру исте класе еквиваленције имају једнаке дужине то је норма вектора добро дефинисана. Нула вектор очигледно има норму једнаку нули ($\|\overrightarrow{0}\| = 0$) и то је једини вектор са том особином.

Сви остали вектори су ***ненула вектори*** и они поред норме имају и смер који их карактерише (традиционалисти говоре о правцу и смеру, али смер се не може упоређивати у случају различитог правца). Ако је $X \neq Y$, са $[X, Y)$ означићемо полуправу са почетком у X, а која садржи Y. Кажемо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ***истог смера*** уколико су полуправе $[A, B)$ и $[C, D)$ паралелне. Паралелност полуправих заправо је почетна паралелност која се уводи у апсолутној геометрији, док за љубитеље еуклидске геометрије можемо рећи да су две полуправе $[A, B)$ и $[C, D)$ паралелне уколико су праве AB и CD паралелне, при чему су B и D са исте стране праве AC ако је $C \notin AB$, односно унија тих полуправих је такође полуправа ако је $C \in AB$.

Нешто блажи услов је да се захтева само паралелност правих AB и CD и тада кажемо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ***истог правца***, односно ***колинеарни***. Ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ истог правца, али не и истог смера, кажемо да су они ***супротног смера***.

На основу претходно успостављених веза није тешко закључити да важи следеће важно тврђење.

***Теорема* 1.2.** *Ненула вектор једнозначно је одређен нормом и смером.*

1.2 Векторски простор

Скуп свих вектора на еуклидском простору $\mathbb{E}$ означићемо са

$$\mathcal{V} = (\mathbb{E} \times \mathbb{E})/_{\sim} = \{\overrightarrow{XY} : (X, Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}.$$

На скупу $\mathcal{V}$ можемо увести операцију сабирања и операцију множења скаларом, али најпре уведимо пар помоћних тврђења.

***Теорема* 1.3.** *За сваку тачку $A \in \mathbb{E}$ и сваки вектор $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ постоји јединствена тачка $B \in \mathbb{E}$ таква да је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.*

Доказ. Ако је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ за неке $C, D \in \mathbb{E}$, тада је тачка B јединствена тачка која је (централно) симетрична тачки C у односу на средиште дужи AD. □

***Теорема* 1.4.** *$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Доказ. Очигледна последица симетрије у Дефиницији 1.1. □

По Теореми 1.3 сваки вектор можемо изразити преко вектора представника који почиње произвољном тачком, те следећа дефиниција даје збир и за свака два произвољна вектора.

Дефиниција 1.3. Збир вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Оваква дефиниција је добра јер ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ то по Теореми 1.4 имамо $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, одакле је $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, што опет по Теореми 1.4 даје $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, и коначно $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Дефиниција 1.4. Умножак вектора $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$ је вектор $\alpha \cdot \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ одређен следећим особинама. Норма вектора $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ износи $\|\alpha \cdot \overrightarrow{v}\| = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$. За $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, вектори $\overrightarrow{v}$ и $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ су истог смера у случају $\alpha > 0$, односно супротног смера у случају $\alpha < 0$.

Претходна дефиниција најпре одређује норму за $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$, те уколико је она нула (за $\alpha = 0$ или $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$), једнозначно имамо $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Иначе ($\alpha \neq 0$ и $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) је $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$ ненула вектор коме описујемо смер, те је једнозначно одређен на основу Теореме 1.2. У сваком случају вектор $\alpha \cdot \overrightarrow{v}$, односно краће $\alpha\overrightarrow{v}$, једнозначно је одређен што нам даје операцију множења вектора скаларом.

У специјалном случају множења са $\alpha = -1$, уводимо ознаку $-\overrightarrow{v} = (-1) \cdot \overrightarrow{v}$, и кажемо да је вектор $-\overrightarrow{v}$ ***супротан*** вектору $\overrightarrow{v}$. На пример, вектор $\overrightarrow{XY}$ је супротан вектору $\overrightarrow{YX}$. Теорема 1.3 дефинише збир два вектора, а сада можемо дефинисати и разлику, увођењем кратке ознаке: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

По Дефиницији 1.4, вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$ су колинеарни (за $\overrightarrow{u} \neq 0$ и $\alpha \neq 0$), али важи и обрат. За колинеарне векторе $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$. Наиме, како су дати ненула вектори истог правца, у случају да су истог смера можемо поставити $\alpha = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$, односно $\alpha = -\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$ у случају различитог смера, при чему ће се Теорема 1.3 побринути за остало.

Овако дефинисане операције сабирања вектора и множења вектора скаларом су основне операције на скупу $\mathcal{V}$, а испоставља се да скуп $\mathcal{V}$ са тим операцијама има структуру векторског простора.

***Теорема* 1.5.** *$\mathcal{V}$ је векторски простор, односно за векторе $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ и скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:*

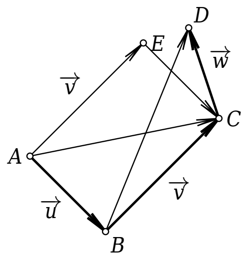
$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}; \tag{1.1}$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}; \tag{1.2}$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}; \tag{1.3}$$
$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}; \tag{1.4}$$
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}; \tag{1.5}$$
$$\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}; \tag{1.6}$$
$$\alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}; \tag{1.7}$$
$$1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}. \tag{1.8}$$

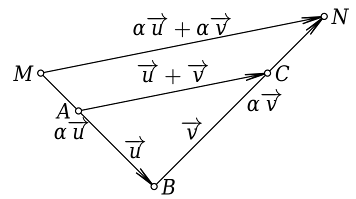
Доказ. Нека је $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ (сваки вектор има свој вектор представник). По Теореми 1.3 (за тачку B и вектор $\overrightarrow{v}$) постоји C тако да је $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, а затим и D тако да је $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$.

Асоцијативност (1.1) добијамо директним рачуном:
$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.

За комутативност (1.2) по Теореми 1.3 уводимо тачку E тако да је $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, те по Теореми 1.4 имамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$. Сада је $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

Неутрални елемент (1.3) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ и инверзни елемент (1.4) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ се лако виде.





За дистрибутивност у односу на сабирање вектора (1.6) уводимо тачку M тако да је $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{u}$ (по Теореми 1.3 тако да је $\overrightarrow{BM} = -\alpha\overrightarrow{u}$) и тачку N тако да је $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{v}$ (поново Теорема 1.3). Ако $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ нису колинеарни по обрнутој Талесовој теореми (види слику) имамо паралелност правих AC и MN, као и одговарајући однос дужина дужи за $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AC}$, односно $\alpha(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$. Ако су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ колинеарни, тада је $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, те се доказ своди на (1.5) и (1.7).

Дистрибутивност у односу на сабирање скалара (1.5) одмах важи у случајевима $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\alpha+\beta = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном доказ се изводи из дефиниције сабирања дискусијом по знаковима скалара α, β и $\alpha+\beta$.

Компатибилност (1.7) очигледно важи за $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном вектори $\alpha(\beta\overrightarrow{u})$ и $(\alpha\beta)\overrightarrow{u}$ имају исту норму (због $\|\alpha(\beta\overrightarrow{u})\| = |\alpha|\cdot\|\beta\overrightarrow{u}\| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot\|\overrightarrow{u}\| = |\alpha\beta|\cdot\|\overrightarrow{u}\| = \|(\alpha\beta)\overrightarrow{u}\|$) и исти смер (јер $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)$), те су по Теореми 1.2 они једнаки.

Јединични елемент (1.8) је број $1 \in \mathbb{R}$ у складу са Дефиницијом 1.4 и Теоремом 1.2. □

1.3 Линеарна независност вектора

Подсетимо се неких ствари из линеарне алгебре. За скуп ненула вектора $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ кажемо да је ***линаерно независан*** уколико $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$ за $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ повлачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. У супротном кажемо да је он ***линеарно зависан*** и тада се неки од вектора може изразити као линеарна комбинација осталих. Максималан број линеарно независних вектора векторског простора је ***димензија*** векторског простора, а за те векторе се каже да чине ***базу*** векторског простора.

***Теорема* 1.6.** *Димензија векторског простора $\mathcal{V}$ у зависности од еуклидског простора $\mathbb{E}$ износи 1 за праву, 2 за раван и 3 за простор.*

Доказ. Нека је најпре $\mathbb{E}$ права, и нека су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ произвољни ненула вектори. Како су вектори са праве очигледно колинеарни, то постоји $\lambda \in \mathbb{R}$, тако да је $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, и самим тим су линеарно зависни, односно $\dim\mathcal{V} = 1$.

Нека је сада $\mathbb{E}$ раван. Како у равни постоје три неколинеарне тачке K, L и M, то су вектори $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KM}$ неколинеарни, а како је димензија праве једнака један то су они линеарно независни. Нека су $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ произвољни ненула вектори из равни. Можемо поставити тачке $A, B, P, Q \in \mathbb{E}$ тако да је $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BQ}$. Ако су праве AP и BQ паралелне то су вектори $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ колинеарни и самим тим линеарно зависни. У супротном праве AP и BQ се секу и постоји пресечна тачка C. Сада су вектори $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ колинеарни као и вектори $\overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{BC}$, те постоје $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тако да је $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{BC} = \beta\overrightarrow{BQ}$. Сада је $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w} - \alpha\overrightarrow{v}$, те су вектори $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ линеарно зависни, што доказује да је $\dim\mathcal{V} = 2$.

На крају посматрајмо случај кад је $\mathbb{E}$ простор. Како у равни постоје четири некопланарне тачке K, L, M и N, то су вектори $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KN}$ некопланарни, а како је димензија равни једнака два то су они линеарно независни. Претпоставимо да постоји четири линеарно независних вектора $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OD}$. Из линеарне независности, OAB чини раван π, а OCD чини раван τ. Ако су равни π и τ паралелне то су једнаке ($O \in \pi\cap\tau$), вектори су копланарни и самим тим линеарно зависни. У супротном се π и τ секу по правој $p \ni O$ и постоји тачка $O \neq E \in p = \pi\cap\tau$. Вектор $\overrightarrow{OE}$ је у равни π, те $\overrightarrow{OE} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, али и у равни τ, одакле

$\overrightarrow{OE} = \gamma\overrightarrow{w} + \delta\overrightarrow{x}$. Добијамо $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} - \gamma\overrightarrow{w} - \delta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, где сви коефицијенти нису нула (иначе је $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}$, али и $E \neq O$) те су вектори линеарно зависни, што доказује да је $\dim \mathcal{V} = 3$. $\square$

1.4 Скаларни производ

Угао између два ненула вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је мањи од углова између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, односно $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \measuredangle AOB \in [0, \pi]$. Теорема 1.3 нам даље омогућава да се појам угла прошири за произвољна два вектора.

Дефиниција 1.5. Скаларни производ вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ је број $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}$.

Уколико је $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ кажемо да су вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ ***ортогонални*** и пишемо $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, што се дешава у случајевима кад је $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ или $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ или $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}$. Погледајмо основне особине скаларног производа.

***Теорема* 1.7.** *За векторе $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}; \tag{1.9}$$

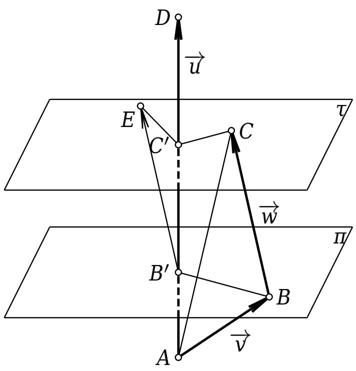
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}; \tag{1.10}$$

$$(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}); \tag{1.11}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geqslant 0; \tag{1.12}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}. \tag{1.13}$$

Доказ. Директно из Дефиниције 1.5 следи комутативност (1.9), као и позитивна дефинитност (1.12) и (1.13). Компатибилност (1.11) се лако рачуна: $(\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|\alpha\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos\measuredangle(\alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\alpha| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.



Преостаје нам још дистрибутивност (1.10). Поставимо векторе $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$ и уведимо равни π и τ такве да важи $B \in \pi \perp AD$ и $C \in \tau \perp AD$, док B' и C' дефинишемо као нормалне пројекције тачака B и C на праву AD, односно $\{B'\} = \pi \cap AD$ и $\{C'\} = \tau \cap AD$.

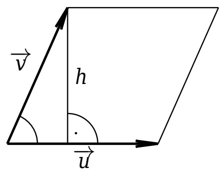
У правоуглом троуглу $AB'B$ можемо изразити косинус угла са $\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot |\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})|$. Вектори $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{u}$ и $\|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AB'}$ имају једнаке норме $\|(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u}\| = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\| |\cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{AB'}\|$, али и једнаке смерове због $\operatorname{sgn}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \operatorname{sgn}(\cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$, те важи $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AB'}$.

Сасвим слично правоугли троугао $AC'C$ даје $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AC'}$, док је за изражавање вектора $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{u}$ боље посматрати $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{B'E}) \cdot \overrightarrow{u}$, где је E тачка дата са $\overrightarrow{B'E} = \overrightarrow{BC}$, одакле лако следи $E \in \tau$. Правоугли троугао $B'C'E$ даје $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{B'E}) \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{B'C'}$.

Ако објединиmo наведене резултате из $\|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AB'} + \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{B'C'} = \|\overrightarrow{u}\|^2\overrightarrow{AC'}$ добијамо $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})) \cdot \overrightarrow{u}$ и коначно уз употребу (1.5) важи $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$. $\square$

1.5 Векторски производ

Векторски производ је бинарна опеарација која ће векторима $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ придружити вектор. Природно је захтевати да резултујући вектор буде ортогоналан на оба почетна вектора. Уколико су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ линеарно независни, они разапињу раван и наш резултујући вектор ће имати правац нормале на ту раван. Како је правац нормале једнозначно одређен само у тродимензионом векторском простору, то векторски производ уводимо искључиво у случају $\dim \mathcal{V} = 3$.



Како постоји бесконачно много вектора ортогоналних на $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, фиксирањем норме ћемо их прилично рестриковати. Природно је захтевати да норма буде једнака површини $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ паралелограма којег разапињу вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$. У том паралелограму, висина којој одговара основица одређена вектором $\overrightarrow{u}$ износи $h = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, те је $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \cdot h = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Након овога за резултујући вектор остају две могућности, пошто у оквиру правца имамо два различита смера, што можемо решити увођењем појма оријентације. Нека је $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ произвољна уређена база од $\mathcal{V}$. Посматрајмо с врха вектора $\overrightarrow{z}$ обилазак од вектора $\overrightarrow{x}$ ка вектору $\overrightarrow{y}$ краћим путем. Уколико је тај обилазак у математички позитивном смеру (супротан смеру казаљке на сату) кажемо да је база ***десно оријентисана***. У супротном обилазак је у математички негативном смеру и кажемо да је база ***лево оријентисана***. На овај начин све уређене базе од $\mathcal{V}$ подељене су у две класе еквиваленције на десно оријентисане и лево оријентисане.

Избором привилеговане базе одређује се оријентација и она је по дефиницији ***позитивна***. Најчешће се за привилеговану базу узима нека десно оријентисана база, при чему су онда десно оријентисане позитивне, а лево оријентисане негативне. Користећи оријентацију долазимо до једнозначно одређеног резултујућег вектора.

Дефиниција 1.6. ***Векторски производ*** вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ је вектор $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ са следећим особинама. Норма вектора $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ износи $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ако је $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \neq 0$, вектор $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ је ортогоналан на векторе $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, али такав да је база $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ позитивно оријентисана.

Норму векторског производа смо бирали тако да важи $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Како је $\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ само у случајевима $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ и $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$, то је $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ако и само ако су вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ колинеарни, а тада и немамо паралелограм разапнут са $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, односно његова површина је нула. У супротном $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ су линеарно независни, ортогоналност одређује правац за $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, а оријентација и смер.

Како се паралелограм дијагоналом дели на два подударна троугла имамо мотив да практично срачунамо површину троугла са $\mathcal{P}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

***Теорема* 1.8.** *За векторе $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}); \tag{1.14}$$

$$(\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}); \tag{1.15}$$

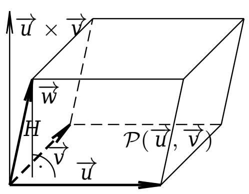
$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}. \tag{1.16}$$

Доказ. Антикомутативност (1.14) стандардно добијамо по Теореми 1.2, јер норма и правац вектора су очигледно једнаки, док је смер постављен како треба. За (1.15) смер је очигледно једнак (или су нула вектори), те остаје само норма:

$$\|(\alpha\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v}\| = \|\alpha\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\measuredangle(\alpha\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\alpha|\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\alpha|\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\|.$$

Доказ формуле (1.16) оставићемо за касније јер је тако једноставније. □

Дефиниција 1.7. ***Мешовити производ*** вектора $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ је број $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.



Геометријска интерпретација мешовитог производа може се видети посматрањем паралелепипеда којег разапињу вектори $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$. Како је $H = \|w\| \cdot |\cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ висина паралелепипеда која одговара страни коју образују вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, то имамо

$$|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}| = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\||\cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = \mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \cdot H,$$

што је даље једнако запремини тог паралелепипеда и отуда следећа теорема.

***Теорема* 1.9.** *Запремина паралелепипеда којег разапињу вектори* $\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{v}$ *и* $\overrightarrow{w}$ *једнака је* $\mathcal{V}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = |[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|$.

Практичан проблем може бити рачунање запремине тетраедра. Како се паралелепипед дели на две подударне призме, а призма има три пута већу запремину од пирамиде, то у паралелепипед можемо сместити шест тетраедара и зато је запремина тетраедра $ABCD$ једнака

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|.$$

Мешовити производ се такође лепо понаша у односу на уведене операције.

***Теорема* 1.10.** *За векторе* $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}\in\mathcal{V}$ *и скалар* $\alpha\in\mathbb{R}$ *важи*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]; \tag{1.17}$$
$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]; \tag{1.18}$$
$$[\alpha\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \alpha[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]; \tag{1.19}$$
$$[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}] = [\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}]+[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}]. \tag{1.20}$$

Доказ. Ако формуле (1.14) и (1.15) скаларно помножимо са $\overrightarrow{w}$ одмах добијамо (1.17) и (1.19). Циклично померање (1.18) је последица Теореме 1.9 по којој су лева и десна страна једнаке по апсолутној вредности, док је знак једнак због једнаке оријентације на циклично помереној бази. Дистрибутивност (1.20) је очигледна последица (1.16), али смо тај доказ прескочили. Међутим, важи и обрнуто, те ће нам тај прескочени доказ бити лаган. Како је $(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = [\overrightarrow{w},\overrightarrow{x},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]$ по (1.10) једнако $(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{w},\overrightarrow{x},\overrightarrow{u}]+[\overrightarrow{w},\overrightarrow{x},\overrightarrow{v}]$, (1.20) биће последица претходно доказаног (1.18). □

Докажимо сада (1.16).

Доказ. Из доказане особине (1.20) имамо да за свако $\overrightarrow{x}$ важи $[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}]-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}]-[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{x}]=0$, што по Дефиницији 1.7 и Теореми 1.7 значи

$$(((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}))\cdot\overrightarrow{x}=0.$$

За конкретно $\overrightarrow{x} = ((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$ добијамо $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{x}\|^2=0$ и отуда следи $((\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w})-(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$, што коначно доказује (1.16). □

1.6 Двоструки векторски производ

Двоструки векторски производ заправо је векторско множење примењено два пута заредом, односно облик $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}$. Ми желимо да добијемо експлицитну формулу за рачунање овог израза. У случају да су вектори $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ колинеарни то је $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ и самим тим $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$, те ћемо претпоставити да су $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ линеарно независни. Тада је $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, те вектори $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$ чине једну базу векторског простора $\mathcal{V}$. Посматрајмо израз $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u}$ који расписујемо у наведеној бази

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).$$

Скаларним множењем овог израза са вектором $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$ који је нормалан на $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u}$, на $\overrightarrow{u}$ и на $\overrightarrow{v}$, одмах добијамо $\gamma\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|^2=\overrightarrow{0}$, односно $\gamma=0$, те имамо

$$(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}. \tag{1.21}$$

Векторским множењем са $\overrightarrow{u}$, из (1.21) добијамо $((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u})+\beta(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u})$, односно

$$((\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\times\overrightarrow{u})\times\overrightarrow{u} = -\beta(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}).$$

Пажљивим посматрањем вектора на левој страни претходног израза који је једнак двоструком векторском производу међусобно ортогоналних вектора ($(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, те $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} \perp \vec{u}$) можемо закључити да је истог смера као и вектор $-(\vec{u} \times \vec{v})$, што нам даје $\beta > 0$. Са друге стране упоређујући норме леве и десне стране имамо

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|^2 = \|((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u}\| = \|-\beta(\vec{u} \times \vec{v})\| = |\beta| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|,$$

одакле је $|\beta| = \|\vec{u}\|^2$ и самим тим, због $\beta > 0$ добијамо $\beta = \|\vec{u}\|^2$.

Скаларним множењем са $\vec{u}$, из (1.21) добијамо $0 = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u})$, одакле је $\alpha\|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\|^2(\vec{u} \cdot \vec{v})$ и коначно $\alpha = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Заменом α и β у (1.21) имамо

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}. \tag{1.22}$$

Симетрија по $\vec{u}$ и $\vec{v}$ даје нам $(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u}$, односно

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}. \tag{1.23}$$

Преостаје нам да у рачун укључимо вектор $\vec{w}$ који такође можемо расписати у нашој бази са $\vec{w} = \mu\vec{u} + \nu\vec{v} + \xi(\vec{u} \times \vec{v})$. Даљи рачун обављамо применом особина векторског производа из Теореме 1.8 користећи (1.22) и (1.23), као и чињеницу да је $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \mu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) + \xi((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})) \\ &= -\mu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + \mu(\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v} - \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} \\ &= -(\mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v}))\vec{u} + (\mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v}))\vec{v}\end{aligned}$$

Међутим, скаларним множењем једначине $\vec{w} = \mu\vec{u} + \nu\vec{v} + \xi(\vec{u} \times \vec{v})$ са $\vec{u}$ и $\vec{v}$ добијамо $\vec{w} \cdot \vec{u} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{u})$, односно $\vec{w} \cdot \vec{v} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})$ и имамо двоструки векторски производ $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$ у виду експлицитне формуле.

Остаје да се провери да ли ова формула ради и за случај кад су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно зависни. У ту сврху можемо поставити $\vec{v} = \kappa\vec{u}$, после чега очигледно важи $\vec{0} = -(\vec{w} \cdot (\kappa\vec{u}))\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\kappa\vec{u}$, те имамо наредну теорему.

***Теорема* 1.11.** *За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ важи*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}. \tag{1.24}$$

Глава 2

Тачка, права, раван

2.1 Кординате вектора и тачака

Ако је $(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n})$ база векторског простора $\mathcal{V}$ тада за свако $\overrightarrow{x} \in \mathcal{V}$ постоје једнозначно одређени скалари $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v_1} + ... + x_n\overrightarrow{v_n}$ и они су ***координате вектора*** $\overrightarrow{x}$ у датој бази. Координате вектора $\overrightarrow{x}$ обично записујемо као уређену n-торку $(x_1, ..., x_n)$, што успоставља бијекцију између простора $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$.

Два вектора су једнака ако и само ако имају једнаке координате у односу на исту базу. Из особина Теореме 1.5 лако видимо да је координата суме вектора једнака суми одговарајућих координата, као и да је координата умношка вектора скаларом једнака производу скалара и одговарајуће координате.

Положај тачке може се описати тако што одаберемо неку тачку $O \in \mathbb{E}$, коју зовемо ***координатни почетак***, а затим свакој тачки $M \in \mathbb{E}$ придружимо једнозначно одређен вектор $\overrightarrow{OM} \in \mathcal{V}$, који зовемо ***вектор положаја тачке*** M.

Координатни систем састоји се од тачке O и неке базе $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ простора $\mathcal{V}$. ***Координате тачке*** M су координате вектора положаја $\overrightarrow{OM}$ у односу на задату базу. Ако су вектори базе јединични кажемо да је координатни систем ***Декартов***, а ако су међусобно управни кажемо да је он ***правоугли***.

2.2 Векторска алгебра у координатама

Испитајмо особине скаларног производа два вектора у функцији њихових координата. Све ово посматраћемо у еуклидском простору где је (по Теореми 1.6) димензија одговарајућег векторског простора $\mathcal{V}$ једнака три, с тим да можемо извршити рестрикцију на праву или раван, спуштајући димензију.

Из линеарне алгебре познат је Грам-Шмитов поступак ортогонализације који од произвољне базе векторског простора који је снабдевен скаларним производом прави ортонормирану базу. Нека је $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ нека ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$. Тада је $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$, где је δ_{ij} Кронекеров симбол и износи 1 за $i = j$, односно 0 за $i \neq j$.

Нека су $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}$ произвољни вектори из $\mathcal{V}$. На основу Теореме 1.7 имамо

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\overrightarrow{e_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} y_j\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j (\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Дакле, у ортонормираној бази важи $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, док саму координату x_i вектора $\overrightarrow{x}$ можемо добити скаларним множењем са одговарајућим базним вектором, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{e_i} = x_i$.

Испитајмо особине векторског и мешовитог производа у функцији координата вектора у позитивно оријентисаној ортонормираној бази $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ векторског простора $\mathcal{V}$. Вектор $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ има норму $\|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\| = \|\overrightarrow{e_1}\|\|\overrightarrow{e_2}\| = 1$, али и правац ортогоналан и на $\overrightarrow{e_1}$ и на $\overrightarrow{e_2}$, што је правац вектора $\overrightarrow{e_3}$. Како је $\|\overrightarrow{e_3}\| = 1$, а база $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ позитивно оријентисана, то је јасно да важи $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$. Сасвим слично добијамо цикличне једначине $\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$. Ако променимо редослед множења, то по (1.14) имамо $\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$, док множење линеарно зависних даје нулу, $\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$.

Нека је сада $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{z} = z_1\overrightarrow{e_1} + z_2\overrightarrow{e_2} + z_3\overrightarrow{e_3}$. Користећи особине из Теореме 1.8 лако је срачунати

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\overrightarrow{e_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{e_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{e_3},$$

што одговара формалној детерминанти

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

која се лако памти.

Мешовити производ $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]$ се рачуна по дефиницији $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z}$ и по претходно установљеном је $[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3$, што се такође може лако запамтити као формална детерминанта

$$[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2.3 Трансформације координата

Координате вектора $\overrightarrow{x}$ у односу на неку базу $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ простора $\mathcal{V}$ чини уређена n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ за коју је $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}$. Сада се намеће питање везе између координата уколико дође до промене базе. Нека је $e' = (\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n})$ нова база простора $\mathcal{V}$. Нови базни вектори су вектори простора $\mathcal{V}$ и самим тим могу се изразити у старој бази e.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e'_1} &= \gamma_{11}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{21}\overrightarrow{e_2} + ... + \gamma_{n1}\overrightarrow{e_n} \\
\overrightarrow{e'_2} &= \gamma_{12}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{22}\overrightarrow{e_2} + ... + \gamma_{n2}\overrightarrow{e_n} \\
&\dots \\
\overrightarrow{e'_n} &= \gamma_{1n}\overrightarrow{e_1} + \gamma_{2n}\overrightarrow{e_2} + ... + \gamma_{nn}\overrightarrow{e_n}
\end{aligned}$$

Не умањујући општост можемо претпоставити да радимо у тродимензионом простору, односно да је $n = 3$. Коефицијенти γ_{ij} могу се уписати у матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

која се зове ***матрица преласка*** са базе e на базу e', а претходна веза се може матрично записати са $e' = e \cdot \Gamma$. Ако произвољан вектор $\overrightarrow{x}$ изразимо на два различита начина можемо видети везу између старих и нових координата.

$$\overrightarrow{x} = \sum_i x_i\overrightarrow{e_i} = \sum_j x'_j\overrightarrow{e'_j} = \sum_j x'_j \left(\sum_i \gamma_{ij}\overrightarrow{e_i}\right) = \sum_i \left(\sum_j \gamma_{ij}x'_j\right)\overrightarrow{e_i},$$

одакле за свако i имамо $x_i = \sum_j \gamma_{ij} x'_j$, што су управо тражене везе између наших координата. Уколико старе координате обележимо са $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, а нове са $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$ систем добијених једначина имаће матрични облик $X = \Gamma \cdot X'$, односно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Уколико су базе e и e' ортонормиране можемо рачунати скаларни производ $\overrightarrow{e'_i} \cdot \overrightarrow{e_j}$ на два начина

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e'_i} \cdot \overrightarrow{e_j} &= (\sum_k \gamma_{ki} \overrightarrow{e_k}) \cdot \overrightarrow{e_j} = \sum_k \gamma_{ki} (\overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{e_j}) = \sum_k \gamma_{ki} \delta_{kj} = \gamma_{ji} \\ &= \overrightarrow{e'_i} \cdot (\sum_k \gamma'_{kj} \overrightarrow{e'_k}) = \sum_k \gamma'_{kj} (\overrightarrow{e'_i} \cdot \overrightarrow{e'_k}) = \sum_k \gamma'_{kj} \delta_{ik} = \gamma'_{ij}, \end{aligned}$$

где су γ'_{ij} елементи матрице преласка са базе e' на e, односно матрице Γ^{-1}. Одавде закључујемо да важи $\gamma_{ji} = \gamma'_{ij}$, односно $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$. Матрица преласка Γ са ортонормиране базе на ортонормирану базу мора да буде ортогонална и важи $1 = \det E = \det(\Gamma \cdot \Gamma^{-1}) = \det(\Gamma \cdot \Gamma^T) = \det(\Gamma) \cdot \det(\Gamma^T) = (\det(\Gamma))^2$, тако да је за њу $\det \Gamma = \pm 1$.

Код координата тачака имали смо координатни систем (O, e), где је O координатни почетак, а e база. Координате тачке X биле су заправо координате вектора $\overrightarrow{OX}$. Да би дошли до координата те исте тачке у новом координатном систему (O', e') морамо да транслирамо координатни почетак, односно да искористимо везу $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$. Ако векторе распишемо као производ базе и колоне координата имамо $eX = eP + e'X'$, где колона P представља координате тачке O' у бази e. Како је $e' = e\Gamma$ то је $eX = eP + e\Gamma X'$, односно $X = P + \Gamma X'$. Координате тачке X у старом систему једнаке су збиру координата тачке O' у старој бази и координатама тачке X у новој бази умножених са матрицом преласка са старе базе на нову:

$$[X]_{Oe} = [O']_{Oe} + \Gamma_{e \to e'} \cdot [X]_{O'e'}.$$

2.4 Права и раван у простору

Као што је познато из аксиома еуклидске геометрије, права је објекат који је једнозначно одређен са две различите тачке. Најпре ћемо посматрати тродимензиони простор. Нека је права p одређена тачкама $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$. Тачка X припада правој p (тачке A, B и X су колинеарне) ако су вектори $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AB}$ колинеарни, односно уколико постоји скалар $\kappa \in \mathbb{R}$ такав да је $\overrightarrow{AX} = \kappa \overrightarrow{AB}$. Претходну једначину можемо расписати као $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \kappa(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, одакле изједначавањем координата добијамо

$$\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \kappa(b_1 - a_1), \\ x_2 - a_2 &= \kappa(b_2 - a_2), \\ x_3 - a_3 &= \kappa(b_3 - a_3). \end{aligned}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ одређује правац праве, те је права једнозначно одређена тачком (рецимо $A \in p$) и тим правцем. Ако правац, односно вектор $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ заменимо са (v_1, v_2, v_3), добијамо једначине

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \kappa v_1, \\ x_2 &= a_2 + \kappa v_2, \\ x_3 &= a_3 + \kappa v_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

које зовемо ***параметарске једначине праве***. Правац праве p краће обележавамо са $\overrightarrow{u_p} = (v_1, v_2, v_3)$ и он је једнозначно одређен до на множење ненула скаларом. Када параметар κ прође скуп реалних бројева претходне једначине описују све тачке $X(x_1, x_2, x_3)$ са праве p.

Из параметарских једначина (2.1) елиминацијом параметра κ, заправо његовим изражавањем, добијамо једначине

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}, \tag{2.2}$$

које зовемо ***канонске једначине праве***. Канонске једначине (2.2) су заправо скраћени запис параметарских једначина (2.1), те се дозвољава да неки од бројева v_i буде нула (али не сви).

Раван је по аксиомама одређена са три неколинеарне тачке A, B и C, али је исто тако можемо одредити тачком A и са два линеарно независна вектора $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(u_1, u_2, u_3)$ и $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}(v_1, v_2, v_3)$. Тачка X припада равни ако се њен вектор положаја у односу на тачку A може видети као линеарна комбинација вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, односно ако постоје скалари κ и λ тако да је $\overrightarrow{AX} = \kappa\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$. Расписивањем ове једначине у координатама добијамо ***параметарске једначине равни***,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \kappa u_1 + \lambda v_1, \\ x_2 &= a_2 + \kappa u_2 + \lambda v_2, \\ x_3 &= a_3 + \kappa u_3 + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Међутим, раван се лакше може записати уколико линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ заменимо вектором нормале, односно са $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Вектор нормале равни α краће обележавамо са $\overrightarrow{n_\alpha}$ и он је такође једнозначно одређен до на множење ненула скаларом. Сада је $\kappa\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n}$, одакле следи ***векторска једначина равни***

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{n} = 0. \tag{2.3}$$

Векторску једначину можемо расписати са $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$ и погледати координате. Ако су координате тачака $A(a_1, a_2, a_3)$ и $X(x_1, x_2, x_3)$, а вектора $\overrightarrow{n}(n_1, n_2, n_3)$ добијамо једначину равни

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0. \tag{2.4}$$

Ако израчунамо слободни члан $n_4 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$ наша једначина равни може се записати са

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0. \tag{2.5}$$

2.5 Права у равни

Посматрајмо сада дводимензиони векторски простор, односно дешавања у равни. По узору на причу из простора, можемо написати параметарске једначине праве рестриковане за једну димензију: $x_1 = a_1 + \kappa v_1$, $x_2 = a_2 + \kappa v_2$. Множењем прве једначине са v_2, друге са v_1 и њиховим одузимањем добијамо $x_1v_2 - x_2v_1 = a_1v_2 - a_2v_1$. Уколико уведемо нове ознаке $n_1 = v_2$, $n_2 = -v_1$ и $n_3 = -(a_1v_2 - a_2v_1)$, добијамо ***општу једначину праве у равни*** која гласи:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0. \tag{2.6}$$

До једначине је могло да се дође и на други начин. На пример, права у равни је одређена тачком $A(a_1, a_2)$ и вектором нормале $n(n_1, n_2)$, те по узору на једначину равни (2.3) у простору можемо написати векторску једначину

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Упоређивањем тако добијених једначина можемо закључити да ако је (v_1, v_2) вектор правца праве онда је њен вектор нормале $n(n_1, n_2)$ сразмеран вектору $(v_2, -v_1)$.

Општа једначина праве (2.6) је важна јер се свака права у равни може изразити на такав начин. Са друге стране у случају да је $n_2 \neq 0$ (односно $v_1 \neq 0$) читаву једначину (2.6) можемо поделити са n_2 и добити $x_2 = -\frac{n_1}{n_2}x_1 - \frac{n_3}{n_2}$, што после замене $k = -\frac{n_1}{n_2}$ и $n = -\frac{n_3}{n_2}$ постаје

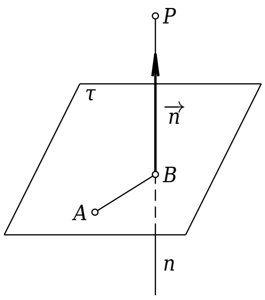
$$x_2 = kx_1 + n.$$

Ова једначина зове се ***експлицитна једначина праве***, али не треба испустити из вида да праве са константним x_1 немају такав облик. Број k зове се коефицијент праве и једнак је тангенсу угла који права гради са позитивним делом x_1 осе.

2.6 Растојање тачке од равни и праве

Вратимо се сада на тродимензиони простор у коме имамо раван τ задату једначином (2.5) $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$. Ако нека тачка има координате $P(p_1, p_2, p_3)$ можемо се упитати колико износи растојање тачке P од равни τ.

Поставимо праву n кроз тачку P тако да је нормална на раван τ. Нека је B подножје те нормале, односно таква да је $\{B\} = n \cap \tau$. Растојање између две тачке једнако је норми вектора који је њима одређен, те је $d(P,\tau) = \inf_{X\in\tau} d(P,X) = \inf_{X\in\tau}\|\overrightarrow{PX}\|$. Међутим, $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BX}$ при чему је $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{BX}$, те скаларни производ (или Питагорина теорема) даје $\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2 + \|\overrightarrow{BX}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{PB}\|^2$, што значи да се $\inf_{X\in\tau}\|\overrightarrow{PX}\|$ достиже (инфимум је минимум) у тачки B и важи $d(P,\tau) = \|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$.

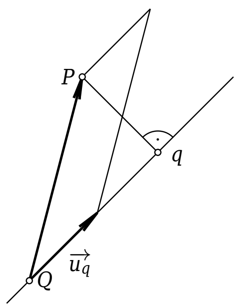


Нека је $\overrightarrow{n}(n_1, n_2, n_3)$ вектор правца праве n ($\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_n}$), односно вектор нормале равни τ ($\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_\tau}$). Како се тачке B и P налазе на правој n то су вектори $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{n}$ колинеарни, те је косинус угла између њих плус или минус један, зато важи $|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n}| = \|\overrightarrow{BP}\|\cdot\|\overrightarrow{n}\|$. Са друге стране тачка B припада равни τ, те из једначине (2.3) важи $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = 0$, где је $A(a_1, a_2, a_3)$ нека тачка равни τ. То нам даје $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n}$. Даље је $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 - a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3$, и како је $n_4 = -a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3$ због $A \in \tau$, имамо $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4$.

Обједињавањем резултата добијамо $\|\overrightarrow{BP}\|\cdot\|\overrightarrow{n}\| = |p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|$ и напокон због $\|\overrightarrow{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ важи следећа теорема.

***Теорема* 2.1.** *Растојање тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ од равни $\tau\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$ износи*

$$d(P,\tau) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$



Нека је сада права q одређена тачком Q и правцем $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_q}$. Ако поставимо паралелограм који разапињу вектори $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{v}$ тада се растојање тачке P од праве q може видети као његова висина и површину тог паралелограма можемо изразити на два начина, геометријски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\|\cdot d(P,q)$ и алгебарски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{v}\|$. Изједначавањем површина добијамо наредну теорему.

***Теорема* 2.2.** *Растојање тачке P од праве q која има правац $\overrightarrow{v}$ и садржи тачку Q износи*

$$d(P,q) = \frac{\|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Наравно, ако имамо конкретне координате $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ и $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$, претходну теорему, односно растојање $d(P,q)$, можемо експлицитно расписати са

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} p_2-q_2 & p_3-q_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1-q_1 & p_3-q_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1-q_1 & p_2-q_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Растојање тачке до праве у равни може се видети као блажа варијанта за претходне две теореме. На пример, ако посматрамо растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни, можемо га поистоветити са растојањем тачке $(p_1, p_2, 0)$ од равни $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у простору, јер се оба растојања реализују дуж исте нормале. Применом Теореме 2.1 добијамо одговарајуће тврђење.

***Теорема* 2.3.** *Растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни износи*

$$d(P, l) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

2.7 Мимоилазне праве

Мимоилазне праве су праве у простору које не припадају једној равни, односно нити се секу нити су паралелне. Познато је да за две мимоилазне праве постоји тачно једна права која их сече и нормална је на њих. Та права назива се заједничка нормала мимоилазних правих.

Конструкција заједничке нормале за мимоилазне праве p и q може се извршити на следећи начин. Како заједничка нормала мора бити нормална и на правац праве p и на правац q то мора бити нормална на раван π која садржи p, а паралелна је са q и на раван τ која садржи q, а паралелна је са p. Све потенцијалне нормале налазиће се у равни која садржи p и нормална је на раван π, као и у равни која садржи q и нормална је на раван τ, те самим тим заједничка нормала биће пресек тих двеју равни.

Растојање између мимоилазних правих реализоваће се баш дуж заједничке нормале. Наиме, ако је MN заједничка нормала за праве $p \ni M$ и $q \ni N$, то за $X \in p$ и $Y \in q$ можемо расписати $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY} + \overrightarrow{MN}$, те због $\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{NY} \perp \overrightarrow{MN}$ добити $\|\overrightarrow{XY}\|^2 = \|\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{NY}\|^2 + \|\overrightarrow{MN}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{MN}\|^2$ и коначно $d(p, q) = \inf_{X\in p, Y\in q} \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$.

Поставља се питање како ћемо експлицитно израчунати то растојање, ако је на пример права p одређена тачком P и правцем $\overrightarrow{u_p}$, а права q одређена тачком Q и правцем $\overrightarrow{u_q}$, при чему имамо на располагању координате тих датих елемената. Ако посматрамо паралелепипед одређен векторима $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$ није тешко закључити да заједничка нормала MN заправо представља висину тог паралелепипеда у односу на базу коју разапињу $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$, те запремину паралелепипеда можемо рачунати на два начина, геометријски $\mathcal{V}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}) = \|\overrightarrow{u_p} \times \overrightarrow{u_q}\| \cdot d(p, q)$ и алгебарски $\mathcal{V}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}) = |[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}]|$, те коначно важи

$$d(p, q) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}]|}{\|\overrightarrow{u_p} \times \overrightarrow{u_q}\|}.$$

2.8 Углови између правих и равни

Угао је један од основних појмова у геометрији. Угао између полуправих смо већ разматрали у дефиницији угла између два вектора, док ћемо сад покушати да једначинама интерпретирамо угао између две праве, угао између праве и равни, као и угао између две равни.

Угао између две праве p и q је мањи од углова које одређују њихове полуправе, те је тако $\measuredangle(p, q) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Скаларни производ вектора праваца правих се може разликовати до на знак, јер су углови $\measuredangle(p, q)$ и $\measuredangle(\overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q})$ једнаки или суплементни, те је тако

$$|\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{u_q}| = \|\overrightarrow{u_p}\| \cdot \|\overrightarrow{u_q}\| \cdot \cos\measuredangle(p, q).$$

Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене ортогоналне пројекције на раван α. Тај угао, или њему суплементан, видимо у правоуглом троуглу који чине хипотенуза u_p и наспрамна катета n_α и отуда

$$|\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}| = \|\overrightarrow{u_p}\| \cdot \|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \sin\measuredangle(p, \alpha).$$

Угао између две равни α и β биће једнак углу између њихових нормала, те је зато

$$|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}| = \|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \|\overrightarrow{n_\beta}\| \cdot \cos\measuredangle(\alpha, \beta).$$

Глава 3

Криве

3.1 Круг

У овој глави ограничићемо се на раван, односно дводимензиони простор. Најједноставнији објекат после праве је круг. Круг је скуп свих тачака равни подједнако удаљених од неке тачке. Ознаку $k(S,r)$ користићемо за круг чије су тачке на растојању r од тачке S, при чему кажемо да је S центар круга k, а r његов полупречник.

Јасно је да се једначина круга може записати са $\|\overrightarrow{SX}\| = r$, те ако је произвољна тачка круга $X(x_1, x_2)$, а тачка $S(s_1, s_2)$, добијамо

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2.$$

На пример, јединични центрирани (центар му је у координатном почетку) круг $k(O,1)$ имаће једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Круг се може написати и у параметарском облику, а најједноставнија параметризација овог круга $k(O,1)$ је: $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, где $\theta \in [0, 2\pi)$.

3.2 Поларни координатни систем

Правоугли Декартов координатни систем који смо до сада користили је најједноставнији, али и најпогоднији за изражавање линеарних елемената (права, раван). Међутим, за неке квадратне елементе (на пример круг) погодније је користити другачији координатни систем.

Поларни координатни систем је координатни систем у равни ($\dim \mathbb{E} = 2$) који карактерише тачка $O \in \mathbb{E}$ коју зовемо пол и полуправа $[Ox_1)$ са почетком у O коју зовемо оса. Тачка $X \in \mathbb{E}$ различита од O једнозначно је одређена растојањем $r > 0$ од пола ($r = d(O,X)$) и оријентисаним углом θ који полуправа $[OX)$ заклапа са осом $[Ox_1)$. Поларне координате чини уређен пар (r,θ), при чему угао θ одговара било ком од углова $\theta + 2n\pi$, где је n цео број. Тачку O описује само $r = 0$, док угао θ не постоји.

Јако битна је веза са правоуглим Декартовим координатним системом. Ако га поставимо тако да се пол O поклопи са координатним почетком, а поларну осу поклопимо са x_1 осом имаћемо следећу везу

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta.$$

Обратне везе је такође лако исписати. Увек је

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

док у зависности од тога да ли је $x_1 \neq 0$ или $x_2 \neq 0$ можемо писати

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_2}{x_1}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x_1}{x_2}.$$

На пример за $x_1 \neq 0$ можемо исписати експлицитну формулу

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn}(x_1)).$$

Јединични центрирани круг $k(O,1)$, који је у правоуглом Декартовом систему имао једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$, у поларном координатном систему се записује веома једноставно једначином $r = 1$.

3.3 Трансформације равни

Геометријске трансформације равни су пресликавања равни $\mathbb{E}^2$ на саму себе. Оне геометријске трансформације које не померају тачку O могу се једноставно изразити у поларном координатном систему са полом O. Погледајмо шта су слике неке тачке (r,θ) при неким трансформацијама.

Слика при ротацији око тачке O за угао α је тачка $(r,\theta+\alpha)$. Централна симетрија са центром O даје $(r,\theta+\pi)$. Осна симетрија у односу на x_1 даје $(r,-\theta)$. Осна симетрија у односу на праву кроз O која је под углом α у односу на x_1 даје $(r,2\alpha-\theta)$. Хомотетија са центром O и коефицијентом $k > 0$ даје (kr,θ).

Дакле, поларне координате нам могу олакшати пут ка једначинама неких трансформација у правоуглим Декартовим координатама. На пример, поменута ротација око тачке O за угао α преставља пресликавање $(r,\theta) \mapsto (r,\theta+\alpha)$ у поларним координатама. Ако је то пресликавање у правоуглим Декартовим координатама записано са $(x_1,x_2) \mapsto (x_1',x_2')$, лако добијамо једначине

$$\begin{aligned}
x_1' &= r'\cos\theta' = r\cos(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\
x_2' &= r'\sin\theta' = r\sin(\theta+\alpha) = r(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha) = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha,
\end{aligned}$$

и коначно добијамо једначине ротације

$$x_1' = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, \quad x_2' = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \tag{3.1}$$

3.4 Конусни пресеци

Прави кружни конус добија се ротацијом једне праве l око друге праве s које се секу под оштрим углом у тачки V. Дакле у питању је унија правих кроз V које са s заклапају баш онолики (оштар) угао колики l заклапа са s. Права s назива се оса, тачка V је врх, док се права l као и њене слике у ротацији зову изводнице правог кружног конуса.

Конусни пресек је пресек правог кружног конуса и неке равни. Случај када раван садржи врх V је дегенерисан и у питању може бити само тачка V, једна изводница или две изводнице. Нама ће бити најинтересантнији случај када раван не пролази кроз врх, али да није нормална на осу (јер ако јесте у пресеку добијамо круг) и такве пресеке зовемо конике.

Конике имају једну веома лепу особину коју ћемо извести. Нека је $\mathcal{K}$ прави кружни конус са осом s, врхом V и изводницом l, а τ произвољна раван која не садржи V и није нормална на s. Није тешко показати да постоји сфера σ која је уписана у $\mathcal{K}$ и која додирује раван τ. Штавише у општем случају (елипса, хипербола) постоје две такве сфере, међутим када је раван τ паралелна некој изводници (случај параболе) постоји само једна таква сфера.

Сфера σ додирује конус $\mathcal{K}$ по неком кругу и нека је ω раван у којој се тај круг налази. Раван ω је очигледно нормална на s, за разлику од равни τ, те се оне секу по правој $d = \omega \cap \tau$. Нека је сада $\Gamma = \mathcal{K} \cap \tau$ коника, а тачка $G \in \Gamma$ произвољна тачка са ње. Подножје нормале из G на d назовимо A, а подножје нормале из G на ω са B. Продор праве VG кроз ω означимо са M.

Како је угао између равни ω и равни τ једнак $\measuredangle GAB$, из правоуглог троугла ABG можемо изразити растојање тачке G од праве d са

$$d(G,d) = \|\overrightarrow{GA}\| = \frac{\|\overrightarrow{GB}\|}{\sin\measuredangle(\omega,\tau)}.$$

Са друге стране имамо правоугли троугао MBG, а како је GB нормално на ω то је и паралелно са s, те је угао $\measuredangle BGM = \measuredangle(s, VM)$ једнак углу између s и било које изводнице, односно $\measuredangle(s,l)$. Тангентни одсечци на сферу су међусобно подударни, те имамо подударне дужи GF и GM, где је F додирна тачка сфере σ и равни τ ($\{F\} = \tau \cap \sigma$), те можемо записати

$$d(G,F) = \|\overrightarrow{GM}\| = \frac{\|\overrightarrow{GB}\|}{\cos\measuredangle(s,l)}.$$

Ако објединимо претходне две једначине добијамо одговарајући однос

$$\frac{d(G,F)}{d(G,d)} = \frac{\|\overrightarrow{GM}\|}{\|\overrightarrow{GA}\|} = \frac{\sin\measuredangle(\omega,\tau)}{\cos\measuredangle(s,l)} = e.$$

Када смо фиксирали конус и раван фиксирали смо и углове $\measuredangle(\omega,\tau)$ и $\measuredangle(s,l)$, те је самим тим e број који не зависи од избора тачке G са конике Γ, чиме смо доказали наредну теорему.

***Теорема* 3.1.** *За сваку конику Γ у равни постоји тачка F и права d таква да је однос растојања произвољне тачке са конике од тачке F, односно од праве d, константан.*

Тачка F зове се жижа (или фокус), права d зове се водиља (или директриса), а број e зове се ексцентрицитет конике. Ексцентрицитет конике је по дефиницији строго позитиван, а испоставља се да вредност 1 разлучује три типа коника на следећи начин. Коника је за $0 < e < 1$ елипса, за $e = 1$ парабола, за $e > 1$ хипербола.

3.5 Једначине коника

Пошто смо искористили трећу димензију да би доказали Теорему 3.1, сада можемо да се вратимо у раван и искористимо доказану особину да изведемо једначине коника у равни.

Испоставља се да је до једначина лакше доћи у поларном координатном систему. Поставимо координатни систем тако да је жижа F пол, док је поларна оса полуправа са почетком F која је нормална на директрису d и сече је. Са L означимо једну од пресечних тачака конике Γ и праве кроз F паралелне директриси и нека је $l = d(F,L)$. Нека је A подножје нормале из G, а B подножје нормале из L на праву d.

Нека је $G \in \Gamma$ произвољна тачка конике која је са исте стране праве d као и тачка F. Испитајмо поларне координате (r,θ) тачке G. Како је

$$r = d(F,G) = e \cdot d(G,A) = e(d(L,B) - r\cdot\cos\theta) = l - er\cos\theta,$$

то добијамо поларну једначину конике

$$r = l - er\cos\theta, \tag{3.2}$$

што се може записати и са

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}.$$

Погледајмо сада како једначина конике изгледа у одговарајућем Декартовом координатном систему, који има почетак у полу, а поларна оса се преклапа са осом x_1. Квадрирањем једначине (3.2) уз везе $x_1 = r\cos\theta$ и $x_2 = r\sin\theta$, које смо раније видели, добијамо

$$x_1^2 + x_2^2 = (l - ex_1)^2.$$

Сада је

$$(1-e^2)x_1^2 + 2elx_1 + x_2^2 = l^2 \tag{3.3}$$

и вршимо дискусију у зависности од тога да ли је $1 - e^2 = 0$. Дакле, прво ћемо посматрати случај кад је $e \neq 1$. Тада је

$$x_1^2 + 2x_1\frac{el}{1-e^2} + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{1-e^2},$$

и отуда
$$\left(x_1+\frac{el}{1-e^2}\right)^2+\frac{x_2^2}{1-e^2}=\frac{l^2}{1-e^2}+\frac{e^2l^2}{(1-e^2)^2}=\frac{l^2}{(1-e^2)^2}.$$
Можемо приметити да прилично згоднији координатни систем добијамо транслацијом за вектор $(-\frac{el}{1-e^2},0)$ јер тада $x_1+\frac{el}{1-e^2}$ постаје ново x_1, док x_2 остаје исто. У том новом координатном систему претходна једначина гласи
$$x_1^2+\frac{x_2^2}{1-e^2}=\frac{l^2}{(1-e^2)^2},$$
односно
$$\frac{x_1^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{x_2^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)}}=1.$$
Ако уведемо ознаке
$$a=\frac{l}{|1-e^2|},\quad b=\frac{l}{\sqrt{|1-e^2|}}$$
добијамо канонску једначину
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\operatorname{sgn}(1-e^2)\frac{x_2^2}{b^2}=1.$$
У случају да је у питању елипса ($e<1$) то је $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$, док је у случају хиперболе ($e>1$) то $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$.

За случај параболе, морамо се вратити у дискусију и поставити $e=1$. Једначина (3.3) тада гласи $2lx_1+x_2^2=l^2$, што се може записати као
$$x_2^2=2l\left(\frac{l}{2}-x_1\right).$$
Додатна изометријска трансформација која преставља осну симетрију равни у односу на праву $x_1=\frac{l}{4}$ мења $\frac{l}{2}-x_1$ са новим x_1 док x_2 остаје исто и у том новом координатном систему једначина има облик
$$x_2^2=2lx_1.$$

3.6 Фокусне особине коника

Елипса и хипербола имају две жиже и две директрисе. Код елипсе жиже се налазе између директиса, док је код хиперболе обрнуто. Нека је M произвољна тачка са елипсе или хиперболе. По Теореми 3.1 за сваку од жижа важи да је однос растојања тачке од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету.

Нека је M произвољна тачка са хиперболе или елипсе Γ и нека су F_1 и F_2 жиже којима редом одговарају директрисе d_1 и d_2. Нека су тачке $D_1\in d_1$ и $D_2\in d_2$ подножја нормала из M на d_1 и d_2.

Из особине коника имамо $d(M,F_i)=e\cdot d(M,d_i)=e\cdot d(M,D_i)$ за $i=1,2$. У случају елипсе сабирамо ова растојања и добијамо
$$d(M,F_1)+d(M,F_2)=e(d(M,D_1)+d(M,D_2))=e\cdot d(D_1,D_2)=e\cdot d(d_1,d_2),$$
док у случају хиперболе њих одузимамо
$$|d(M,F_1)-d(M,F_2)|=e|d(M,D_1)-d(M,D_2)|=e\cdot d(D_1,D_2)=e\cdot d(d_1,d_2).$$
Овако смо добили следећу теорему.

***Теорема* 3.2.** *Збир растојања сваке тачке елипсе до њених жижа је константа. Апсолутна вредност разлике растојања сваке тачке хиперболе од њених жижа је константа.*

Ова теорема може нам послужити да добијемо везу између ексцентрицитета e и мале и велике полуосе, односно бројева a и b.

Посматрајмо канонску једначину елипсе (са $a > b$) и обележимо са c растојање жиже од центра елипсе, односно координатног почетка. Ако посматрамо темена елипсе, односно тачке $(a, 0)$ и $(0, b)$ које јој припадају, по претходном можемо расписати $e \cdot d(d_1, d_2) = (a-c)+(a+c) = 2a$, као и $e \cdot d(d_1, d_2) = 2\sqrt{b^2 + c^2}$, одакле добијемо $c^2 = a^2 - b^2$. Како смо приликом извођења једначине елипсе извршили транслацију за вектор $(-\frac{el}{1-e^2}, 0)$, чиме се жижа померила из коодинатног почетка, то можемо писати $c = \frac{el}{1-e^2} = e\frac{l}{|1-e^2|} = ea$. Сада је $e = \frac{c}{a}$, односно

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Случај хиперболе можемо слично решити, те нека је c растојање жиже од центра хиперболе, односно координатног почетка. Можемо посматрати тачке $(a, 0)$ и рецимо $(a\sqrt{2}, b)$ које задовољавају канонску једначину хиперболе. Овога пута добијамо $e \cdot d(d_1, d_2) = |(c-a)-(c+a)| = 2a$ и доста компликованије

$$e \cdot d(d_1, d_2) = \left|\sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2} - \sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2}\right|.$$

Изједначавањем претходних једначина и квадрирањем добијамо

$$4a^2 = (a\sqrt{2} - c)^2 + b^2 + (a\sqrt{2} + c)^2 + b^2 - 2\sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2}\sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2},$$

из чега даље имамо

$$4a^2 = 4a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2\sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - (2ac\sqrt{2})^2},$$

односно

$$c^2 + b^2 = \sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - 8a^2c^2}.$$

Квадрирањем добијамо

$$c^4 + 2c^2b^2 + b^4 = 4a^4 + c^4 + b^4 + 4a^2c^2 + 4a^2b^2 + 2c^2b^2 - 8a^2c^2,$$

односно $4a^4 - 4a^2c^2 + 4a^2b^2 = 0$, што дељењем са $4a^2$ постаје $c^2 = a^2 + b^2$. Као и у претходном случају имаћемо $c = ea$ и коначно

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

3.7 Криве другог реда

Крива другог реда је скуп тачака равни које задовољавају једначину $f(x_1, x_2) = 0$, где је f реални полином другог степена по x_1 и x_2, односно

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}, \tag{3.4}$$

при чему је, наравно, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$. Желимо да класификујемо криве другог реда, односно да опишемо све могуће скупове тачака који задовољавају једначину

$$f(x_1, x_2) = 0. \tag{3.5}$$

Постојање члана $a_{12} \neq 0$ геометријски казује да је крива постављена косо у постојећем координатном систему. Због тога ћемо потражити нови координатни систем у коме ће она бити исправљена, односно неће имати члан a_{12}. У ту сврху ротираћемо координатни систем око координатног почетка за неки угао θ (односно ротирати тачке око координатног почетка за $-\theta$) и у складу са једначинама ротације (3.1) имаћемо везу

$$x_1 = x_1' \cos\theta - x_2' \sin\theta, \quad x_2 = x_1' \sin\theta + x_2' \cos\theta. \tag{3.6}$$

Ако заменимо ове везе у једначину криве (3.5), заједно са (3.4) добијамо нову једначину

$$a'_{11}{x'_1}^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}{x'_2}^2 + 2a'_{13}x'_1 + 2a'_{23}x'_2 + a'_{33} = 0, \tag{3.7}$$

где је $2a'_{12} = -2a_{11}\cos\theta\sin\theta + 2a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2a_{22}\cos\theta\sin\theta$, односно $a'_{12} = a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta$. Како овде препознајемо тригонометријске једнакости $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$ и $2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$, то имамо $a'_{12} = a_{12}\cos(2\theta) + (a_{22} - a_{11})\frac{1}{2}\sin(2\theta)$. желимо да пронађемо такво θ да се коефицијент a'_{12} анулира, међутим из претходне једначине очигледно је да се то дешава када је

$$\operatorname{ctg}(2\theta) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Наравно овде немамо проблем дељења нулом, јер када је $a_{12} = 0$ крива је већ исправљена и нема потребе да примењујемо поступак ротације. Дакле, ако координатне осе заротирамо за угао $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$ једначина (3.5) прелази у једначину (3.7) код које је $a'_{12} = 0$. Тако смо се отарасили једног коефицијента и даље можемо посматрати једначину облика

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{3.8}$$

Приметимо да су променљиве x_1 и x_2 раздвојене и стога за $i = 1, 2$ уколико је $a_{ii} \neq 0$, можемо посматрати израз $a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i$. Тада се стандардно извлачи a_{ii} испред заграде, у којој се креира потпун квадрат на следећи начин

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i = a_{ii}\left(x_i^2 + 2x_i\frac{a_{i3}}{a_{ii}} + \left(\frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2\right) - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}} = a_{ii}\left(x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}}\right)^2 - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}},$$

те након транслације x_i координате путем $x'_i = x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}}$, суштински уклањамо коефицијент уз x_i, односно нови a_{i3} се анулира. Наравно, ако је $a_{ii} = 0$, тада се један коефицијент већ неутралисао.

Јако је битно да су трансформације које примењујемо изометријске трансформације, односно да оне чувају дужину дужи, илити скаларни производ. Због тога је јако битно извлачење a_{ii} испред заграде у претходном кораку.

3.8 Класификација кривих другог реда

Да се вратимо на нашу једначину (3.8) коју дискутујемо у зависности од тога да ли су a_{11} или a_{22} различити од нуле.

Ако су и a_{11} и a_{22} различити од нуле, то се захваљујући претходно објашњеним транслацијама елиминишу коефицијенти a_{13} и a_{23} из једначине (3.8) која постаје

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0, \tag{3.9}$$

те је даље потребно дискутовати знакове коефицијената.

Ако је $\operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(a_{22}) = \operatorname{sgn}(a_{33})$, тада уз $a = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{11}}}$ и $b = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,$$

коју не испуњава ниједна тачка јер збир квадрата никако није негативан. У питању је **празан скуп**, али ако проблем посматрамо у комплексној равни, можемо рећи да је то имагинарна елипса.

Ако је $\operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(a_{22}) = -\operatorname{sgn}(a_{33})$, тада уз $a = \sqrt{\frac{-a_{33}}{a_{11}}}$ и $b = \sqrt{\frac{-a_{33}}{a_{22}}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

а у питању је канонска једначина **елипсе**. Стандардно можемо захтевати и додатни услов $a \geqslant b > 0$, јер ако то није случај можемо извршити осну рефлексију у односу на праву $x_1 = x_2$, односно $x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1'$, што је изометријска трансформација која окреће значења координата x_1 и x_2, те самим тим значења мењају и бројеви a и b.

Ако је $\operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(a_{22})$ и $a_{33} = 0$, тада уз $a = 1$ и $b = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

чије је решење **тачка**, односно у питању је координатни почетак $(0, 0)$. То је оно што се види у реалној равни, док је у комплексној равни то пар имагинарних правих које се секу.

Преостаје нам случај $\operatorname{sgn}(a_{11}) = -\operatorname{sgn}(a_{22})$. Уколико је још $a_{33} = 0$ можемо поставити $a = 1$ и $b = \sqrt{\frac{-a_{11}}{a_{22}}}$ и добити једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

која представља **две праве које се секу**. Њихове једначине су очигледно $\frac{x_1}{a} \pm \frac{x_2}{b} = 0$.

Уколико је $\operatorname{sgn}(a_{11}) = -\operatorname{sgn}(a_{22})$ уз $a_{33} \neq 0$, не умањујући општост можемо претпоставити да важи $\operatorname{sgn}(a_{33}) = -\operatorname{sgn}(a_{11})$, јер у супротном можемо применити већ виђену осну рефлексију $x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1'$ која замењује координатне осе и самим тим окреће и коефицијенте a_{11} и a_{22}. Уколико поставимо $a = \sqrt{\frac{-a_{33}}{a_{11}}}$ и $b = \sqrt{\frac{a_{33}}{a_{22}}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

што је канонска једначина **хиперболе**.

Овако смо испитали све могућности из једначине (3.9) која је добијена када су и a_{11} и a_{22} различити од нуле. Следећа претпоставка је да је тачно један од бројева a_{11} и a_{22} различит од нуле. Не умањујући општост можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, иначе ћемо као и раније заменити x_1 и x_2 осу.

У овом случају одговарајућа (горе поменута) транслација по x_1 елиминисаће коефицијент a_{13}. Претпоставимо да је сада коефицијент $a_{23} \neq 0$. Тада можемо извршити и транслацију по x_2 која ће да обједини члан са x_2 са слободним чланом путем $x_2' = x_2 + \frac{a_{33}}{2a_{23}}$ и тако уклонити коефицијент a_{33}. Почетна једначина (3.8) у том случају постаје облика $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0$, а ако поставимо $p = \frac{-a_{23}}{a_{11}}$ имамо

$$x_1^2 = 2px_2,$$

што је једначина **параболе**. Уколико је $p < 0$ можемо окренути смер x_2 оси тако што ћемо извршити изометријску трансформацију $x_1 = x_1', \quad x_2 = -x_2'$ и добити канонско ограничење $p > 0$.

Нека је сада $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, али и $a_{23} = 0$. Почетна једначина (3.8) је тада облика $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$, односно

$$x_1^2 = c,$$

где је $c = \frac{-a_{33}}{a_{11}}$. Ако је $c = 0$ имамо $x_1 = 0$, што је једначина **праве**. Уколико је $c > 0$ у питању су **паралелне праве** $x_1 = \pm\sqrt{c}$, док у случају $c < 0$ једначина нема решења, односно у питању је **празан скуп**, но у комплексној равни то можемо видети као две паралелне имагинарне праве.

На овај начин исцрпили смо све могућности јер уколико су и a_{11} и a_{22} једнаки нули, то крива није другог реда, већ највише првог реда.

3.9 Сопствене вредности и вектори

Крива другог реда има једначину

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

што се може матрично записати са

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{33} = 0,$$

односно са

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ако уведемо ознаке

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ односно } \widehat{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

једначина криве гласи $\widehat{X}^T \widehat{A} \widehat{X} = 0$, док се квадратна форма може записати са

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = X^T AX.$$

Ротација за угао $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$ која исправља криву може се схватити и као дијагонализација симетричне матрице A и једноставније се изводи алгебарски, преко сопствених вектора.

Испитајмо сопствену структуру произвољне симетричне матрице A реда n. Сопствени вектор матрице A је ненула колона V за коју важи $AV = \lambda V$, где је λ неки број. Долазимо до хомогене једначине $(A - \lambda \operatorname{Id})V = 0$ која у случају $\det(A - \lambda \operatorname{Id}) \neq 0$ има јединствено решење $V = 0$, тако да тада нема сопствених вектора. Ако карактеристични полином обележимо са $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \operatorname{Id})$, то сопствени вектор може постојати само за λ које су нуле карактеристичног полинома, а то су сопствене вредности матрице A.

***Теорема* 3.3.** *Сопствене вредности симетричне матрице су реалне.*

Доказ. У општем случају полином $\chi_A(\lambda)$ се факторише над пољем комплексних бројева, те за сопствену вредност важи $\lambda \in \mathbb{C}$. Ако је $AV = \lambda V$ за $\lambda \in \mathbb{C}$ тада важи и конјугат те једначине, $A\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$, где је $\bar{V}$ колона која се састоји од конјугата елемената колоне V, док је матрица A сама себи конјугат јер има за улазе само реалне бројеве. Имамо

$$\lambda \bar{V}^T V = \bar{V}^T AV = (\bar{V}^T AV)^T = V^T A\bar{V} = \bar{\lambda} V^T \bar{V} = \bar{\lambda}(V^T \bar{V})^T = \bar{\lambda}\bar{V}^T V,$$

односно $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{V}^T V = 0$. Како је $\bar{V}^T V$ сума квадрата норми елемената из $V \neq 0$, то је $\bar{V}^T V > 0$, те мора бити $\lambda = \bar{\lambda}$ и зато $\lambda \in \mathbb{R}$. □

***Теорема* 3.4.** *Сопствени вектори симетричне матрице који одговарају различитим сопственим вредностима су међусобно ортогонални.*

Доказ. Нека је $AV = \lambda V$ и $AW = \mu W$. Из

$$\lambda W^T V = W^T AV = (W^T AV)^T = V^T AW = \mu V^T W = \mu(V^T W)^T = \mu W^T V,$$

следи $(\lambda - \mu)W^T V = 0$. Уколико је $\lambda \neq \mu$ то мора бити $W^T V = 0$, односно $W \cdot V = 0$. □

Ако је λ сопствена вредност, тада је $\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = 0$ и хомогена једначина $(A - \lambda \operatorname{Id})V = 0$ мора имати бесконачно много решења, те самим тим постоји сопствени вектор $V = 0$ који одговара λ. Сопствени вектор није једнозначно одређен јер кад га множимо ненула скаларем и даље имамо сопствени вектор. За наше потребе пронађене сопствене векторе можемо нормирати, тако да буде јединични.

Нека су сада λ_1 и λ_2 сопствене вредности наше симетричне матрице A реда два,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \operatorname{Id}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Уколико A има само једну сопствену вредност $\lambda_1 = \lambda_2$, тада је $a_{11} + a_{22} = 2\lambda_1$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1^2$, одакле добијамо $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$. Тада мора бити $a_{12} = 0$, што значи да је крива већ исправљена и нема потребе да вршимо ротацију.

Дакле, уколико има потребе за ротацијом ($a_{12} \neq 0$), важи $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и постоје јединични сопствени вектори који им одговарају, а они су међусобно ортогонални. Нека је $V = (v_1 \quad v_2)^T$ јединични сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ_1, односно да важи $(A - \lambda_1 \,\mathrm{Id})V = 0$ и $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Вектор $W(-v_2 \quad v_1)^T$ је јединични и ортогоналан на V, самим тим он мора бити сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2, односно $(A - \lambda_2 \,\mathrm{Id})W = 0$.

Основна идеја је пронаћи ортонормирану базу која се састоји само из сопствених вектора и поставити те векторе у колоне матрице преласка. Конкретно имамо матрицу

$$M = (V|W) = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

која има улогу матрице ротације из једначине (3.6), односно имамо трансформацију $X = MX'$. Квадратна форма X^TAX, после те трансформације постаје $(MX')^TA(MX') = X'^T(M^TAM)X'$, односно зависи од симетричне матрице $A' = M^TAM$. Како су V и W јединични ортогонални то је

$$A' = (V|W)^TA(V|W) = (V|W)^T(AV|AW) = (V|W)^T(\lambda_1 V|\lambda_2 W) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

те је нова матрица дијагонална.

Показали смо како брзо можемо дијагонализовати симетричну матрицу и тако исправити криву, јер квадратну форму $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ преводимо у $\lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2$. Овим поступком тачно знамо како изгледа квадратни део једначине након ротације и не морамо га посебно рачунати. Коефицијенти који се појављују уз квадратне чланове исправљене криве нужно морају бити нуле карактеристичног полинома.

3.10 Инваријанте кривих другог реда

У претходној секцији упознали смо трансформацију $X = MX'$ за неку матрицу M која се састоји из вектора неке ортонормиране базе, самим тим матрица је ортогонална, односно важи $MM^T = \mathrm{Id}$, што даље повлачи $(\det M)^2 = 1$. Квадратна форма $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ постаје $X^TAX = X'^TA'X'$, где је $A' = M^TAM$ симетрична матрица нове квадратне форме. Ако срачунамо карактеристични полином нове матрице

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda \,\mathrm{Id}) = \det(M^TAM - M^T(\lambda \,\mathrm{Id})M) = \det(M^T(A - \lambda \,\mathrm{Id})M) \\ &= \det M^T \det(A - \lambda \,\mathrm{Id}) \det M = (\det M)^2 \det(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

видимо да је он инваријанта наше трансформације. Како је $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr} A)\lambda + \det A$, то су онда $\mathrm{tr} A$ и $\det A$ такође инваријанте. Слична прича може се поновити за симетричну матрицу $\widehat{A}$ реда три из (3.10), где је трансформација $\widehat{X} = \widehat{M}\widehat{X}'$ за неку ортогоналну матрицу $\widehat{M}$. Тада ће бити инваријанта $\chi_{\widehat{A'}}(\lambda) = \chi_{\widehat{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}\widehat{A})\lambda^2 - \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\widehat{A})^2 - (\mathrm{tr}\widehat{A}^2))\lambda + \det\widehat{A}$, но и без тог расписивања $\det\widehat{A}$ је инваријанта због директног $\det\widehat{A'} = \det(\widehat{M}^T\widehat{A}\widehat{M}) = (\det\widehat{M})^2 \det\widehat{A} = \det\widehat{A}$. То нас наводи да дефинишемо величине Δ, D и T са

$$\Delta = \det\widehat{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad T = \mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22},$$

које су инваријанте наше трансформације.

Трансформација $X = MX'$ може се конкретизовати као ротација са

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$

што су матрично записане формуле ротације (3.6). Дакле, ротација се може записати са $X = MX'$, односно $\widehat{X} = \widehat{M}\widehat{X}'$, где су M и M' ортогоналне матрице дате са

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сама промена матрице $\widehat{A}$ у складу са једначином (3.7) се може расписати са

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\theta + a_{22}\sin^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{12} &= a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\theta + a_{22}\cos^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta,\\
a'_{13} &= a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta,\\
a'_{23} &= a_{23}\cos\theta - a_{13}\sin\theta,\\
a'_{33} &= a_{33},
\end{aligned}$$

што нам може послужити да се додатно уверимо да су Δ, D и T инваријанте ротације.

До канонског облика криве дошли смо користећи ротацију и транслацију, тако да је време да испитамо формуле транслације,

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad x_2 = x'_2 + c_2,$$

после којих у складу са једначином (3.7) можемо записати

$$\begin{aligned}
&a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},\\
&a'_{13} = c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13} && (3.11)\\
&a'_{23} = c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23} && (3.12)\\
&a'_{33} = c_1^2a_{11} + 2c_1c_2a_{12} + c_2^2a_{22} + 2c_1a_{13} + 2c_2a_{23} + a_{33}.
\end{aligned}$$

Ове формуле нам говоре да се матрица A није променила ($A' = A$), те одмах имамо инваријантност $T' = T$ и $D' = D$. Инваријантност за Δ може се видети из особине детерминанти да се чувају приликом елементарних операција (додавања врсте умножене неким скаларом на врсту, или слично за колоне). Ако на почетну детерминанту Δ на трећу колону додамо прву колону множену са c_1 и другу колону множену са c_2, а затим на трећу врсту додамо прву врсту множену са c_1 и другу врсту множену са c_2 добијамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & c_1a_{13} + c_2a_{23} + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = \Delta',$$

јер је

$$\begin{aligned}
a'_{33} &= c_1^2a_{11} + 2c_1c_2a_{12} + c_2^2a_{22} + 2c_1a_{13} + 2c_2a_{23} + a_{33}\\
&= c_1(c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13}) + c_2(c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23}) + c_1a_{13} + c_2a_{23} + a_{33}.
\end{aligned}$$

На овај начин показали смо да су Δ, D и T инваријанте ротације и транслације, као и да је то $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$.

3.11 Класификација инваријантама

У претходним секцијама видели смо како инваријанте могу помоћи приликом свођења криве на канонски облик. Штавише, оне нам могу помоћи и да уз мало рачуна одредимо који тип криве другог реда је у питању.

Прођимо поново кроз процес класификације кривих другог реда. У случају да су коефицијенти a_{11} и a_{22} после ротације различити од нуле, транслација нам даје (3.9) $a_{11}x_1^2 +$

$a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$. Инваријанте се не мењају, тако да је $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$, $D = a_{11}a_{22}$, $T = a_{11} + a_{22}$. Ненула вредности a_{11} и a_{22} су нуле карактеристичног полинома, односно сопствене вредности λ_1 и λ_2 (у шта смо се раније уверили), а при том је $a_{33} = \Delta/D$, те наша једначина постаје

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{\Delta}{D} = 0.$$

Дискусију смо започели претпоставком $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$, али како је $D = \lambda_1\lambda_2$ то обухвата услов $D > 0$. Додатно важи $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_1 + \lambda_2) = \operatorname{sgn}(T)$, тако да се знакови могу изражавати преко знака од T, док је $\operatorname{sgn}(\frac{\Delta}{D}) = \operatorname{sgn}(\Delta)$. Случај $\operatorname{sgn}(\Delta) = \operatorname{sgn}(T)$, односно $\Delta T > 0$ дао је празан скуп (имагинарна елипса). Случај $\operatorname{sgn}(\Delta) = -\operatorname{sgn}(T)$, односно $\Delta T < 0$ дао је елипсу. Случај $\Delta = 0$ дао је тачку.

Следећа претпоставка била је $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$, што даје $D < 0$, при чему је $\operatorname{sgn}(\frac{\Delta}{D}) = -\operatorname{sgn}(\Delta)$. За $\Delta = 0$ добили смо две праве које се секу, док је за $\Delta \neq 0$, крива била хипербола.

Нека је тачно један од бројева a_{11} и a_{22} различит од нуле, на пример $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$. Уколико је $a_{23} \neq 0$, ротација и транслација дају једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0$, где видимо $T = a_{11}$, $D = 0$ и $\Delta = -a_{11}a_{23}^2$, односно једначина постаје $Tx_1^2 + 2\sqrt{-\frac{\Delta}{T}}x_2 = 0$ и представља параболу са условима $D = 0$ и $\Delta \neq 0$.

Последњи случај је био $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$ уз $a_{23} = 0$, где је једначина $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$. Ово представља случај са $D = 0$ и $\Delta = 0$ где није могуће директно изразити вредност a_{33} преко наших инваријанти. Ту постоји три могућности: пар паралелних правих, једна права, или празан скуп. Геометријска интуиција нам говори да исечемо криву са произвољном правом и гледамо број пресечних тачака. Уколико је тај број два, онда имамо две паралелне праве, уколико је тај број један, онда је у питању права. Случај без пресечних тачака значи или празан скуп, или смо баш погодили правац правих у решењу те их зато нисмо пресекли.

Пресек криве и праве $x_1 = 0$ даје једначину $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{23}^2 - 4a_{22}a_{33}$, док пресек криве и праве $x_2 = 0$ даје једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_2 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{13}^2 - 4a_{11}a_{33}$. То нас мотивише да уведемо величине

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P = P_1 + P_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Детерминанта Δ може се развити по трећој колони

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

односно

$$\Delta = a_{13}U_1 - a_{23}U_2 + a_{33}D, \tag{3.13}$$

где је

$$U_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{3.14}$$

У случају да је $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, формула (3.13) даје $\Delta = a_{13}U_1 - a_{23}U_2$, али и

$$a_{12}U_1 = a_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12}^2 & a_{12}a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} & a_{12}a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{22}U_2,$$

што даље даје $a_{23}a_{12}U_1 = a_{23}a_{22}U_2 = a_{22}(a_{13}U_1 - \Delta)$, односно

$$U_1^2 = (a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})U_1 = -a_{22}\Delta. \tag{3.15}$$

Сасвим слично

$$a_{12}U_2 = a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & a_{11}a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}U_1,$$

што даље даје $a_{13}a_{12}U_2 = a_{13}a_{11}U_1 = a_{11}(a_{23}U_2 + \Delta)$, односно

$$U_2^2 = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})U_2 = -a_{11}\Delta. \tag{3.16}$$

Овим смо показали да за $D = \Delta = 0$ формуле (3.15) и (3.16) дају $U_1 = U_2 = 0$. Тада је $a_{22}a_{13} = a_{12}a_{23}$ и $a_{23}a_{11} = a_{12}a_{13}$, што нам омогућава да изразимо

$$a_{22}^2P_2 = a_{22}^2(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) = a_{22}a_{12}^2a_{33} - a_{22}a_{12}a_{23}a_{13} = a_{12}^2a_{22}a_{33} - a_{22}a_{23}a_{23}a_{11} = a_{12}^2P_1 \tag{3.17}$$

$$a_{11}^2P_1 = a_{11}^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = a_{11}a_{12}^2a_{33} - a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} = a_{12}^2a_{11}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{22}a_{13} = a_{12}^2P_2 \tag{3.18}$$

Сада смо спремни да комплетирамо класификацију, при чему имамо у виду да бар један од бројева a_{11} и a_{22} није нула, јер $a_{11} = a_{22} = 0$ повлачи $a_{12} = 0$ и у питању није крива другог реда. Не умањујући општост претпоставимо да је $a_{22} \neq 0$. Тада је $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ квадратна једначина са дискриминантом $-4P_1$. Приде (3.17) нам даје

$$P_2 = \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 P_1.$$

Уколико је $P = P_1 + P_2 = 0$, одмах је $P_1 = P_2 = 0$, те квадратна једначина има нула дискриминанту, осносно једно решење и у питању је права. Уколико је $P = P_1 + P_2 < 0$, то не може бити $P_1 = 0$ (јер повлачи $P_2 = 0$), имамо $P_1 < 0$, дискриминанта је позитивна, даје два решења, те су у питању две паралелне праве. Уколико је $P = P_1 + P_2 > 0$, одмах имамо $P_1 > 0$, негативну дикриминанту, што значи да крива не сече праву $x_1 = 0$. Уколико крива није празан скуп то мора бити облика $(x_1 - d)^2 = c$, али тада је $a_{11} \neq 0$, те због (3.18) имамо $P_2 > 0$, одакле крива не сече ни праву $x_2 = 0$ и крива је дефинитивно празан скуп.

Резултате које смо добили можемо објединити кроз следећу табелу:

$D : \Delta$	$\Delta \neq 0$ недегенерисане криве	$\Delta = 0$ дегенерисане криве
$D > 0$	елипса за $\Delta T < 0$ празан скуп за $\Delta T < 0$	тачка
$D < 0$	хипербола	две праве које се секу
$D = 0$	парабола	две паралелне праве за $P < 0$ права за $P = 0$ празан скуп за $P > 0$

3.12 Центар криве

Центар криве је заправо њен центар симетрије. То суштински значи да ако крива Γ има центар C и ако је $X \in \Gamma$, тада за тачку Y са особином $\overrightarrow{CX} = -\overrightarrow{CY}$ важи $Y \in \Gamma$. Неке криве другог реда имају центар, а неке не, а наш задатак је да испитамо које су то криве и да одредимо центар уколико постоји.

Ако је $X(x_1, x_2)$, њој симетрична тачка у односу на $C(c_1, c_2)$ је тачка $Y(2c_1 - x_1, 2c_2 - x_2)$. Приметимо да су ове формуле много згодније уколико је центар криве баш координатни почетак, јер би симетрична тачка била једноставно $(-x_1, -x_2)$. То нам омогућава транслација $x_1 = x_1' + c_1$, $x_2 = x_2' + c_2$, којом крива

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

постаје

$$g(x_1, x_2) = a_{11}'x_1^2 + 2a_{12}'x_1x_2 + a_{22}'x_2^2 + 2a_{13}'x_1 + 2a_{23}'x_2 + a_{33}' = 0,$$

при чему смо раније срачунали везе, на пример у (3.11) и (3.12).

За сваку тачку са новим координатама (x_1, x_2) важи да $g(x_1, x_2) = 0$ повлачи $g(-x_1, -x_2) = 0$, односно за тачку са криве важи $0 = g(x_1, x_2) - g(-x_1, -x_2) = 4a_{13}'x_1 + 4a_{23}'x_2$. Дакле, за сваку тачку криве са новим координатама (x_1, x_2) важи

$$a_{13}'x_1 + a_{23}'x_2 = 0. \tag{3.19}$$

Уколико није $a'_{13} = a'_{23} = 0$ то (3.19) представља једначину праве, односно тада је крива подскуп праве (3.19). Криве другог реда које су подскуп праве морамо посебно испитати, те једноставно видимо да права има бесконачно центара (свака тачка са ње), тачка има један центар (она сама), а празан скуп за центар има сваку тачку равни.

Уколико крива другог реда није подскуп праве, (3.19) нам даје $a'_{13} = 0$ и $a'_{23} = 0$. Повратак у оригинални координатни систем преко веза (3.11) и (3.12) даје нам једначине центра

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13} = 0,$$
$$a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23} = 0.$$

При том лако је проверити да уколико су ове једначине испуњене, крива $g(x_1, x_2) = 0$ има центар у $(0, 0)$, односно да крива $f(x_1, x_2) = 0$ има центар у (c_1, c_2). Ове једначине могу се записати и помоћу парцијалних извода $f'_{x_1}(c_1, c_2) = 0$ и $f'_{x_2}(c_1, c_2) = 0$ који се лако памте, но то је и логично јер вредност функције f у центру мора достићи екстремну вредност, тако да су изводи дуж било ког правца једнаки нули. Можемо закључити да је проналажење центра криве другог реда еквивалентно решавању линеарне матричне једначине

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}.$$

Уколико је $\det A = D \neq 0$ једначина $AX = B$ има јединствено решење $X = A^{-1}B$. То доказује да криве са $D \neq 0$, конкретно елипса, хипербола и две праве које се секу, имају тачно један центар, а његове координате можемо срачунати

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \end{pmatrix}.$$

Уколико је $\det A = D = 0$ знамо да једначина $AX = B$ нема јединствено решење. У случају матрице реда два (не важи за више редове) знамо да једначина има решење ако и само ако су обе Крамерове детерминанте једнаке нули, међутим

$$D_1 = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = U_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = -U_2,$$

где смо U_1 и U_2 дефинисали у (3.14). Како смо раније имали (3.13) и извели (3.15) и (3.16) у случају $D = 0$, то имамо $\Delta = 0$ ако и само ако је $U_1 = U_2 = 0$. То доказује да две паралелне праве ($D = \Delta = 0$) имају центар, самим тим и бесконачно много њих, док парабола ($D = 0, \Delta \neq 0$) нема центар.

3.13 Тангенте

Ако уведемо ознаке за следеће матрице

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

тада тачка (x_1, x_2) припада одговарајућој кривој другог реда уколико важи $X^TAX = 0$. Како пронаћи тангенту на криву која пролази кроз тачку (p_1, p_2)? Тражена тангента је права која има неки правац (v_1, v_2), те садржи тачке облика $(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$ за $t \in \mathbb{R}$, којима одговарају вектори $P + tV$. За тачке које припадају и кривој и тангенти важи $(P + tV)^TA(P + tV) = 0$, а како је $V^TAP = (V^TAP)^T = P^TAV$, то имамо једначину

$$(V^TAV)t^2 + 2(P^TAV)t + P^TAP = 0.$$

Ако је $V^TAV \neq 0$ у питању је квадратна једначина, а услов додира тангенте и криве даје двоструко решење, односно нула дискриминанту, одакле је

$$(P^TAV)^2 = (V^TAV)(P^TAP).$$

Уколико додатно претпоставимо да тачка (p_1, p_2) припада кривој, тада имамо $P^TAP = 0$ и услов додира постаје $P^TAV = 0$, што у расписаном облику гласи

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})v_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})v_2 = 0.$$

Дакле, за правац (v_1, v_2) тангенте у тачки (p_1, p_2) са криве чија је матрица A важи $(f'_{x_1}(p_1, p_2))v_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))v_2 = 0$. Како права $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ има баш тај правац, преостаје нам да је померимо паралелно тако да прође кроз тачку (p_1, p_2) и отуда једначина тангенте гласи

$$(f'_{x_1}(p_1, p_2))(x_1 - p_1) + (f'_{x_2}(p_1, p_2))(x_2 - p_2) = 0. \tag{3.20}$$

У општем случају тангента на криву (не нужно другог реда) може се тражити методама математичке анализе. Коефицијент правца тангенте на криву која је дата функцијом $x_2 = f(x_1)$ у тачки (p_1, p_2) криве ($p_2 = f(p_1)$) једнак је првом изводу функције криве у p_1, односно $f'(p_1)$. Ако x_2 схватимо као функцију по x_1 и диференцирамо по x_1 једначину $f(x_1, x_2) = 0$ добијамо $2a_{11}x_1 + 2a_{12}(x_2 + x_1x'_2) + 2a_{22}x_2x'_2 + 2a_{13} + 2a_{23}x'_2 = 0$, односно $(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}) + (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23})x'_2 = 0$, што можемо лакше записати кроз парцијалне изводе са $f'_{x_1}(x_1, x_2) + (f'_{x_2}(x_1, x_2))x'_2 = 0$. Вредност извода x'_2 у тачки p_1 једнака је коефицијенту правца тангенте на криву у тачки (p_1, p_2) са криве, те је зато права $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ баш тог правца, што потврђује наш резултат у једначини (3.20).

У случају да је $V^TAV = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 = 0$ нема квадратне једначине, те за $P^TAV \neq 0$ можемо рећи да је друга пресечна тачка праве и криве (прва је за $t = 0$) у бесконачности (напишемо $t = 1/s$ и пустимо да s тежи ка ∞). Тада за правац праве имамо

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-D}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{-a_{12} \mp \sqrt{-D}}.$$

То се очигледно никада не дешава у случају елипсе ($D > 0$). У случају параболе ($D = 0$), то се своди на један правац који је заправо правац осе, односно праве паралелне оси имају само једну заједничку тачку са параболом, а нису тангенте. У случају хиперболе ($D < 0$) имамо два таква правца и у питању су правци паралелни асимптотама хиперболе.

Конкретно, уколико посматрамо канонске једначине елипсе, хиперболе и параболе,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x_2^2 = 2lx_1,$$

тангенте у тачки (p_1, p_2) са криве гласе,

$$\frac{p_1x_1}{a^2} + \frac{p_2x_2}{b^2} = 1, \quad \frac{p_1x_1}{a^2} - \frac{p_2x_2}{b^2} = 1, \quad p_2x_2 = l(x_1 + p_1).$$

Асимптоте хиперболе су праве које додирују криву у бесконачности, односно оне се у бесконачности понашају као крива. Ако пођемо од канонске једначине хиперболе њене асимптоте можемо видети кроз једначину

$$0 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right).$$

Самим тим асимптоте на хиперболу су праве

$$x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1.$$

3.14 Дијаметри

Дијаметар или пречник је права која пролази кроз центар криве. Како смо видели једначине центра $f'_{x_1}(c_1, c_2) = 0$ и $f'_{x_2}(c_1, c_2) = 0$, то можемо написати једначину

$$(f'_{x_1}(x_1, x_2))u_1 + (f'_{x_2}(x_1, x_2))u_2 = 0, \tag{3.21}$$

где су u_1 и u_2 неки реални бројеви. Како су изводи $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ линеарни по x_1 и x_2 то је једначина (3.21) једначина праве. Са друге стране центар криве (c_1, c_2) испуњава ту једначину и зато се налази на тој правој. Дакле, права из једначине (3.21) садржи центар криве и самим тим јесте дијаметар. Кад кроз u_1 и u_2 шетамо реалне бројеве добијамо све могуће дијаметре.

Посебну улогу за елипсу и хиперболу имају конјуговани дијаметри. Ако изаберемо неки дијаметар њему конјугован биће онај који се добија тако што покупимо средишта свих тетива паралелних почетном дијаметру.

Конјугован дијаметар можемо дефинисати као онај који има правац тангенте у тачкама у којима почетни дијаметар сече криву. Основна идеја је та да је елипса уписана у паралелограм који чине два правца међусобно конјугованих дијаметара.

***Теорема* 3.5.** *Дијаметар конјугован правцу* (u_1, u_2) *има једначину* $(f'_{x_1}(x_1, x_2))u_1 + (f'_{x_2}(x_1, x_2))u_2 = 0.$

Доказ. Нека је $P(p_1, p_2)$ тачка са криве и уједно тачка са праве која има правац (u_1, u_2), а пролази кроз центар $C(c_1, c_2)$. Конјугован дијаметар за дијаметар CP има правац тангенте на криву у тачки P. Како тангенту имамо у једначини (3.20) то је можемо померити паралелно тако да прође кроз центар и добити $(f'_{x_1}(p_1, p_2))(x_1-c_1)+(f'_{x_2}(p_1, p_2))(x_2-c_2) = 0$, што је једначина конјугованог дијаметра. Све то можемо лепо расписати и добити $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})(x_1 - c_1) + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})(x_2 - c_2) = 0$. Ако све то групишемо по p_1 и p_2 добијамо $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)p_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2)p_2 + (a_{13}x_1 - a_{13}c_1 + a_{23}x_2 - a_{23}c_2) = 0$.

Сада ћемо искористити једначине центра $a_{13} = -a_{11}c_1 - a_{12}c_2$ и $a_{23} = -a_{12}c_1 - a_{22}c_2$ и након замена добијамо једначину конјугованог дијаметра $(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13})p_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23})p_2+(-a_{11}c_1x_1 - a_{12}c_2x_1 - a_{13}c_1 + -a_{12}c_1x_2 - a_{22}c_2x_2 - a_{23}c_2) = 0$, односно

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})(p_1 - c_1) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23})(p_2 - c_2) = 0.$$

Како је вектор правца (u_1, u_2) заправо правац $(p_1 - c_1, p_2 - c_2)$, то је претходна једначина $(f'_{x_1}(x_1, x_2))u_1 + (f'_{x_2}(x_1, x_2))u_2 = 0$, чиме смо доказали теорему. □

Нека су сада k_1 и k_2 правци међусобно конјугованих дијаметара. Дијаметар конјугован оном који има правац k_1 је по претходној теореми $1 \cdot f'_{x_1} + k_1 \cdot f'_{x_2} = 0$, односно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} + k_1a_{12}x_1 + k_1a_{22}x_2 + k_1a_{23} = 0$. Коефицијент правца ове праве је

$$k_2 = -\frac{a_{11} + k_1a_{12}}{a_{12} + k_1a_{22}},$$

те имамо $k_2(a_{12} + k_1a_{22}) + a_{11} + k_1a_{12} = 0$, односно

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0,$$

што је формула за конјуговане правце.

Глава 4

Површи

4.1 Површи другог реда

Површ другог реда је скуп свих тачака (x_1, x_2, x_3) тродимензионог простора које задовољавају једначину $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, где је f полином другог степена по променљивим x_1, x_2 и x_3, односно

$$f(x_1, x_2, x_3) = \; a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44},$$

где постоји барем један квадратни члан, $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$.

Једначина површи другог реда може се записати преко матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix},$$

где је једначина записана матрично са

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX + 2B^T X + a_{44}.$$

По узору на теорију кривих другог реда, желимо да ротацијом исправимо површ, при чему је овде у питању просторна ротација. Алгебарски то значи да желимо да дијагонализујемо нашу симетричну матрицу A. У ту сврху биће нам потребна ***спектрална теорема***.

Теорема 4.1. *Постоји ортонормирана база простора $\mathbb{R}^n$ која се састоји од сопствених вектора дате симетричне матрице реда n.*

Доказ. За сопствену вредност λ, по Теореми 3.3 је $\lambda \in \mathbb{R}$ и постоји вектор $E_1 \neq 0$ такав да је $AE_1 = \lambda E_1$, а не умањујући општост E_1 можемо скалирати односно сматрати да је јединичан. Како је $E_1^T AX = X^T AE_1 = \lambda X^T E_1$, видимо да свако X ортогонално на E_1 даје AX ортогонално на E_1. Та инваријантност нам омогућава да причу рестрикујемо на векторски простор $\mathrm{Span}\{E_1\}^\perp$ што је потпростор од $\mathbb{R}^n$ димензије $n-1$. Индукција нам даје ортонормирану базу $E_2, \ldots, E_n$ у $\mathrm{Span}\{E_1\}^\perp$ која се састоји од сопствених вектора и допуњује са E_1 до комплетне базе у $\mathbb{R}^n$. $\square$

Нека је P матрица преласка са старе базе на нову базу из Теореме 4.1 која се састоји од сопствених вектора матрице A. Промена старе базе e у нову базу e' види се у вези $e' = e \cdot P$, док је познато да се координате мењају кроз $X = PX'$. Израз $X^T AX + 2B^T X + a_{44}$ после ове трансформације постаје $(PX')^T A(PX') + 2B^T PX' + a_{44}$, односно $X'^T(P^T AP)X' + 2(B^T P)X' + a_{44}$. Видимо да нове улоге преузимају матрице $A' = P^T AP$ и $B'^T = B^T P$, при чему је

$$A' = P^T AP = P^T A(E_1|E_2|E_3) = P^T(AE_1|AE_2|AE_3) = (E_1|E_2|E_3)^T(\lambda_1 E_1|\lambda_2 E_2|\lambda_3 E_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

дијагонална матрица, при чему на дијагонали имамо управо сопствене вредности матрице A. На овакав начин ротирали смо координатни систем што нам је омогућило да исправимо површ, те је добијена једначина облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + a_{44} = 0.$$

Као и у случају кривих другог реда имамо на располагању и транслацију која ће уколико је $\lambda_i \neq 0$ за $i = 1, 2, 3$ уклонити коефицијент μ_i јер је

$$\lambda_i x_i^2 + 2\mu_i x_i = \lambda_i \left(x_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\mu_i^2}{\lambda_i},$$

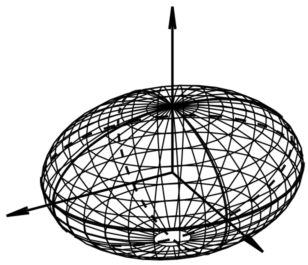
те можемо увести транслацију $x_i' = x_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ и тако елиминасти улогу μ_i.

4.2 Класификација површи другог реда

Класификацију површи другог реда урадићемо дискусијом по рангу матрице A. Претпоставимо најпре да је $\mathrm{Rang}(A) = 3$, што значи да су све сопствене вредности различите од нуле, $\lambda_i \neq 0$ за $i = 1, 2, 3$. Након одговарајуће транслације добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + p = 0.$$

Претпоставимо даље да су сопствене вредности истог знака, $\mathrm{sgn}(\lambda_1) = \mathrm{sgn}(\lambda_2) = \mathrm{sgn}(\lambda_3)$, те остаје да дискутујемо знак од p.



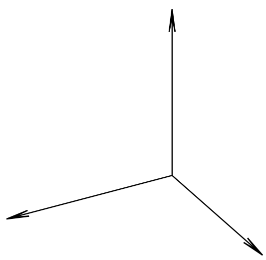
У случају $\mathrm{sgn}(p) = -\mathrm{sgn}(\lambda_1)$, можемо увести смене

$$a = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_3}},$$

те добити једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1,}$$

што је ***елипсоид***.



У случају $\mathrm{sgn}(p) = \mathrm{sgn}(\lambda_1)$, можемо увести смене

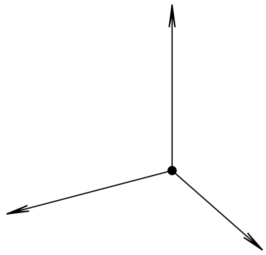
$$a = \sqrt{\frac{p}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{p}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{p}{\lambda_3}},$$

те добити једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1,}$$

што је ***имагинарни елипсоид*** (празан скуп).

У случају $p = 0$, смене



$$a = \sqrt{\lambda_2\lambda_3}, \quad b = \sqrt{\lambda_1\lambda_3}, \quad c = \sqrt{\lambda_1\lambda_2},$$

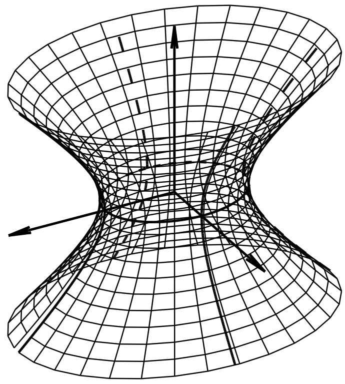
доводе до једначине

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -0,}$$

што је координатни почетак, односно ***тачка***.

Овим смо исцрпели случај кад су сопствене вредности истог знака, те даље претпостављамо да су две сопствене вредности истог знака, али различитог знака од треће. Не умањујући општост можемо поставити $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3)$.

У случају $\operatorname{sgn}(p) = -\operatorname{sgn}(\lambda_1)$, можемо увести смене



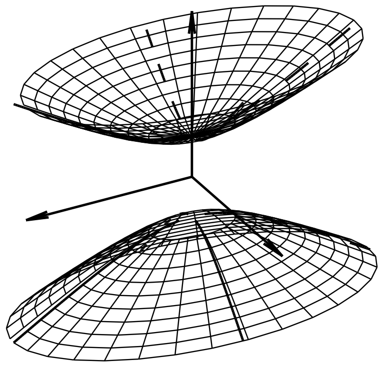
$$a = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{p}{\lambda_3}},$$

те добити једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1,}$$

што је ***једноделни хиперболоид***.

У случају $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(\lambda_1)$, можемо увести смене



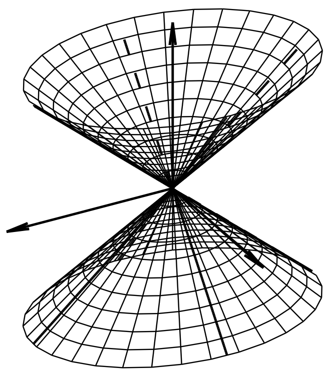
$$a = \sqrt{\frac{p}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{p}{\lambda_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{-p}{\lambda_3}},$$

те добити једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1,}$$

што је ***дводелни хиперболоид***.

У случају $p = 0$, смене



$$a = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}, \quad b = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}, \quad c = \sqrt{\lambda_1\lambda_2},$$

доводе до једначине

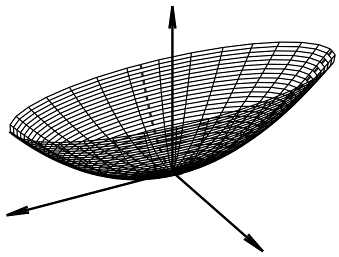
$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -0,}$$

што је ***елиптички конус***.

Прелазимо на наредни велики случај, $\operatorname{Rang}(A) = 2$. Не умањујући општост можемо претпоставити да је $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$. Претходно наведене транслације елиминисаће μ_1 и μ_2. Уколико је $\mu_3 \neq 0$ то додатна транслација $x_3' = x_3 + \frac{a_{44}}{2\mu_3}$ може уклонити слободан члан, после чега долазимо до једначине

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\mu_3 x_3 = 0.$$

Размотримо случај $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Уколико је $\operatorname{sgn}(\mu_3) = \operatorname{sgn}(\lambda_1)$ изометријом $x_3' = -x_3$ можемо окренути смер x_3 осе и добити $\operatorname{sgn}(\mu_3) = -\operatorname{sgn}(\lambda_1)$. Након смена



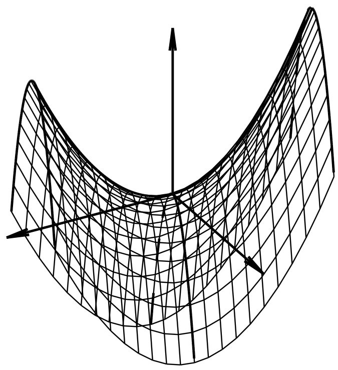
$$a = \sqrt{\frac{-\mu_3}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{-\mu_3}{\lambda_2}},$$

добијамо једначину

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,}$$

што је ***елиптички параболоид***.

Други случај је $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Као у првом случају, уколико није $\operatorname{sgn}(\mu_3) = -\operatorname{sgn}(\lambda_1)$ примењујемо изометрију $x_3' = -x_3$. Након смена



$$a = \sqrt{\frac{-\mu_3}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu_3}{\lambda_2}},$$

добијамо једначину

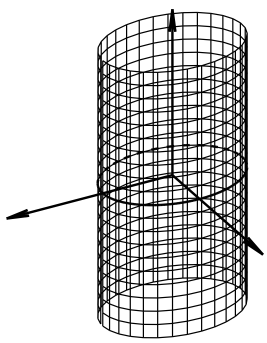
$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,}$$

што је ***хиперболички параболоид*** илити ***седло***.

Уколико је $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$ уз $\mu_3 = 0$, то имамо једначину

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + p = 0.$$

Она не садржи x_3, а у питању је баш она једначина коју смо анализирали у класификацији кривих другог реда. Све што смо добили као решење у две димензије сада се шири на трећу димензију тако што трећа координата пролази читаву праву. Дакле, решење је цилиндрична површ чија је директриса већ виђена крива другог реда. На овај начин добијамо наредне површи другог реда.



Једначина

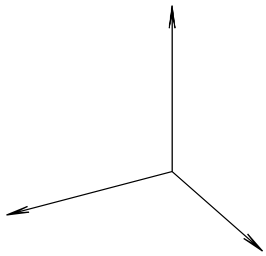
$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

представља елипсу у равни, а цилиндар над елипсом је ***елиптички цилиндар***.

Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,}$$

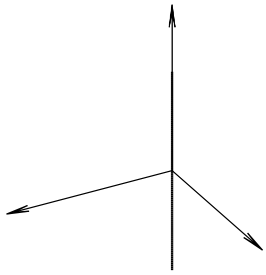
представља имагинарну елипсу у равни, а цилиндар над тим је ***имагинарни елиптички цилиндар*** (празан скуп).



Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

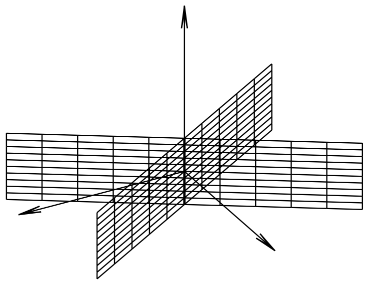
представља тачку у равни, а цилиндар над тачком је ***права***.



Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,}$$

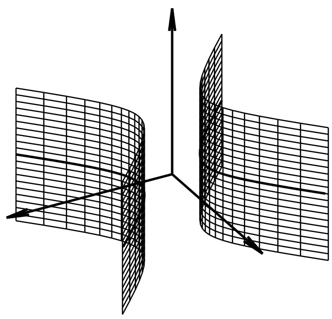
представља две праве у равни које се секу, а цилиндар над тим су ***две равни које се секу***.



Једначина

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,}$$

представља хиперболу у равни, а цилиндар над тим је ***хиперболички цилиндар***.



Преостаје нам да испитамо последњи велики случај, $\mathrm{Rang}(A) = 1$ (случај $\mathrm{Rang}(A) = 0$ нема квадратне чланове, те једначина није другог степена). Овде имамо тачно једну сопствену вредност различиту од нуле, а не умањујући општост можемо претпоставити да је то λ_1. Након транслације дуж x_1 осе добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + p = 0.$$

Преостаје нам да искористимо трансформације у равни Ox_2x_3, а основна идеја нам је да читав израз $2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3$ постане неко ново x_2 множено одговарајућим скаларом. Дакле, уколико је $\mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$ у питању је ротација у равни Ox_2x_3 задата једначином

$$x_2' = \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3,$$

односно њеним парњаком

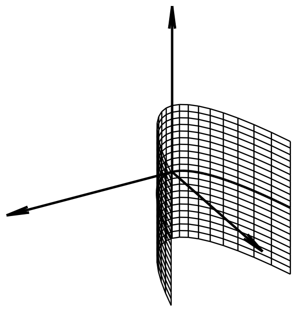
$$x_3' = \frac{-\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3.$$

Очигледна ротација елиминише нам једну од променљивих, а додатна транслација дуж преостале променљиве елиминише и слободан члан одакле је $\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 = 0$.

Добили смо једначину облика

$$\boxed{x_1^2 = 2px_2,}$$

која представља параболу у равни, а цилиндар над тим је ***параболички цилиндар***.

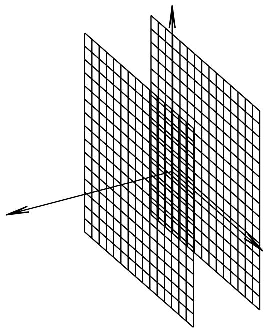


Последњи случај наступа када је $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$, односно када је $x_1^2 = p$, те имамо дискусију по знаку од p.

Једначина

$$\boxed{x_1^2 = a^2,}$$

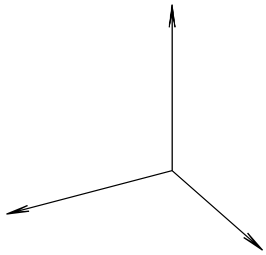
у равни представља две паралелне праве, а цилиндар над тим су ***две паралелне равни***.



Једначина

$$\boxed{x_1^2 = -a^2,}$$

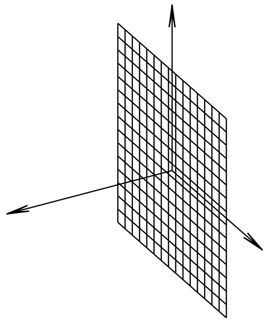
у равни представља две имагинарне паралелне праве, а цилиндар над тим су ***две имагинарне паралелне равни*** (празан скуп).



Једначина

$$\boxed{x_1^2 = 0,}$$

у равни представља праву, а цилиндар над правом је ***раван***.



Глава 5

Сферна геометрија

5.1 Сферни троугао

Сферна геометрија је геометрија на дводимензионој површи сфере, а практичну примену има у навигацији и астрономији. Сферна геометрија илуструје математику коју би поседовала бића која живе на сфери. На пример, растојање између две тачке на сфери неће бити просто еуклидско растојање, већ најкраћа дужина криве на сфери која повезује те две тачке.

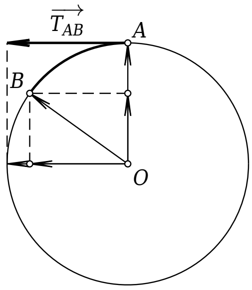
Уколико посматрамо раван и сферу, постоји неколико могућности за њихов међусобни положај. У крајње неинтересантном случају раван ће промашити сферу. У супротном, раван и сфера имају заједничких тачака, где је прва могућност да се ради о само једној заједничкој тачки и тада је у питању тангентна раван на сферу. На крају, преостаје могућност када се раван и сфера секу по кругу. Лако је приметити да ће пресечни круг бити највећи када раван пролази кроз центар сфере. Такав круг са сфере, чији се центар поклапа са центром сфере, зовемо ***велики круг***. Географски примери су меридијани који су половине великог круга, док су све паралеле мали кругови, осим екватора који јесте велики круг.

Велики кругови добијају на значају када схватимо да се најкраће растојање између две тачке на сфери реализује баш по луку великог круга који их спаја. Криве на површи које минимизују растојања у геометрији се називају геодезијске, те тако можемо рећи да су праве геодезијске у равни, а велики кругови геодезијске на сфери. Основни концепти у раванској геометрији су тачке и праве. Како на сфери немамо праве као такве, велики кругови као геодезијске биће адекватна замена за њих.

Посматраћемо најједноставнију сферу у тродимензионом простору, сферу полупречника један, са центром у координатном почетку, $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Сваку тачку са сфере $X \in \mathbb{S}^2$ можемо поистоветити са јединичним вектором $\overrightarrow{OX}$, где је O координатни почетак, односно центар наше једнинoчне сфере. ***Сферни троугао*** ABC представљају тачке $A, B, C \in \mathbb{S}^2$, при чему захтевамо са су њихови вектори положаја, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно независни.

Разлог због којег уводимо овај додатни услов линеарне независности је да избегнемо двосмислености. Наиме, уколико су вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно зависни, то су тачке O, A, B, C копланарне, одакле следи да A, B, C припадају неком великом кругу. Аналогија са раванском геометријом је та да не можемо говорити о троуглу ABC уколико су тачке колинеарне.

За тачке A, B и C кажемо да су ***темена*** сферног троугла ABC. Приметимо да међу теменима нема антиподалних (дијаметрално супротних) тачака, јер ако су A и B атиподалне, то важи $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, из чега следи линеарна зависност наших вектора положаја, што по дефиницији није дозвољено. То нам омогућава да једнозначно дефинишемо ***странице*** сферног троугла као краће лукове великих кругова који спајају темена. Дужине страница можемо обележити са $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$ и $c = \widehat{AB}$, а свакако важи $a, b, c \in (0, \pi)$.



Угао између страница сферног троугла природно је угао између одговарајућих тангенти у теменима. Покушајмо да одредимо тангенту у тачки A на страницу $\widehat{AB}$. Заправо, желимо вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ који је нормалан на $\overrightarrow{OA}$ и налази се у равни великог круга OAB. Једнозначну одређеност му можемо дати условом да је јединичан и „усмерен ка B“, односно да је угао који заклапа са $\overrightarrow{OB}$ оштар. Први корак Грам-Шмитовог процеса ортогонализације нам директно даје тај вектор

$$\overrightarrow{T_{AB}} = \frac{\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\|}. \tag{5.1}$$

Како су вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ јединични имамо

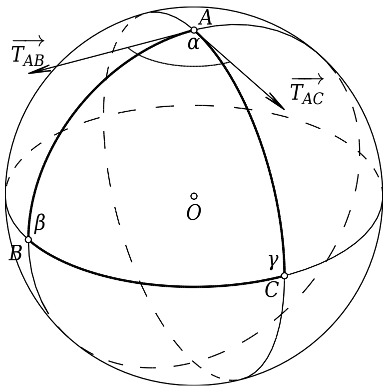
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos \measuredangle AOB = \cos \widehat{AB},$$

те можемо проверити да ли $\overrightarrow{T_{AB}}$ испуњава наметнуте услове. Очигледно је $\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}$ нормалан на $\overrightarrow{OA}$ (скаларни производ једнак нули) и припада равни OAB (јер је линеарна комбинација вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$). Како је $\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}) = 1 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2 = 1 - \cos^2 \widehat{AB} > 0$, то $\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}$ са $\overrightarrow{OB}$ заклапа оштар угао, а дељењем са његовом нормом добијамо јединични вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ који смо тражили.

На овај начин долазимо до углова сферног троугла ABC које дефинишемо са

$$\alpha = \measuredangle \widehat{BAC} = \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}}), \quad \beta = \measuredangle \widehat{ABC} = \measuredangle(\overrightarrow{T_{BA}}, \overrightarrow{T_{BC}}), \quad \gamma = \measuredangle \widehat{ACB} = \measuredangle(\overrightarrow{T_{CA}}, \overrightarrow{T_{CB}}),$$

при чему такође важи $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$.



5.2 Косинусна теорема

Размотримо тангентни вектор $\overrightarrow{T_{AB}}$ из формуле (5.1). Већ смо имали $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \widehat{AB}$, одакле следи

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\|^2 &= \|\overrightarrow{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \overrightarrow{OA}\|^2 = \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\cos \widehat{AB}(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}) + \cos^2 \widehat{AB} \cdot \|\overrightarrow{OA}\|^2 \\ &= 1 - 2\cos^2 \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{AB} = 1 - \cos^2 \widehat{AB} = \sin^2 \widehat{AB}.\end{aligned}$$

Како је $\widehat{AB} \in (0, \pi)$, имамо $\sin \widehat{AB} > 0$ и отуда $\|\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}\| = \sin \widehat{AB}$, што нам даје запис једначине (5.1) са

$$\overrightarrow{T_{AB}} = \frac{\overrightarrow{OB} - (\cos \widehat{AB})\overrightarrow{OA}}{\sin \widehat{AB}},$$

одакле добијамо једначину

$$\overrightarrow{OB} = (\cos\widehat{AB})\overrightarrow{OA} + (\sin\widehat{AB})\overrightarrow{T_{AB}}.$$

Сасвим слично (рецимо пермутацијом темена) добијамо и

$$\overrightarrow{OC} = (\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA} + (\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AC}}.$$

Скаларним множењем ових једначина добијамо

$$\cos\widehat{BC} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = ((\cos\widehat{AB})\overrightarrow{OA} + (\sin\widehat{AB})\overrightarrow{T_{AB}})\cdot((\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA} + (\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AC}}),$$

те како је $\overrightarrow{OA}$ ортогонално и на $\overrightarrow{T_{AB}}$ и на $\overrightarrow{T_{AC}}$ добијамо

$$\cos\widehat{BC} = (\cos\widehat{AB})(\cos\widehat{AC})\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} + (\sin\widehat{AB})(\sin\widehat{AC})\overrightarrow{T_{AB}}\cdot\overrightarrow{T_{AC}}.$$

Како је $\overrightarrow{T_{AB}}\cdot\overrightarrow{T_{AC}} = \|\overrightarrow{T_{AB}}\|\cdot\|\overrightarrow{T_{AC}}\|\cdot\cos\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}}) = \cos\measuredangle\widehat{BAC}$ коначно добијамо основну теорему сферне геометрије у виду формуле

$$\cos\widehat{BC} = \cos\widehat{AB}\cos\widehat{AC} + \sin\widehat{AB}\sin\widehat{AC}\cos\measuredangle\widehat{BAC}.$$

Основна теорема сферне геометрије је пандан косинусној теореми еуклидске геометрије и можемо је записати у раније уведеним ознакама.

***Теорема* 5.1.** *За сферни троугао важи* $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$.

Симпатично је видети пандан Питагорине теореме који наступа у случају да је угао α прав и тада је $\cos a = \cos b\cos c$.

5.3 Синусна теорема

Да би пронашли пандан који одговара синусној теореми можемо угао изразити из косинусне теореме,

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

а затим изразити

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha &= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}\\ &= \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c},\end{aligned}$$

одакле је

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin a\sin b\sin c}{\sqrt{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}}.$$

Како је десна страна израза симетрична по a, b и c, то добијамо синусну теорему за сферни троугао.

***Теорема* 5.2.** *За сферни троугао важи* $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$.

Алтернативно, можемо изразити угао $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}})$ на геометријски начин, тако што посматрамо угао $\measuredangle(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})$. Вектори $\overrightarrow{T_{AB}}$, $\overrightarrow{T_{AC}}$, $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$ су очигледно нормални на $\overrightarrow{OA}$ и зато припадају једној равни, на пример тангентној равни у тачки A на сферу. Са друге стране $\overrightarrow{T_{AB}}$ припада равни OAB и самим тим нормалан је на $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$, а сасвим слично $\overrightarrow{T_{AC}}$ припада равни OAC и нормалан је на $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$. Закључујемо да су $\measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}})$ и

$\measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$ углови са нормалним крацима у једној равни, те су они једнаки или суплементни, и зато имају једнаке синусе

$$\sin \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}}) = \sin \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}).$$

Посматрајмо сада вектор $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$. Ако двоструки векторски производ рачунамо по формули (1.24) Теореме 1.11 добијамо

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) &= (\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}))\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}))\overrightarrow{OA} \\ &= -[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}]\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Овако можемо срачунати његову норму, $\|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| = |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \mathcal{V}$, где је $\mathcal{V}$ запремина паралелепипеда који је генерисан векторима $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Са друге стране норму векторског производа можемо рачунати са

$$\|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| = \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \cdot \|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| \cdot \sin \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}).$$

Како је $\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \sin \widehat{AB} = \sin \widehat{AB}$ и $\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\| = \sin \widehat{AC}$, то обједињавањем са претходним добијамо

$$\mathcal{V} = \|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})\| = \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \sin \measuredangle(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}}).$$

Ако пређемо на наше скраћене ознаке за странице и углове сферног троугла имамо

$$\mathcal{V} = \sin c \sin b \sin \alpha.$$

Како се $\mathcal{V}$ не мења пермутовањем темена, то одмах можемо дописати још две једначине

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \sin a \sin c \sin \beta, \\ \mathcal{V} &= \sin b \sin a \sin \gamma,\end{aligned}$$

те изједначавањем добити већ изведену синусну теорему за сферни троугао.

5.4 Сферне неједнакости

Ако посматрамо основну теорему сферне геометрије (Теорема 5.1),

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

није тешко приметити да се у њој крију адиционе формуле како за косинус збира, тако и за косинус разлике, што можемо записати са

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos(b + c) + \sin b \sin c(\cos \alpha + 1), \\ \cos a &= \cos(b - c) + \sin b \sin c(\cos \alpha - 1).\end{aligned}$$

Како је $\sin b > 0$, $\sin c > 0$, $(\cos \alpha + 1) > 0$ и $(\cos \alpha - 1) < 0$, то из претходних једначина можемо записати

$$\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c).$$

Функција cos је опадајућа на интервалу $(0, \pi)$, тако да у случају $b + c \leqslant \pi$ добијамо $b + c > a$. Међутим, у случају $b + c > \pi$, $b + c > a$ само по себи важи јер је $a < \pi$. Са друге стране је $|b - c| \in (0, \pi)$, одакле добијамо $|b - c| < a$. Ове неједнакости можемо обједининити са

$$|b - c| < a < b + c,$$

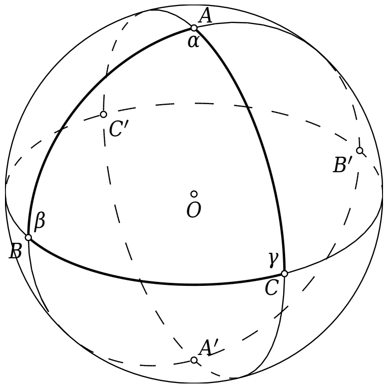
што представља неједнакост троугла у изворном облику.

Сасвим слично, из $\cos(b + c) < \cos a = \cos(2\pi - a)$ можемо закључити да важи $b + c < 2\pi - a$ јер косинус расте на $(\pi, 2\pi)$, док за $b + c < \pi$ неједнакост сама по себи важи. На овај начин добили смо неједнакост за збир страница у сферном троуглу,

$$a + b + c < 2\pi.$$

5.5 Површина сферног троугла

Погледајмо како можемо израчунати површине једноставних фигура на сфери. ***Сферни двоугао*** је фигура на сфери која је ограничена са два велика полукруга који су под углом θ. Читава сфера је двоугао за угао $\theta = 2\pi$, а знамо да њена површина износи $\mathcal{P}(2\pi) = 4\pi$. Како је површина сферног двоугла $\mathcal{P}(\theta)$ директно сразмерна углу θ, лако можемо закључити да је коефицијент сразмерности једнак 2, односно $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$.



Посматрајмо сферни троугао ABC и три велика круга који одређују његове странице. Ако у игру укључимо одговарајуће антиподалне тачке A', B', C' видимо да велики кругови деле читаву сферу на 8 области, односно 8 сферних троуглова: $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle AB'C$, $\triangle ABC'$, $\triangle A'B'C$, $\triangle A'BC'$, $\triangle AB'C'$, $\triangle A'B'C'$. Ако искористимо везе са двоугловима,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle A'BC) = \mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(\triangle AB'C') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),\\
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle AB'C) = \mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\triangle A'BC') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),\\
\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle ABC') = \mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(\triangle A'B'C) + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),
\end{aligned}$$

након сумирања добијамо

$$2\mathcal{P}(\alpha) + 2\mathcal{P}(\beta) + 2\mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(2\pi) + 2\mathcal{P}(\triangle ABC) + 2\mathcal{P}(\triangle A'B'C').$$

Након примене формуле $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$ и чињенице да су антиподални троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни, те имају исте површине, добијамо $4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\mathcal{P}(\triangle ABC)$, односно

$$\mathcal{P}(\triangle ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Како је површина троугла увек позитивна, имамо директну последицу да је збир углова у сферном троуглу увек већи од π.

5.6 Поларни троугао

Ако пођемо од произвољног сферног троугла ABC, можемо конструисати нови сферни троугао који је блиско повезан са њим на следећи начин. Знамо да велики круг који спаја темена B и C дели сферу на две хемисфере, од којих једна садржи теме A, а пол те хемисфере означићемо са A'. Дакле, уколико је велики круг кроз B и C екватор, а A на северној хемисфери, онда је A' северни пол, а слично можемо дефинисати тачке B' и C'. За нови троугао $A'B'C'$ кажемо да је поларан троуглу ABC, а наведене релације можемо записати на следећи начин,

$$\begin{aligned}
\widehat{A'A} < \pi/2, \quad \widehat{A'B} = \pi/2, \quad \widehat{A'C} = \pi/2,\\
\widehat{B'A} = \pi/2, \quad \widehat{B'B} < \pi/2, \quad \widehat{B'C} = \pi/2,\\
\widehat{C'A} = \pi/2, \quad \widehat{C'B} = \pi/2, \quad \widehat{C'C} < \pi/2,
\end{aligned}$$

које га једнозначно одређују. Из симетрије претходних једначина лако можемо закључити да важи и обрат, односно да је троугао ABC поларан троуглу $A'B'C'$.

Испоставља се да су странице поларног троугла у блиској вези са угловима оригиналног троугла. Посматрајмо пресек $\widehat{B'C'}$ са великим круговима одређеним луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ и нека су то тачке D и E. Приметимо да важи $\alpha = \widehat{DE}$, као и $\widehat{DC'} = \pi/2$, $\widehat{EB'} = \pi/2$. Сада је $a' = \widehat{B'C'} = \widehat{EB'} + \widehat{DC'} - \widehat{DE} = \pi - \alpha$. То можемо извести за све странице поларног троугла, као и обратно јер је поларан троугао поларном троуглу онај оригиналан, што нам даје следеће везе:

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \alpha' + a = \beta' + b = \gamma' + c = \pi.$$

Изведене једначине за поларни троугао нам омогућавају да из већ познатих једнакости и неједнакости добијамо нове. На пример, већ изведене неједнакости $a+b+c < 2\pi$ и $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ су еквивалентне. Такође можемо погледати суплемент косинусне теореме која сада гласи

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$